離散群のエルゴード理論の諸相

木田 良才　(東京大学)*

私の主な研究対象は可算離散群による測度空間への作用およびその軌道同値関係であるが, そのような対象の研究に至る歴史的経緯といくつかの発展について概観したい. 本稿は網羅を目的としないごく限られた範囲での私見であり, 今日の発展に大きく寄与した成果が他にも数多くあることを断っておく. 執筆当初の意図に反して本稿の大半を 1980 年以前の経緯の説明に費やしてしまったが, 講演では最近の話題についても適宜触れる予定である. 概説記事 [1–6] も参照してほしい.

1. 群のユニタリ表現

複素数体 $\mathbb{C}$ 上のヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ に対し, $\mathcal{H}$ から $\mathcal{H}$ への線型作用素で内積を保ち同型であるものを $\mathcal{H}$ のユニタリ作用素という. $\mathcal{H}$ のユニタリ作用素全体を $U(\mathcal{H})$ とかく. これは写像の合成により群をなす. 群 G から $U(\mathcal{H})$ への準同型を G の $\mathcal{H}$ へのユニタリ表現という. G が位相をもつときは適当な意味での連続性を課す. 本稿では断りがない限り, 群の表現といえばユニタリ表現を指し, 位相群といえば可分かつ局所コンパクトであることを仮定する. G の $\mathcal{H}$ へのユニタリ表現が既約であるとは $\mathcal{H}$ の閉部分空間で G-不変なものが $\{0\}$ と $\mathcal{H}$ に限るときをいう. 群のユニタリ表現の問題は, それを既約なものに分解することで既約表現の問題に帰着されることが多い. Wigner (1939) は物理学的な動機から, 4次元時空間のローレンツ計量を保つ変換からなる非斉次ローレンツ群 $SO_0(3,1) \ltimes \mathbb{R}^4$ の既約表現の構成と分類を試み, 部分群 $\mathbb{R}^4$ が非自明に作用する表現をすべて記述した. 当時コンパクト群と可換群の表現については一般論ができあがっており, それらの既約表現はすべて有限次元になるが, この Wigner の結果はその枠を超え無限次元の既約表現を対象にしたという点で歴史的意義をもつ. そして部分群 $\mathbb{R}^4$ が自明に作用するような既約表現, つまり $SO_0(3,1)$ の既約表現については Gelfand-Naimark (1946/47) により, その記述が達成された. Wigner による表現の記述を一般の位相群の枠組みで捉えたのが Mackey (1949/51) である. その枠組みとは G が位相群 K と可換位相群 N による半直積群 $K \ltimes N$ として表される場合であり, このとき K は N の双対 $\widehat{N}$ に自然に作用する. Mackey は作用 $K \curvearrowright \widehat{N}$ に関するある仮定の下で, G の任意の表現が $\widehat{N}$ 上の測度 μ でそのクラスが K の作用で保たれるようなものと変換亜群 $K \ltimes (\widehat{N}, \mu)$ のユニタリ表現という二つの構成要素からなることを示した (本稿では測度はすべて σ-有限とする. 可測空間上の二つの測度が同値であるとはそれらが互いに関して絶対連続であるときをいい, 測度のクラスとはその同値類を意味する). この結果は $ax+b$ 群やハイゼンベルグ群など, 当時得られていたいくつかの具体的な群に対する既約表現の記述を統一するものであった.

表現と測度は関わりが深い. 一次元トーラス $\mathbb{T}$ 上の測度 μ に対して $L^2(\mathbb{T}, \mu)$ のユニタリ作用素 $f \mapsto [z \mapsto zf(z)]$ が定まる. Hahn-Hellinger の定理によれば, ヒルベルト空間の任意のユニタリ作用素はこのようにして得られるユニタリ作用素の直和であり, さらに適当な意味での測度の一意性が成り立つ. これは $\mathbb{Z}$ の表現に対する主張と見なすことができ, $\mathbb{T}$ の各点が $\mathbb{Z}$ の既約表現を定めることに注意すれば, $\mathbb{Z}$ の任意の表現は既

本研究は科研費 (課題番号: 17K05268) の助成を受けたものである.
*e-mail: kida@ms.u-tokyo.ac.jp

約表現の μ に関する連続和に一意的に分解されることを意味する. 例えば μ が $\mathbb{T}$ の有限部分集合にサポートをもつ場合が線型代数におけるユニタリ行列の対角化にあたる. 測度に関する表現の連続和は直和の一般化であり, 表現の直積分とよばれる. Mackey (1958) はさらに, N が可換とは限らない G の正規部分群であるような場合への一般化を試み, 具体的なリー群の表現を記述する手段としての確立を目指すことになる.

