境界付きリーマン多様体の崩壊

山口 孝男 (京大理)*

1. はじめに

ガウス・ボンネの定理に代表されるように、リーマン多様体の曲率と位相の間には密接な関係があり、これを解明することは微分幾何学における主問題の一である。Gromov-Hausdorff 収束理論は、この分野における有力な研究手法を与える。例えば閉じたリーマン多様体で、曲率（断面曲率やリッチ曲率など）が一様に下に有界で直径が一様に上に有界なリーマン多様体の族を考察すると、そのプレコンパクト性により、その族に属する多様体の種々の不変量の一様有界性が期待される。Gromov-Hausdorff 収束理論により、まさにこの様な種々の不変量の一様有界性や、更に、収束を通じたリーマン多様体の位相構造のより深い理解が可能となる。例えば、３次元閉リーマン多様体の崩壊理論は、ペレルマンの幾何化予想解決の仕事の中で、３次元多様体のリッチ・フローの下での崩壊部分の位相構造を決定するために本質的に用いられた。本講演では、これまでの閉リーマン多様体の崩壊理論と関連する研究について簡潔に概観した後、境界付きリーマン多様体に関する最近の研究の進展（[36], [37], [20]) について紹介する。

2. 背景

閉リーマン多様体の崩壊理論の研究は、断面曲率の上下からのバウンドの下で Cheeger-Fukaya-Gromov ([7]) により一般理論が構築された。この理論においては、極限空間の特異点は、ベキ零リー群による（大域的固定点をもたない）等長的群作用の商空間から生じるという基本的特徴がある。

一方、断面曲率の下からのバウンドの下での崩壊においては、極限空間の特異点は群作用から生じるというより、多くの場合は空間自身の歪みの結果、曲率が無限大に爆発する結果として現れる。従って断面曲率の下からのバウンドの下での崩壊理論の構築は、より広い崩壊現象を解明することを可能にする。例えば Chern-Weil 理論により、断面曲率の上下からのバウンドの下で崩壊する多様体のオイラー数やポントリャーギン数などの特性数は全て消える。従って 4 次元単連結閉多様体はその様に崩壊することは出来ないが、S^4, $\mathbb{C}P^2$, $S^2 \times S^2$ やそれらの連結和は断面曲率の下からのバウンドの下で崩壊可能である。また断面曲率の下からのみのバウンドを考察することは、極限空間として現れるアレクサンドロフ空間の幾何学の観点からも自然である。

断面曲率の下からのバウンドの下での崩壊理論においては先ず、一次ベッチ数や基本群構造がファイバー束定理の枠組みで決定された（[32], [10])。またほぼ同時期に極限空間としてのアレクサンドロフ空間の幾何学の土台が整備され ([10])、その後３次元多様多様体や４次元多様体の崩壊理論へと進展した ([28],[34])。これらの研究を通じて重要となるのは、位相的安定性定理 ([25] やファイバー束定理 ([32], [33]), 一般化されたマルグリスの補題 ([10], [16], その後 [17] によりリッチ曲率に拡張された), アレクサンドロフ空間の特異点の次元 ([3], [24]) などである。

* 〒 606-8502 京都市左京区北白川追分町　京都大学大学院理学研究科
e-mail: takaoy@math.kyoto-u.ac.jp

一般次元の閉リーマン多様体の崩壊現象については、崩壊多様体の位相構造の詳細についてはまだ未解明であるものの、次の様な事が解明されている：

- 本質的被覆という被覆の一様有限性の研究（これはGromovのベッチ数一様有界性[12]の別証明を与える）([35])
- 極限空間のアレクサンドロフ空間の良い被覆の存在および一様有限性の研究、リプシッツ・ホモトピー収束の研究([22], [23]).