一方で Mackey (1957) は一般の位相群 G に対し, Hahn-Hellinger の定理を雛型として, 測度による表現の一意的な記述が可能かどうかという問題に関心を寄せる. n を自然数または可算無限の濃度とし, $\mathcal{H}_n$ を n 次元ヒルベルト空間とする. G の $\mathcal{H}_n$ への既約表現からなる集合を $\mathrm{Irr}(G, \mathcal{H}_n)$ とかく. ユニタリ群 $U(\mathcal{H}_n)$ は $\mathrm{Irr}(G, \mathcal{H}_n)$ に自然に作用し, それによる商を $\widehat{G}_n$ とかくと, これは G の n 次元既約表現の同値類全体と見なせる. そして $\widehat{G}$ を非交叉和 $\bigcup_n \widehat{G}_n$ として定める. $\mathrm{Irr}(G, \mathcal{H}_n)$ には G と $\mathcal{H}_n$ からくる位相が入り, そしてボレル可測構造が入る. $\widehat{G}_n$ には商による可測構造が入り, $\widehat{G}$ には各 $\widehat{G}_n$ が可測になるような可測構造が入る. Mackey はこの $\widehat{G}$ の可測構造に注目し, G の任意の表現を $\widehat{G}$ 上の測度による直積分として表すことを試みる. その過程で, 当時集合論的な興味から研究されていた標準ボレル空間が導入される. これはその名が示す通り病的性質をもたない可測空間であり, その振る舞いのよさから Mackey は $\widehat{G}$ が標準ボレル空間であれば G の表現で重複のないものは $\widehat{G}$ 上の測度と一対一に対応することを導いている (重複がないとは, 有限次ユニタリ行列に対してはその各固有空間が一次元であることを意味する). 最終的にこの表現と測度の対応付け問題は次の形で決着する (Glimm-Effros のダイコトミー): $\widehat{G}$ が標準ボレル空間であれば, G のすべての表現 π は $\widehat{G}$ 上の測度 μ を用いた直積分 $\pi = \int_{\widehat{G}}^{\oplus} \tau \, d\mu(\tau)$ の直和として表わされ, さらにその直和に現れる μ たちは適当な意味での一意性をもつ. つまり Hahn-Hellinger の定理の類似が極めて理想的な形で成り立つ. 一方 $\widehat{G}$ が標準ボレル空間でなければ, それは $\widehat{G}$ の元を常識的な空間 (例えば $\mathbb{R}$) を用いて一対一にパラメータ付けることが可測な範囲ですら不可能であることを意味し, この意味で G の既約表現の分類は不可能である. さらにそのような G に対しては, 既約表現の直積分への分解の仕方が複数あるような表現が必ず存在する. 前者の場合 G はテイムであるといい, 後者の場合 G はワイルドであるという. テイムな群のことを I 型の群ということも多い.

連結な位相群についていえば, コンパクト群, 可換群, 巾零リー群, 半単純リー群などがテイムであり, 可解リー群の中にはワイルドなものが存在する. 可算離散群についてはというと, テイムであるためにはその群が有限指数の可換部分群を含むことが必要十分である (Thoma 1964). よって多くの興味ある離散群に対し, そのすべての既約表現を (可測な方法で) 列挙することは不可能であり, 既約表現への分解を通して表現を理解するという通常の方法が通用しない. ただ, このワイルドな状況においても, 作用素環という枠組みで理解される部分が少なからずある.

2. 作用素環と群のユニタリ表現

一般に群 G の $\mathbb{C}$ 上の線型表現は群環 $\mathbb{C}G$ の表現と見なせるように, G のヒルベルト空間へのユニタリ表現は C^*-群環 C^*G の表現と一対一に対応する. C^*-環とは $\mathbb{C}$ 上の対合付きバナッハ環で $\forall x \ \|x^*x\| = \|x\|^2$ というノルムの条件を満たすものである. ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ に対し $\mathcal{H}$ から $\mathcal{H}$ への有界線型作用素からなる集合を $B(\mathcal{H})$ とかく. これは作用素ノルムに関してバナッハ環であり共役作用素をとる操作により対合付き環になる. $B(\mathcal{H})$ の部分環で対合とノルムに関して閉じたものが C^*-環の典型例である.

群環 $\mathbb{C}G$ を適当なノルムで完備化して得られる C^*-環が G の C^*-群環である. 群のユニタリ表現をより一般の枠組みである C^*-環の表現として捉えれば, C^*-環の代数的な視点がもたらされるばかりでなく, むしろそのように捉えた方が自然なことも多い.

一方もう一つの作用素環の代表であるフォンノイマン環は個別の表現の性質を記述する道具としてその役割を担う. $B(\mathcal{H})$ の部分環で対合と弱位相に関して閉じているものを $\mathcal{H}$ 上のフォンノイマン環という. 群 G のユニタリ表現 $\pi\colon G \to U(\mathcal{H})$ に対し, その表現としての興味ある性質の多くは可換子環 $\pi(G)'$ に色濃く反映される. $B(\mathcal{H})$ の部分集合 S に対し, S の可換子環 S' とは $B(\mathcal{H})$ の元で S の各元と交換するもの全体を意味する. S' は $B(\mathcal{H})$ の部分環であり, S が対合に関して閉じていれば S' もそうなる. また S' は $B(\mathcal{H})$ の弱位相に関して閉じている. 可換子環 $\pi(G)'$ はフォンノイマン環であり, $\pi(G)'$ の射影元 (つまり $\mathcal{H}$ のある閉部分空間への直交射影となる元) は π の部分表現に対応する. このことから π の表現としての性質と $\pi(G)'$ のフォンノイマン環としての性質の間に次のような対応を見出すことができる:

(1) π が既約であることと $\pi(G)'$ がスカラーのみからなることは同値である.

(2) π が重複をもたないことと $\pi(G)'$ が可換であることは同値である.

(1) は Schur の補題とよばれる. 表現の直積分分解の様子も $\pi(G)'$ で記述できる. ここで表現の直積分の定義を簡単に述べておく. 測度空間 (Z, μ) と Z の各点 z で添字付けられた G の表現 π_z が与えられたとする. π_z により G が作用するヒルベルト空間を $\mathcal{H}_z$ とかき, 非交叉和 $\bigcup_{z\in Z}\mathcal{H}_z$ を自然に Z 上のバンドルと見なす. このバンドルに可測構造を適切に定めた後, バンドルの切断からなるヒルベルト空間が得られ, その内積は切断 s, t に対し等式 $\langle s,t\rangle = \int_Z \langle s(z), t(z)\rangle_{\mathcal{H}_z}\, d\mu(z)$ で定まる. G は各ファイバーへの作用を通して切断全体に作用する. こうして得られる G の表現を $\int_Z^{\oplus} \pi_z\, d\mu(z)$ とかき, これを表現の直積分という. μ が Z の可算部分集合にサポートをもつ場合, 表現の直積分は表現の直和に一致する.

(3) G の表現 π に対し, その直積分分解 $\pi = \int_Z^{\oplus} \pi_z\, d\mu(z)$ は $\pi(G)'$ の可換部分フォンノイマン環 $(= L^\infty(Z, \mu))$ と一対一に対応する. そして各 π_z が G の既約表現であることと, 対応する可換部分フォンノイマン環が $\pi(G)'$ の中で極大であることは同値である (von Neumann 1949, Mautner 1950).

よって π の既約表現への直積分分解がどれほど多く存在するかという問題は $\pi(G)'$ の極大な可換部分フォンノイマン環 (maximal abelian subalgebra, 略して masa) がどれほど多く存在するかという問題に言い換えることができる. 一般にフォンノイマン環の masa を捉えることは今なお難しい問題であり, 対応する既約表現への直積分分解の問題もまた同程度に難しいのである. ただ I 型のフォンノイマン環に限るとその masa はユニタリ共役を除いて唯一であり, この場合 masa は完全に捉えられる. Murray-von Neumann (1936) はフォンノイマン環を射影元の振る舞いにより大別し, 最もシンプルな振る舞いをするものを I 型とよんだ. 有限次元環, 可換環, $B(\mathcal{H})$ が I 型環の例である. そして任意の I 型環は可換環と $B(\mathcal{H})$ をテンソル積や直和で組み合わせた形をしている. 群 G がテイムであることと G のすべての表現 π に対し $\pi(G)'$ が I 型であることは同値である (Glimm 1961). これは G のすべての表現が G の既約表現からなる直積分に一意的に分解されることを意味する.

ワイルドな群の表現と作用素環に関する結果で名高いのは Connes (1976) の定理である. Murray-von Neumann (1943) は無限次元のフォンノイマン環の中でも有限次元

の部分環で近似できるもの (approximately finite dimensional な環, 略して AFD 環という) を考察し, その基本性質を明らかにした. I 型環は AFD である. I 型でない AFD 環も存在する. そのような環について注目すべきは, トレース状態をもち中心が自明な環に限れば (これはフォンノイマン環の一般論からすれば極めてマイルドな仮定である), AFD 環は唯一でありそしてその唯一の環は他のどんな環にも部分環として含まれる. この意味で AFD 環はフォンノイマン環の中で I 型環に次いでシンプルな構造をもつといえる. 加えて, 一般に群 G とその表現 π に対し $\pi(G)$ が生成するフォンノイマン環は $\pi(G)'$ の可換子環 $\pi(G)''$ に等しい (二重可換子環定理) のだが, 実はどんなワイルドな群 G に対しても, その表現 π で $\pi(G)''$ が I 型でない AFD 環になるものが存在する (Glimm 1961, Maréchal 1975). AFD 環はフォンノイマン環の構造だけでなく群の表現の観点からも I 型環の後続のクラスをなすといえる. よって次の問題設定が自然である: 任意の表現 π に対し $\pi(G)''$ が AFD になるような群 G はどんなものか? もしくは $\pi(G)''$ の代わりに $\pi(G)'$ を考えてもよい. この問いに完全な解答を与えるのが Connes (1976) の定理である: 可算離散群 G が従順ならば, その任意の表現 π に対し $\pi(G)''$ と $\pi(G)'$ はともに AFD である. この定理はフォンノイマン環のいくつかの性質と AFD が同値であることを示した上, 既知の結果を組み合わせることで得られた. 中でも G の左正則表現 λ (これは $\ell^2(G)$ への表現で $\lambda(g)\delta_h = \delta_{gh}$ で定義される) について $\lambda(G)''$ が AFD であるためには G の従順性が必要であることを示した Schwartz (1963) と, 単射性とよばれるフォンノイマン環の性質 (AFD と同値であることが Connes により示された) を導入し, それがフォンノイマン環の種々の操作で閉じていることを示した羽毛田-富山 (1967) の貢献は特筆に値する.

3. 同値関係と作用素環

位相群 G の表現 π と既約表現への直積分分解 $\pi = \int_Z^{\oplus} \pi_z \, d\mu(z)$ に対し, π_z と π_w がユニタリ同値なとき z と w を同値とすることで Z 上の同値関係 $\mathcal{R}$ が定まる. この同値関係 $\mathcal{R}$ は表現 π の性質を反映すると考えられるが, 実際, 竹崎 (1963) は $\mathcal{R}$ がフォンノイマン環 $\pi(G)'$ とその部分環 $L^\infty(Z)$ の組から読み取れることを示した. 例えば Z が二点集合 $\{1,2\}$ で μ が数え上げ測度である場合, 各 $i \in \{1,2\}$ に対し G の既約表現 π_i があり π は直和 $\pi_1 \oplus \pi_2$ となるが, もし π_1 と π_2 がユニタリ同値ならば, その定義からユニタリ作用素 $U \colon \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ が存在して $\forall g \in G \; U\pi_1(g) = \pi_2(g)U$ が成り立ち, よって行列 $\left(\begin{smallmatrix} 0 & U^{-1} \\ U & 0 \end{smallmatrix}\right)$ は $\pi(G)'$ に属する. ここで π_i により G が作用するヒルベルト空間を $\mathcal{H}_i$ とかいた. 行列表示は直和分解 $\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2$ に関するものである. この行列は $\pi(G)'$ のユニタリ元であり, その共役による作用は部分環 $L^\infty(Z)$ $(= \mathbb{C} \oplus \mathbb{C})$ において座標の入れ替えを引き起こし, 特に $L^\infty(Z)$ を保存する. 一般の測度空間 (Z, μ) の場合も Z の可測構造と測度 μ を踏まえた対象を適当に導入することで同様の考察が可能である. 逆に $L^\infty(Z)$ を共役の下で保存するような $\pi(G)'$ のユニタリ元は (可換フォンノイマン環 $L^\infty(Z)$ の任意の自己同型は測度空間 (Z, μ) の自己同型からくるという事実を踏まえると) 既約表現 π_z たちの間のユニタリ同値を与えることが期待される.