また3次元アレクサンドロフ空間の崩壊理論も出来ており([19], [20])、特に境界をもつ3次元アレクサンドロフ空間の崩壊理論は本講演の境界付きリーマン多様体の崩壊と関連がある。

一方、リッチ曲率の下からのバウンドの下での崩壊理論は、Cheeger-Colding([4], [5],[6])によって突破口が開かれ、近年極限空間の特異点解析における進展があった（[9], [8]）。最近では曲率次元条件を満たすRCD-空間の幾何解析との絡みで、幾何解析的な研究が進展している。

3. Gromov-Hausdorff収束

距離空間Z内のコンパクト部分集合A, Bのハウスドルフ距離$d_H^Z(A,B)$は, Aのϵ-近傍がBを含み、Bのϵ-近傍がAを含むような$\epsilon>0$の下限として定まる。コンパクト距離空間の等長類全体の集合を$\mathcal{C}$と表す。$\mathcal{C}$の元X, Yに対してGromov-Hausdorff距離$d_{GH}(X,Y)$は次で定められる：

$$d_{GH}(X,Y)=\inf_{Z,f,g} d_H^Z(fX,gY),$$

ここで$f:X\to Z$, $g:Y\to Z$は等長埋め込みでZはそのようなf,gが存在するような全ての距離空間を走る。

定理 3.1. [14](プレコンパクト性定理）n, $\kappa\in\mathbb{R}$, $d>0$に対して、

$$\text{リッチ曲率}\geq(n-1)\kappa,\quad \text{直径}\leq d$$

を満たすn次元の閉じたリーマン多様体の等長類全体の集合は　$(\mathcal{C},d_{GH})$において相対コンパクトである。

この定理でリッチ曲率の下からバウンドは、空間の体積をはじめとする幾何学的不変量の一様有界性を保証するために用いられる。これは次のBishop-Gromovの体積比較定理の帰結である。

定理 3.2. (Bishop-Gromovの体積比較定理）n次元完備リーマン多様体Mのリッチ曲率が$(n-1)\kappa$以上であるとき、Mの同心距離球$B(p,r)$, $B(p,R)$, $r<R$, の体積比は 定曲率κのn次元単連結完備リーマン多様体$\mathbb{M}_\kappa^n$の対応する体積比以下である。すなわち次が成り立つ；

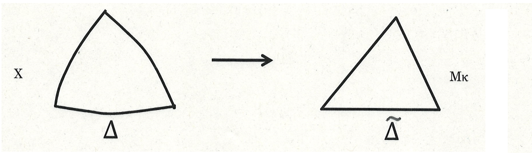
$$\frac{\mathrm{vol}B(p,R)}{\mathrm{vol}B(p,r)}\leq\frac{v_\kappa^n(R)}{v_\kappa^n(r)},$$

ここで$v_\kappa^n(r)$は$\mathbb{M}_\kappa^n$内のr-距離球の体積を表す。

我々の主な興味は断面曲率の下限と多様体位相の関係にある。そこで M_i を n 次元の閉じたリーマン多様体の列で

$$\text{断面曲率} \geq \kappa, \quad \text{直径} \leq d$$

なる無限列とする。プレコンパクト性定理より M_i はGromov-Hausdorff距離に関してあるコンパクト距離空間 X に収束すると仮定してよい。このとき極限空間は, 次元 n 以下で曲率 $\geq \kappa$ なる**アレクサンドロフ空間**と呼ばれる距離空間になる。すなわち X の任意の任意の2点は最短線で結ばれ、X の任意の点 p の近傍 U が存在して、U 内の任意の最短測地三角形 Δ に対して $\mathbb{M}^2_\kappa$ 内の測地三角形 $\tilde{\Delta}$ を Δ の各辺の長さと等しい辺の長さをもつものとするとき、自然な対応 $\Delta \to \tilde{\Delta}$ が1-リプシッツ写像になる。



4. アレクサンドロフ空間

M を断面曲率が下に有界なリーマン多様体とする。M が境界をもたない場合や、境界があってもその第2基本形式が0以上であれば M はアレクサンドロフ空間である。またユークリッド空間内の凸集合の境界、閉リーマン多様体のコンパクト等長変換群による商空間など、すべてアレクサンドロフ空間である。アレクサンドロフ空間の幾何学については、[3], [2] が基本的文献である。