フォンノイマン環と測度空間上の同値関係との関連はユニタリ表現論とは別の角度からも意識されてきた. Murray-von Neumann (1936) は具体例の構成を目的として, 測度空間への群作用からフォンノイマン環を構成する方法を導入した. 可算離散群 G と測度空間 (X, μ) への可測な作用で μ のクラスを保存するものに対し, フォンノイマン環 $G \ltimes L^\infty(X)$ が構成される. 簡単のため μ 自身が G の作用で保存される場合を考え

る．ヒルベルト空間 $\mathcal{H} = \int_X^{\oplus} \ell^2(G)\,d\mu(x)$ が定まり (これはヒルベルト空間のテンソル積 $L^2(X) \otimes \ell^2(G)$ と自然に同一視される), G はこのバンドルに X への作用と $\ell^2(G)$ への左正則表現 λ とが絡む形で作用する．正確には $g \in G$ に対し $\mathcal{H}$ のユニタリ作用素 u_g が $(u_g\xi)(x) = \lambda(g)\xi(g^{-1}x)$ ($\xi \in \mathcal{H}$, $x \in X$) で定まる．そして $f \in L^\infty(X)$ に対し $\mathcal{H}$ 上の有界線型作用素 m_f が $(m_f\xi)(x) = f(x)\xi(x)$ で定まる．これら u_g と m_f たちで生成される $\mathcal{H}$ 上のフォンノイマン環を $G \ltimes L^\infty(X)$ とかく．例えば H が可換な可算離散群で G が H に自己同型で作用するとき, 双対 $\widehat{H}$ はコンパクト群となり G は $\widehat{H}$ 上のハール測度を保存するように作用するが, この場合 $G \ltimes L^\infty(\widehat{H})$ は半直積群 $G \ltimes H$ の左正則表現 λ に付随する環 $\lambda(G \ltimes H)''$ に一致する．もし G が無限で μ を保存しかつ μ が有限測度ならば $G \ltimes L^\infty(X)$ は I 型でないフォンノイマン環になる．

環 $G \ltimes L^\infty(X)$ は作用 $G \curvearrowright (X, \mu)$ に付随するが, 自由な作用の場合, それが作用の軌道同値関係 $\{\,(gx, x) \in X \times X \mid g \in G\,\}$ にしかよらないことはよく認識されていた．実際, 二つの自由な作用 $G \curvearrowright (X, \mu)$, $H \curvearrowright (Y, \nu)$ が軌道同型ならば, つまり測度を保存する同型 $f\colon X \to Y$ が存在して測度 0 の集合を除いた後 $\forall x \in X\ f(Gx) = Hf(x)$ となるならば, f は $H \ltimes L^\infty(Y)$ から $G \ltimes L^\infty(X)$ への同型で $L^\infty(Y)$ を $L^\infty(X)$ にうつすものを誘導する (Singer 1955). Krieger (1970) は自由とは限らない作用 $G \curvearrowright (X, \mu)$ に対しその軌道同値関係からフォンノイマン環を構成する方法を導入した．これは作用が自由な場合は Murray-von Neumann の構成法に一致するものである．

Feldman-Moore (1977) は群作用の軌道同値関係を含む対象として測度付き離散同値関係を導入し, それからフォンノイマン環を構成し Krieger の構成法を一般化した．さらにこのようにして得られるフォンノイマン環を公理化し, この構成法が極めて自然なもの (つまり圏同値を与える) であることを示した．Hahn (1979) はこのフォンノイマン環からできる測度付き離散同値関係と上で引用した竹崎 (1963) による同値関係との関連を明らかにした．竹崎の同値関係は一般にフォンノイマン環 M とその masa A に対して定義されるもので, 測度空間 (Z, μ) を用いて $A = L^\infty(Z)$ とかいたとき (これは一般の可換フォンノイマン環 A に対して可能である) Z 上の同値関係として定義される．Feldman-Moore はフォンノイマン環 M とその masa A で正則性と条件付き期待値の像であるという二つの性質をもつものからなる組と, 測度付き離散同値関係 (とその $\mathbb{T}$-値 2-コサイクルとよばれる付加的対象との組) との間に一対一対応があることを示した．このとき A は M のカルタン部分環であるという．Hahn が示したのはこの測度付き離散同値関係と竹崎の同値関係との間の同型である．

ここで同値関係から (フォンノイマン) 環を構成する方法について簡単に述べる．X を三点集合 $\{1, 2, 3\}$ とし, X 上の同値関係として三点すべてが互いに同値になるものを考える．一般に集合 X 上の同値関係 $\mathcal{R}$ は $X \times X$ の部分集合で三つの性質 (反射律・対称律・推移律) を満たすものとして定義されるが, 今の場合 $\mathcal{R}$ は $X \times X$ に一致する．$\mathcal{R}$ 上の複素数値関数を $\mathcal{R}$ の元を成分とする 3×3 行列に自然に対応させる．一方 $\mathcal{R}$ には $(x, y)(y, z) = (x, z)$ ($x, y, z \in X$) により部分的に定まる積の構造 (亜群の構造) が入り, これに基づき $\mathcal{R}$ 上の複素数値関数 f, g に対してたたみ込み $f * g$ が定義される: $\gamma \in \mathcal{R}$ に対し $(f * g)(\gamma) = \sum_{\delta_1\delta_2 = \gamma} f(\delta_1)g(\delta_2)$. このたたみ込みによる積は 3×3 行列の側ではちょうど行列の積に対応する．これで環 $M_3(\mathbb{C})$ が得られた．$\mathcal{R}$ の対角部分集合は $\mathcal{R}$ の自明な部分同値関係に対応するが, ここにサポートをもつ関数は $M_3(\mathbb{C})$ の対角行列に対応しそれらは部分環 A をなす．この組 $A \subset M_3(\mathbb{C})$ が Feldman-Moore

の対応で現れるフォンノイマン環の組である. Feldman-Moore は X を標準ボレル空間, μ を X 上の測度として, X 上の同値関係 $\mathcal{R}$ で $X \times X$ の可測部分集合であり, 各同値類が可算であって, 然るべき意味で μ を保存するようなものを測度付き離散同値関係とよんだ. このとき $\mathcal{R}$ 上の測度そしてヒルベルト空間 $L^2(\mathcal{R})$ が定まり, 上の構成法を一般化する形で $L^2(\mathcal{R})$ 上のフォンノイマン環の組 $L^\infty(X) \subset L\mathcal{R}$ が得られる.

具体的な群作用に対する結果としては $\mathbb{Z}$ など可換群の作用に関する Dye (1959/63) の結果が基本的である. 先立って Singer (1955) は, 環 $G \ltimes L^\infty(X)$ のユニタリ元で部分環 $L^\infty(X)$ を共役で保存するものは, 測度空間 (X, μ) の自己同型 φ で (測度 0 の集合を除いた後) $\forall x \in X \; \exists g \in G \; \varphi(x) = gx$ となるようなものと一対一に対応することを示していた. これを受け Dye はそのような自己同型からなる群 (これを作用 $G \curvearrowright (X, \mu)$ の充足群という) に注目し, Murray-von Neumann (1943) がフォンノイマン環に対して導入した性質の類似を充足群に対して導入し考察した. 例えば AFD の類似を定式化し, 測度 μ がアトムをもたず作用で保存されエルゴード的な場合に限ると (これもまたマイルドな仮定である), 充足群が AFD に対応する性質をもつ作用 (このような作用は超有限であるという) はすべて互いに軌道同型であることを示した. Connes の定理を述べたときの問題と同様, どんな可算群のどんな作用が超有限になるかが自然な問題設定となる. 可換群および多項式増大の群による任意の作用が超有限になることが Dye (1963) によって示され, その後, 可解群 (Connes-Krieger 1977) そしてより一般に従順群による任意の作用もまた超有限になることが示された (Ornstein-Weiss 1980, Connes-Feldman-Weiss 1981). 群の従順性はそれが超有限な自由作用をもつために必要な条件であり, 最後の結果により問題は解決した.

4. 変換亜群

Mackey (1949/51) による半直積群のユニタリ表現の話に戻る. 位相群 G は位相群 K と可換位相群 N による半直積 $K \ltimes N$ として表されるとする. G の既約表現 π をとる. N は可換なので制限 $\pi|_N$ は Hahn-Hellinger の定理のように $\widehat{N}$ 上の測度を用いて記述されるが, 今の場合 π が既約であることから $\widehat{N}$ 上の測度 μ と自然数または可算無限の濃度 d が存在して $\pi|_N$ は μ に付随する N の表現 $\int_{\widehat{N}}^{\oplus} \chi \, d\mu(\chi)$ を d 個直和したものになる. K の元の共役により N の表現が色々得られるがそれらはすべてユニタリ同値なので, 作用 $K \curvearrowright \widehat{N}$ は μ のクラスを保存する. さらに π が既約であることから μ は作用 $K \curvearrowright \widehat{N}$ に関してエルゴード的である (つまり K-不変な可測部分集合は測度 0 になるか, もしくはその補集合が測度 0 になる). Mackey ははじめに, 動機付けとなった例の多くがそうであったため, 作用 $K \curvearrowright \widehat{N}$ に関してエルゴード的な測度は一つの軌道にサポートをもつものに限られるような状況を考察した. これは $\widehat{N}$ の可測部分集合で K の作用の各軌道とちょうど一点で交わるようなものが存在することと同値である. 測度 μ は一つの軌道にサポートをもつとし, その軌道の一点 x をとる. 点 x を固定する K の元全体を L とかくと, 軌道は商 K/L と同一視され, そして作用 $K \curvearrowright (\widehat{N}, \mu)$ は左かけ算による作用 $K \curvearrowright (K/L, \mu)$ と同一視される. 点 x は $\widehat{N}$ の元なので N の一次元表現を定めるが, L が x を固定することから, この表現は $L \ltimes N$ の表現 τ に拡張される. ここで L の d 次元既約表現 ρ を用意すると $L \ltimes N$ の d 次元既約表現 $\tau \otimes \rho$ を得る. これから誘導される G の表現は既約であり, その N への制限は N の表現 $\int_{\widehat{N}}^{\oplus} \chi \, d\mu(\chi)$ を d 個直和したものになる. Mackey は任意の π がこのようにして μ と ρ から構成されることを示し, 組 (μ, ρ) と G の表現の同値類がどう対応するかも明らかにした.

次に考察の対象としたのは, 作用 $K \curvearrowright \widehat{N}$ に対する仮定が満たされない場合である. 例を一つ挙げる. 無理数 $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ を固定し, 半直積群 $\mathbb{R} \ltimes \mathbb{C}^2$ を関係式 $t(z, w)t^{-1} = (e^{it}z, e^{i\alpha t}w)$ で定義する. 誘導される作用 $\mathbb{R} \curvearrowright \widehat{\mathbb{C}^2} \simeq \mathbb{C}^2$ は $t(u, v) = (e^{-it}u, e^{-i\alpha t}v)$ となる. トーラス $T = \{\, |u| = 1, |v| = 1 \,\}$ は $\mathbb{R}$-不変であり, そこへの $\mathbb{R}$ の作用は無理数 α の傾きをもつフローになる. T 上のルベーグ測度は $\mathbb{R}$ の作用に関して不変かつエルゴード的だが T の中にはいくつもの軌道がある. 群 $\mathbb{R} \ltimes \mathbb{C}^2$ はマウトナー群とよばれ, ワイルドな連結可解リー群の例としてよく知られている. このような半直積群に対しても Mackey の対応付けを拡張するために導入されたのが変換亜群である.