X を曲率が κ 以上の完備なアレクサンドロフ空間とするとき、リーマン幾何におけるトポノゴフの比較定理との類似で、前節の最後に述べた局所的な曲率条件は大域的に成り立つ。ここでは常に有限次元の完備なアレクサンドロフ空間のみ扱い、$k = \dim X$ とおく。

X の点 p から出る2本の最短測地線 α, β の間の角度 $\angle_p(\alpha, \beta) \in [0, \pi]$ が自然に定まる。 p から出る全ての最短測地線全体の集合に角度 $\angle_p = 0$ により同値関係を入れ、$\angle_p$ により距離を入れて、これを完備化した空間を Σ_p と表し、p における**方向の空間**と呼ぶ。Σ_x は $(k-1)$-次元の曲率が1以上のコンパクトなアレクサンドロフ空間となる。

p における**接錘 (tangent cone)** とは、Σ_p 上のユークリッド錘であり $T_p(X)$ と表される。$T_p(X)$ は p における X のブロー・アップ極限に等長的になる：

$$T_p(X) = \lim_{r \to 0} \left(\frac{1}{r} X, p \right),$$

ここで $\frac{1}{r}X$ は X の距離を $\frac{1}{r}$ 倍リスケールした距離空間を表し、極限は点付きGromov-Hausdorff 収束に関するものである。

X の境界 ∂X が、 Σ_x が境界をもつような点 $x \in X$ 全体の集合として定義される。1次元コンパクトなアレクサンドロフ空間は閉区間または円周に等長的なので、次元に関して帰納的に ∂X が定まる。X が境界をもつとき、そのダブル $D(X)$ が多様体のときと同様にして、X の二つのコピーの境界に沿った貼り合わせとして定義される：

$$D(X) = X \amalg_{\partial X} X.$$

$D(X)$ も曲率が κ 以上のアレクサンドロフ空間となる ([25])。.
X の点 x は $T_x(X)$ が $\mathbb{R}^k$ に等長的であるとき**正則点**と呼ばれ、そうでないとき**特異点**と呼ばれる。X の特異点全体の集合を X^{sing} と表す。また X の内部 $X \setminus \partial X$ を $\mathrm{int}X$ と表す。

定理 4.1 ([3], cf. [24])**.** $\mathrm{int}X$ において特異点集合 X^{sing} はハウスドルフ次元に関して余次元 2 以上をもつ：

$$\dim_H(X^{\mathrm{sing}} \cap \mathrm{int}X) \le k-2.$$

次の安定性定理はリーマン多様体の収束・崩壊理論において重要である。

定理 4.2. (位相安定性定理）([25], [26], cf. [15]) 曲率 $\ge \kappa$ なる k 次元コンパクト・アレクサンドロフ空間の無限列 X_i が k 次元コンパクト・アレクサンドロフ空間に Gromov-Hausdorff 収束するとき、十分大きな i に対して X_i は X に同相である。

系 4.3. (1) X の任意の点 p の回りの十分小さい距離球は接錐 $Tp(X)$ に同相である。
(2) X は位相的滑層分割をもつ：$X = X^0 \supset X^1 \supset \cdots \supset X^m = \emptyset$.

次にアレクサンドロフ空間の特異点解析で重要な役割を果たす極集合 (extremal subset）について述べる。アレクサンドロフ空間 X の閉部分集合 E が極集合であるとは、任意の点 $q \in X \setminus E$ からの距離関数 $f = \mathrm{dist}_q$ の E への制限が $p \in E$ で極小であるとき、p において f が増える方向が存在しないとき、すなわち、 $df_p(\xi) \le 0$ が全ての $\xi \in \Sigma_p(X)$ に対して成り立つ場合を云う ([27]).
アレクサンドロフ空間の境界、位相的滑層分割の各ストラータなどは極集合の例である。直感的には極集合とはアレクサンドロフ空間の端に位置する集合である。

定理 4.4 ([27])**.** E が X の極集合であるとき、

(1) E は全準測地的である。即ち、E の任意の互いに十分近い二点は E に含まれる X の準測地線で結ばれる。準測地線は測地線の拡張概念である ([**?**]).