Mackey (1966) は群 G に対し, G の部分群 H と G の推移的作用 $G \curvearrowright G/H$ の間に一対一対応があることに注目し, G の部分群に対して定式化される対象を推移的作用の言葉で言い換え, それを一般の作用 $G \curvearrowright X$ について定式化・検証することを提唱する. これに基づき Mackey は一般の作用 $G \curvearrowright X$ のことを G の仮想部分群とよんだ. 例えば H から群 L への準同型を推移的作用 $G \curvearrowright G/H$ を用いて定式化することができれば, 一般の作用 $G \curvearrowright X$ から L への準同型とよぶべき対象の定式化が可能になる. H から L への準同型は, そのグラフが $G \times L$ の部分群になるため, $G \times L$ の推移的作用と同一視される. この $G \times L$ の推移的作用は実は作用 $G \curvearrowright G/H$ を用いて特徴付けることができ, その特徴付けにおいて作用 $G \curvearrowright G/H$ を一般の作用 $G \curvearrowright X$ に置き換えたものは $G \times L$ の作用である性質を満たすものになる. これが $G \curvearrowright X$ から L への準同型とよぶべきものとなる. しかし, やはり準同型とよぶからには前者から後者に向かう写像の形をしている方が親しみやすい. その結果到達したのがコサイクルとよばれる写像である. これは写像 $\alpha\colon G \times X \to L$ で等式 $\alpha(gh, x) = \alpha(g, hx)\alpha(h, x)$ を満たすものとして定義される. Mackey は注意深い考察を積み重ねた上でこのコサイクルが作用 $G \curvearrowright X$ から L への準同型とよぶべき対象であることを主張する (実際には G, L は位相群で X は測度空間であって作用は測度のクラスを保存するなどといった付加構造を考慮しつつ, 準同型がどう定義されるべきかを論じている). 準同型 $\pi\colon H \to L$ に対しては, 商写像の切断 $s\colon G/H \to G$ をとることでコサイクル $\alpha_\pi\colon G \times G/H \to L$ が等式 $\alpha_\pi(g, x) = \pi(s(gx)^{-1}gs(x))$ で定まる.

部分群 H と推移的作用 $G \curvearrowright G/H$ の間の一対一対応は, より正確には H の G での共役類と G の作用の同型類との間で定まる. 準同型 $\pi\colon H \to L$ をそのグラフと同一視しそれを $G \times L$ の推移的作用に対応させた時点で, 相手にすべきは π のグラフ自身でなくその $G \times L$ での共役類であり, これと一対一に対応するのは π ではなく π の L による共役類である. そして実はこのような共役類と一対一に対応するのはコサイクル α_π ではなくその同値類である. 二つのコサイクル $\alpha, \beta\colon G \times X \to L$ が同値であるとは, 写像 $\varphi\colon X \to L$ が存在して等式 $\alpha(g, x) = \varphi(gx)\beta(g, x)\varphi(x)^{-1}$ が成り立つときをいう. すると写像 $\pi \mapsto \alpha_\pi$ は H から L への準同型の L による共役類の集合から $G \times G/H$ から L へのコサイクルの同値類の集合への全単射を誘導し, さらに α_π の同値類は切断 $s\colon G/H \to G$ のとり方によらない.

Mackey はコサイクルが自然に現れる具体例をいくつか示しているが, 本稿に最も関わるのは群作用の軌道同型からくるものである. 二つの自由な群作用 $G \curvearrowright X$, $H \curvearrowright Y$ が軌道同型ならば, 同型 $f\colon X \to Y$ が存在して $\forall x \in X\ f(Gx) = Hf(x)$ となるが, このとき (H の作用が自由なので) 写像 $\alpha\colon G \times X \to H$ が等式 $f(gx) = \alpha(g, x)f(x)$ で定まり α はコサイクルになる.

コサイクルが準同型になるように $G\times X$ に代数構造を入れようと思うと変換亜群の定義に到達する. 一般に群 G が集合 X に作用しているとき, 集合 $G\times X$ には部分的に定まる積 $(g,hx)(h,x)=(gh,x)$ により亜群の構造が入る. これを作用 $G\curvearrowright X$ に付随する変換亜群といい $G\ltimes X$ とかく. G と X に付加構造が備わっていれば $G\ltimes X$ にも構造が備わる. 例えば G が測度空間 (X,μ) に μ のクラスを保存するように作用していると測度付き変換亜群 $G\ltimes(X,\mu)$ が定義される. コサイクル $\alpha\colon G\times X\to L$ とは亜群 $G\ltimes X$ から群 L への亜群準同型 (つまり積を保存する写像) のことである. 二つの自由な群作用 $G\curvearrowright X$, $H\curvearrowright Y$ が軌道同型なとき, 前の段落の f と α をとることで変換亜群の同型 $F\colon G\ltimes X\to H\ltimes Y$ が $F(g,x)=(\alpha(g,x),f(x))$ により得られる.

さて目標は Mackey による半直積群の表現の記述を一般化することであった. ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ への表現とはユニタリ群 $U(\mathcal{H})$ への準同型のことなので, G の部分群 H に対し H の表現を亜群 $G\ltimes G/H$ の表現に対応させることができる. そして H の表現から誘導される G の表現の定義に従って, 測度付き亜群 $G\ltimes(X,\mu)$ の表現に対しそれから誘導される G の表現が定義される (測度が出てくるのは閉部分群 H から誘導される G の表現を定義する際 G/H 上の測度を必要とするためである). このような定式化を経た後, 半直積群 $G=K\ltimes N$ に対し, $\widehat{N}$ 上の測度 μ で K の作用がそのクラスを保存しかつ作用に関してエルゴード的なものと亜群 $K\ltimes(\widehat{N},\mu)$ の既約表現からなる組が G の既約表現と一対一に対応する (Ramsay 1976). しかしながらマウトナー群のように作用 $K\curvearrowright\widehat{N}$ の軌道の様子が複雑な場合, 亜群 $K\ltimes(\widehat{N},\mu)$ の表現がワイルドな対象になってしまうため, この対応でもって G の表現を満足に記述できたとは必ずしもいえない.

5. 群作用の軌道同型と剛性

Mackey の仮想群のアイデアは群作用のエルゴード理論に大きな影響を及ぼす. よく知られているように種数 $g\geq 2$ の向き付け可能な閉曲面 S には双曲計量が入り, 普遍被覆を考えることにより基本群 $\pi_1(S)$ から双曲平面の等長変換群 $PSL_2(\mathbb{R})$ への単射準同型で, 像が $PSL_2(\mathbb{R})$ で離散的かつココンパクト (つまりコンパクト商をもつ) なものが得られる. 逆にこのような準同型は S 上の双曲計量を定める. このような準同型全体には $PSL_2(\mathbb{R})$ が共役で作用するが, それにより準同型は連続に変形する. 実は他にも連続な変形の仕方があり, そのような変形は $6g-6$ 個の実数でパラメータ付けられる. $6g-6$ という数は $\pi_1(S)$ が $2g$ 個の生成元 $a_1,\ldots,a_g,b_1,\ldots,b_g$ と唯一の関係式 $[a_1,b_1]\cdots[a_g,b_g]=e$ からなる表示をもつことと $PSL_2(\mathbb{R})$ の元が三つの実数でパラメータ付けられることから予想される値である. この $6g-6$ 次元の空間は S のタイヒミュラー空間としてよく知られている. 一方 $PSL_2(\mathbb{R})$ を他の単純リー群に取り替えると異なる現象が起こる (Weil の局所剛性 1960/62): G を $PSL_2(\mathbb{R})$ と局所同型でなくコンパクトでない連結単純リー群とし Γ を G の離散部分群でココンパクトなものとしたとき, この性質を保ったまま Γ を G の中で連続に変形する方法は G の元の共役によるものに限られる. この主張はさらに強められる (Mostow の強剛性 1973): G_1, G_2 を $PSL_2(\mathbb{R})$ と局所同型でなく, 中心が自明でありかつコンパクトでない連結単純リー群とし Γ_1, Γ_2 をそれぞれ G_1, G_2 の離散部分群でココンパクトなものとする. このとき Γ_1 から Γ_2 への任意の同型は G_1 から G_2 への同型に拡張される. この結果, 特に 3 次元以上のコンパクトかつ連結な双曲多様体はその等長類が基本群から決まるという著しい剛性をもつ. Mostow の強剛性はより一般に Γ_i が G_i の格子部分群であるとい

う仮定の下でも成り立つ (Prasad 1973, Margulis 1975). 一般に局所コンパクトで可分な位相群 G に対し, その離散部分群 Γ で商 G/Γ が左かけ算に関して G-不変な確率測度をもつようなものを G の格子部分群という. 例えば $SL_n(\mathbb{Z})$ は $SL_n(\mathbb{R})$ の格子部分群であり, $n \geq 2$ ならばこれはココンパクトでない格子部分群である.

Mackey の仮想群のアイデアに基づいて強剛性定理を群作用の枠組みで一般化したのが Zimmer (1980) である. Zimmer が実際に一般化したのは上で引用した Margulis の定理であり, そのため対象とするリー群は実階数が 2 以上のものに限られる ($SL_n(\mathbb{R})$ の実階数は $n-1$ である). G_1, G_2 をそのようなリー群で中心が自明なものとすると Zimmer の定理は次のように述べられる: $G_i \curvearrowright (X_i, \mu_i)$ を標準確率空間への作用で μ_i を保存するものとする (標準確率空間とは標準ボレル空間とその上の確率測度からなる測度空間を意味する). 任意の変換亜群の同型 $F\colon G_1 \ltimes (X_1, \mu_1) \to G_2 \ltimes (X_2, \mu_2)$ に対し $F(g,x)$ の G_2-成分を $\alpha(g,x)$ とかくことでコサイクル $\alpha\colon G_1 \times X_1 \to G_2$ を得るが, このとき α は G_1 から G_2 への同型に付随するコサイクルと同値になる. この結論は仮想部分群の間の同型 F が G_1 から G_2 への同型に “拡張される” ことを意味する. 実際 X_i を商空間 G_i/Γ_i とし G_i を X_i に左かけ算で作用させたときの Zimmer の定理の主張は強剛性定理と同値になる. さらに Zimmer の定理の結論は二つの作用が共役であることを導く. つまり同型 $\pi\colon G_1 \to G_2$ と同型 $f\colon X_1 \to X_2$ で測度を保存するものが存在して等式 $f(gx) = \pi(g)f(x)$ が成り立つ. よって作用として自由なものを考えれば, 対象とするリー群の二つの作用が軌道同型ならば実は共役であるという剛性が従う.

さて別の群のクラスを考える. S を種数 g の向き付けられた閉曲面とする. S から S への同相写像で向きを保つものからなる群を考える (積は写像の合成で定める). その群の元で同相写像の連続変形 (アイソトピー) でうつり合うものを同一視して得られる群を S の写像類群といい $\mathrm{Mod}(S)$ とかく. $g \geq 2$ のとき S のタイヒミュラー空間 $\mathcal{T}(S)$ は S 上の双曲計量の空間と見なせるが, 正確には S の恒等写像にアイソトピックな同相写像でうつり合う二つの計量を同一視している. $\mathrm{Mod}(S)$ は $\mathcal{T}(S)$ に自然に作用し, その商空間は S 上の双曲計量のモジュライ空間とよばれる. 作用 $\mathrm{Mod}(S) \curvearrowright \mathcal{T}(S)$ は固有不連続であって $\mathcal{T}(S)$ は $\mathbb{R}^{6g-6}$ に同相であることが知られており, よって $\mathrm{Mod}(S)$ はモジュライ空間のオービフォルド基本群と見なせる. $g = 1$ つまり S がトーラス T のとき, 線型作用からくる作用 $SL_2(\mathbb{Z}) \curvearrowright (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^2$ は同型 $\mathrm{Mod}(T) \simeq SL_2(\mathbb{Z})$ を導く. このことから一般の曲面の写像類群と $SL_n(\mathbb{Z})$ もしくは $SL_n(\mathbb{R})$ との間に類似性を見出すことができる. 例えば $\mathbb{Z}^2$ の射影類はトーラス T 上の単純閉曲線のアイソトピー類と一対一に対応し $SL_2(\mathbb{Z})$ の射影類全体への作用は $\mathrm{Mod}(T)$ のアイソトピー類全体への作用に対応する. よって曲面 S 上の単純閉曲線のアイソトピー類は $\mathbb{Z}^n$ もしくは $\mathbb{R}^n$ の射影類の類似と見なせよう.