(2) E は位相的滑層分割をもつ.

コンパクト群 G が X に等長的に作用するとき、商空間 X/G もアレクサンドロフ空間になる ([3])。 F を G-固定点集合とし、$\pi : X \to X/G$ を射影とする。次は有用である。

命題 4.5 ([27])**.** $\pi(F)$ は X/G の極集合である。

5. 境界付きリーマン多様体の拡張

境界付きリーマン多様体の崩壊現象の研究は、J. Wong [30], [31] による仕事が出発点となった。滑らかな境界をもつ平面上の閉領域の例からも分かる通り、境界付きリーマン多様体の収束や崩壊の研究においては、境界の挙動、すなわち境界の第 2 基本形式に関する条件を設定しておくことが不可欠である。[30] において、境界の第 2 基本形式の上下からのバウンドと内部の断面曲率の下からのバウンドの下で、境界にあるワー

プト・シリンダーを張り合わせることにより、境界を越えた拡張のプロセスが導入された。始めにそれについて触れておく。

$n \geq 2,\, \kappa \in \mathbb{R},\, \lambda \geq 0$ に対して、次の条件を満たす n 次元境界付き完備リーマン多様体の等長類の集合 $\mathcal{M}(n,\kappa,\lambda)$ を考える：

$$\mathcal{M}(n,\kappa,\lambda) = \{\, M^n \,|\, K_M \geq \kappa,\ |\Pi_{\partial M}| \leq \lambda \,\},$$

ここで $K_M,\, \Pi_{\partial M}$ はそれぞれ M の断面曲率、境界 ∂M の第 2 基本形式を表す。直径の上からのバウンド d を付加する場合は、$\mathcal{M}(n,\kappa,\lambda,d)$ と書く：

$$\mathcal{M}(n,\kappa,\lambda,d) = \{\, M^n \,|\, K_M \geq \kappa,\ |\Pi_{\partial M}| \leq \lambda, \quad \mathrm{diam}(M) \leq d \,\}.$$

二つのバウンド $K_M \geq \kappa,\ |\Pi_{\partial M}| \leq \lambda$ とガウス方程式から、境界 ∂M の断面曲率は下からの一様なバウンドをもつ：

$$K_{\partial M} \geq c(\kappa,\lambda).$$

正の数 t_0 に対して減少関数 $\phi : [0,t_0] \to (0,1]$ で

$$\phi(0) = 1, \quad \phi'(0) \leq -\lambda, \quad \phi'(t_0) = 0$$

なるものを固定して、ワープト・シリンダー $C_M = \partial M \times_\phi [0,t_0]$ を考察する。ここで C_M のリーマン計量 g_{C_M} は次式で与えられる：

$$g_{C_M} = g_{\partial M} + \phi^2(t)\, dt^2.$$

ここで $g_{\partial M}$ は、M のリーマン計量から導かれた ∂M 上のリーマン計量を表す。その上で M と C_M の境界 ∂M に沿った貼り合わせを $\tilde{M}$ と表し M の**拡張**と呼ぶ：

$$\tilde{M} = M \cup_{\partial M} C_M.$$

$\tilde{M}$ のリーマン計量 $\tilde{g}$ は、貼り合わせの部分では C^0-級の微分可能性しかもたない。しかしその境界は全測地的であり、 Kosovski の貼り合わせ定理 ([18]) から $\tilde{M}$ は曲率が下に一様に有界なアレクサンドロフ空間になる ([30])。これが拡張 $\tilde{M}$ を考える大きなメリットである。