Mostow の強剛性の証明における重要なステップは, 格子部分群の間の同型から球面型ビルディングとよばれるリー群に付随する単体複体の間の同型を構成することであった. 例えば $\mathbb{R}^n$ のプロパーな部分空間を頂点とし, 包含関係 $V_1 \subset \cdots \subset V_k$ を満たす相異なる部分空間の族 $\{V_1, \ldots, V_k\}$ を単体とすることで単体複体 Δ が得られる. $PSL_n(\mathbb{R})$ は Δ に自然に作用し, Δ の任意の自己同型は $PSL_n(\mathbb{R})$ の元からくることが知られている. $PSL_n(\mathbb{R})$ の部分群で Δ の頂点 v を用いて $\{\, h \in PSL_n(\mathbb{R}) \mid hv = v \,\}$ の形にかけるものは放物型であるとよばれるが, Δ は放物型部分群の包含関係からも実現できる. これを拡張するように Tits (1977) は Δ の類似 (球面型ビルディングとよばれる) を一般の単純リー群に対して導入し, それらの間の同型を記述した. 一方, 写像類

群に対するビルディングとでもよぶべきものが Harvey (1981) により導入されたカーブ複体である. これは曲面 S に対して定義される単体複体であって, その頂点は S 上の 0-ホモトピックでない単純閉曲線のアイソトピー類であり S 上で互いに交わらないような代表をもつときに単体を張る. Ivanov (1997) はカーブ複体の自己同型を記述し, それを応用して写像類群に対するモストウ型強剛性を示した: S から S への (向きを保つとは限らない) 同相写像のアイソトピー類からなる群を $\mathrm{Mod}^*(S)$ とかく. これは $\mathrm{Mod}(S)$ を指数 2 の部分群として含む. S の種数 g が 3 以上のとき $\mathrm{Mod}^*(S)$ の有限指数部分群の間で定義される任意の同型は $\mathrm{Mod}^*(S)$ の元による共役である (よって $\mathrm{Mod}^*(S)$ の自己同型に拡張される). $g = 2$ のときはこの主張は厳密には正しくないがほぼ同様の主張が成り立つ. 境界をもつ曲面に対しても同様に, 境界成分の個数を p として $3g + p - 4 > 0$ ならば写像類群の強剛性が成り立つ (Korkmaz (1999), Luo (2000) によるカーブ複体の自己同型の記述による).

Zimmer の定理と同様, 写像類群の強剛性も群作用の枠組みで一般化される (木田 2010): $G_1 = G_2 = \mathrm{Mod}^*(S)$ とおき $G_i \curvearrowright (X_i, \mu_i)$ を標準確率空間への作用で測度を保存するものとする. このとき任意の変換亜群の同型 $F\colon G_1 \ltimes (X_1, \mu_1) \to G_2 \ltimes (X_2, \mu_2)$ は G_1 から G_2 への同型に “拡張される” (これもまた S によっては厳密には正しくないがその場合でもほぼ同様の主張が成り立つ). よって $\mathrm{Mod}^*(S)$ の二つの軌道同型な自由作用は共役である. これは $\mathbb{Z}$ をはじめ無限従順群によるエルゴード的な自由作用がすべて互いに軌道同型であるという事実と極めて対照的であり, この結果, 写像類群はこのような剛性を満たす可算群の最初の例となった. さらにこの変換亜群の強剛性は (Furman (2001) による事実を経て) 次を導く: G を局所コンパクトかつ可分な位相群で $\mathrm{Mod}(S)$ を格子部分群として含むものとする. このとき指数が 2 以下の G の閉部分群 G_0 と G_0 のコンパクトな正規部分群 K が存在して G_0 は半直積群 $\mathrm{Mod}(S) \ltimes K$ の形をしている. もし写像類群を格子部分群として含むような位相群で自然なものが見出せれば, リー群の格子部分群の研究においてそれを含むリー群が重要な役割を果たすように, 写像類群のより深い理解につながることが期待されるが, この結果は (残念ながら?) そのような位相群は存在しないことを主張する.

近年は具体的な群作用に対し, 付随する変換亜群の部分亜群やフォンノイマン環の部分環の位置を群のユニタリ表現を通して特定する技術の発達が目覚ましい. その結果, 多くの具体例に対してフォンノイマン環の間の非同型を示したり, 特殊な具体例に対して剛性を示したりすることが可能になった. 講演ではこの話題についても触れたい.

参考文献

[1] A. Furman, A survey of measured group theory, in *Geometry, rigidity, and group actions*, 296–374, Univ. Chicago Press, Chicago and London, 2011.

[2] D. Gaboriau, Orbit equivalence and measured group theory, in *Proceedings of the ICM 2010. Vol. III*, 1501–1527, Hindustan Book Agency, New Delhi, 2010.

[3] A. Ioana, Rigidity for von Neumann algebras, preprint, to appear in *Proceedings of the ICM 2018*, arXiv:1712.00151.

[4] 小沢登高, 離散群と作用素環, 数学 **61** (2009), 337–351.

[5] S. Popa, Deformation and rigidity for group actions and von Neumann algebras, in *Proceedings of the ICM 2006. Vol. I*, 445–477, Eur. Math. Soc., Zürich, 2007.

[6] S. Vaes, Rigidity for von Neumann algebras and their invariants, in *Proceedings of the ICM 2010. Vol. III*, 1624–1650, Hindustan Book Agency, New Delhi, 2010.