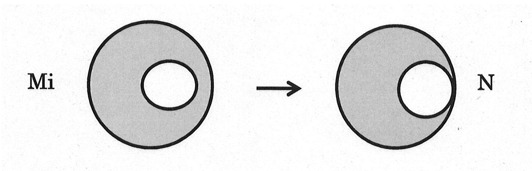
正の数 v に対して $\mathcal{M}(n,\kappa,\lambda,d,v)$ により、 $\mathcal{M}(n,\kappa,\lambda,d)$ の元 M で体積が v 以上であるものの全体を表す。この拡張プロセスを用いた Wong の主結果は次のように述べることができる：

定理 5.1. (プレコンパクト性定理)[30] $\mathcal{M}(n,\kappa,\lambda,d)$ は Gromov-Hausdorff 距離に関してプレコンパクトである。

定理 5.2. (弱安定性定理)[30] $\mathcal{M}(n,\kappa,\lambda,d,v)$ は有限個の同相類のみからなる。.

定理 5.2 において、閉包 $\mathcal{M}(n,\kappa,\lambda,d,v)$ における位相安定性は一般に成立しない。これは境界の異なる連結成分が極限で接触してしまう現象が起こるためである。第 2 基本形式が負となることを許すためにこのような現象が起こり得る。

このような状況で我々の主な目的は次のように述べられる：



問題 5.3. M_i を $\mathcal{M}(n,\kappa,\lambda,d)$ における無限列で Gromov-Hausdorff 距離に関して距離空間 N に収束するものとする。

(1) 極限空間 N を決定せよ。

(2) N を用いて M_i の位相（幾何）的な性質を特徴づけよ (i は十分大)。

以下、M_i の内半径が 0 に収束する場合（内半径崩壊）と一般の場合に分けて、問題5.3について考察する。

6. 境界付き多様体の内半径崩壊

境界付きリーマン多様体 M の**内半径**, inrad(M), とは、M の内部に含まれる "最大の" 距離球の半径として定義される：

$$\mathrm{inrad}(M) := \sup_{x\in M} d(x,\partial M).$$

始めに M_i の内半径が 0 に収束する場合を考察する。実はこの場合、極限空間 N の次元は $n-1$ 以下であることが分かる ([37])。そこで今後、$\mathrm{inrad}(M_i)\to 0$ のとき、M_i は**内半径崩壊する**と言うことにする。

例 6.1. 閉リーマン多様体 N 上のランク k のベクトル束から来る円盤束を

$$D^k \to M \to N$$

とする。このとき任意の $\epsilon>0$ に対して M のリーマン計量 g_ϵ で (M,g_ϵ) の断面曲率が一様に下に有界で全測地的境界をもち、$\epsilon\to 0$ のとき (M,g_ϵ) が N に内半径崩壊するものを構成できる ([36])。

内半径崩壊は、境界付きリーマン多様体の崩壊の中で極めて特殊なものである一方で、次の意味で典型的なものである：

- M_i の極限空間が境界をもたない位相多様体である場合や、境界をもたないアレクサンドロフ空間である場合、必然的に M_i は内半径崩壊する ([37])。
- 一般的な境界付きリーマン多様体の収束・崩壊における極限空間の記述の際に、内半径崩壊する場合の考察が基本となる (定理 7.1 など)。

内半径崩壊に関する主結果は次の通りである。始めの結果は極限空間についての結果であり、問題5.3 (1) への完全な解答を与える。

定理 6.2. ([36]) $\mathcal{M}(n,\kappa,\lambda,d)$ の無限列 M_i が N に内半径崩壊するとき、N は曲率 $\geq c(\kappa,\lambda)$ なるアレクサンドロフ空間である。

ここで第2基本形式に関する仮定 $\mathrm{II}_{\partial M_i} \leq \lambda^2$ を $\mathrm{II}_{\partial M_i} \geq -\lambda^2$ または $\mathrm{II}_{\partial M_i} \leq \lambda^2$ と片側のみのバウンドで置き換えた場合、定理6.2は成立しない。

例 6.3. $N \subset \mathbb{R}^2$ を円周 $\{(x,y)\,|\,x^2+y^2=1\}$ と区間 $\{(x,y)\,|\,x=0,-1\leq y\leq 1\}$ の和集合とし、 M_ϵ を N in $\mathbb{R}^2$ の閉 ϵ-近傍と単位円盤 $\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leq 1\}$ の交わりとする。M_ϵ に適当な平滑化を施すことにより M_ϵ は境界付きコンパクト曲面で $K_{M_\epsilon}\equiv 0$、かつある λ に対して $\mathrm{II}_{\partial M_\epsilon} \leq \lambda^2$ を満たす。しかし $\epsilon\to 0$ のとき $\inf \mathrm{II}_{\partial M_\epsilon} \to -\infty$ となる。もちろん $\epsilon\to 0$ のとき M_ϵ は N に内半径崩壊する。ここで N は曲率が下に有界なアレクサンドロフ空間でないことに注意する。

例6.3は、定理6.2 が第2基本形式に対する下からのバウンド $-\lambda^2 \leq \mathrm{II}_{\partial M}$ を仮定しなければ成立しないことを示している。上からのバウンド $\lambda \geq \Pi_{\partial M}$ を外した場合の反例もある。

問題5.3 (2) は一般に難しい問題であるが、余次元1の内半径崩壊の場合には完全な解答を与えることができる。

定理 6.4. ([36]) $\mathcal{M}(n,\kappa,\lambda,d)$ の無限列 M_i が $(n-1)$ 次元アレクサンドロフ空間 N に内半径崩壊するとき、M_i は N 上の特異 I-ファイバー束である：

$$I \to M_i \xrightarrow{\pi} N,$$

ここでこの特異ファイバー束の特異跡は N の境界 ∂N に一致する。

次の2つの例は余次元1の内半径崩壊の典型的な例である。

例 6.5. $\pi : P\to N$ を閉リーマン多様体の間の二重リーマン被覆とし、 $\varphi: P\to P$ をその被覆変換とする。. $\Phi : P\times[-\epsilon,\epsilon]\to P\times[-\epsilon,\epsilon]$ を

$$\Phi(x,t) = (\varphi(x),-t),$$

と定め $M_\epsilon := P\times[-\epsilon,\epsilon]/\Phi$ とおく。M_ϵ は N 上の捻じれ I-束である。ある κ と d に対して M_ϵ は $\mathcal{M}(n,\kappa,0,d)$ に属し、 $\epsilon\to 0$ のとき M_ϵ は N に内半径崩壊する。

例 6.6. N を $\mathbb{R}^{n-1}\times 0 \subset \mathbb{R}^{n+1}$ におけるとつ領域で滑らかな境界をもつもの し、 M'_ϵ を N の $\mathbb{R}^{n+1}$ における ϵ-近傍の境界と上半空間 $H_+ = \{(x_1,\dots,x_{n+1})\,|\,x_{n+1}\geq 0\}$ との交わりとする。適当な平滑化を M'_ϵ に施すことにより非負曲率をもつリーマン多様体 M_ϵ で全測地的境界をもつものを得る。 $\epsilon\to 0$ のとき M_ϵ は N に内半径崩壊する。M_ϵ は N 上の特異 I-束の構造をもつことに注意する：

$$M_\epsilon \simeq D(N)\times[-\epsilon,\epsilon]/(x,t)\sim(r(x)-t),$$

ここで $r: D(N)\to D(N)$ はダブル $D(N)$ の自然な反射を表す.

次に内半径崩壊するリーマン多様体の境界成分についての結果を述べる。ここでは直径のバウンドは不要である。

定理 6.7. ([36]) 次の性質をみたすある普遍的な正の数 $\epsilon = \epsilon_n(\kappa, \lambda)$ が存在する：$\mathcal{M}(n, \kappa, \lambda)$ 内の M の内半径が $\mathrm{inrad}(M) < \epsilon$ をみたすとき、

(1) ∂M の成分の個数 k は高々 2 である。

(2) $k = 2$ のとき M は $W \times [0, 1]$ に微分同相である。ここで W は ∂M の一つの連結成分である。

定理 6.7 (1) は [31, Theorem 5] にも述べられているが、その証明には明らかな誤りがある。定理 6.7 は Gromov の [11] における結果（証明は Alexander and Bishop[1] で与えられた）の拡張とみなせる。[11] においては断面曲率の両側バウンド $|K_M| \le \kappa^2$ が仮定されていた。

7. 境界付きリーマン多様体の収束・崩壊 (一般の場合)

最後に内半径崩壊を仮定しない一般の収束・崩壊に関する結果を述べる。

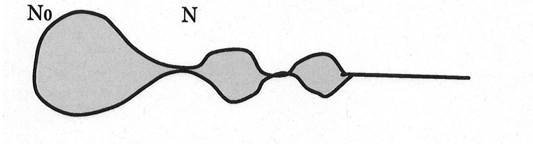
$\mathcal{M}(n, \kappa, \lambda, d)$ 内の無限列 M_i がコンパクト距離空間 N に収束すると仮定する。始めに極限空間の構造を述べる準備を整えておく：

- 先ず収束 $M_i \to N$ の下で ∂M_i が N のある閉集合 N_0 に収束するとしてよい。ここで $N \setminus N_0$ は M_i の内部の極限とべも呼ぶきもので、M_i の断面曲率の仮定から、$N \setminus N_0$ は（局所的に）曲率が κ 以上のアレクサンドロフ空間になる。従って問題は N の " 境界" とも呼ぶべき N_0 の構造である。また $N = N_0$ が内半径崩壊の場合である。

- 一方で $(\partial M_i, g_{\partial M_i})$ の断面曲率は κ 以上なので、プレコンパクト性から部分列をとることにより、あるアレクサンドロフ空間 C_0 に収束するとして良い。C_0 を用いて N_0 を記述できる。

極限空間の構造

定理 7.1. ([36]) 必ずしも連続とは限らない involution $f : C_0 \to C_0$ が存在して、N_0 は商距離空間 C_0/f に等長的である。ここで C_0/f の距離は、C_0 の距離から自然に導かれるものである。f の不連続点でのみ N_0 はアレクサンドロフ空間にならない。



境界連結成分の幾何的サイズ

まず境界連結成分の体積比の一様有界性が得られる。

定理 7.2. ([37]) 一様な正の定数 $v_i = v_i(n, \kappa, \lambda, d)$, $i = 1, 2$, が存在し、$\mathcal{M}(n, \kappa, \lambda, d)$ に属する任意の多様体 M の境界 ∂M の任意の連結成分 $\partial^\alpha M$ と $\partial^\beta M$ に対して体積比の一様有界性が成り立つ：

$$v_1 \le \frac{\mathrm{vol}(\partial^\alpha M)}{\mathrm{vol}(\partial^\beta M)} \le v_2.$$

$\mathcal{M}(n, \kappa, \lambda, d)$ における多様体が小さい境界連結成分をもつとき、多様体位相が次のように特徴づけられる。.

定理 7.3. ([37]) 正の定数 $\epsilon = \epsilon(n, \kappa, \lambda, d)$ が存在して、$\mathcal{M}(n, \kappa, \lambda, d)$ に属する M のある境界成分 $\partial^\alpha M$ の直径が $\mathrm{diam}\,(\partial^\alpha M) < \epsilon$ をみたすとする：

(1) 境界 ∂M の連結成分の個数 k は高々2である。

(2) $k = 2$ ならば M は積 $W \times [0, 1]$ に微分同相である。ここで W は ∂M の連結成分である。

注. 定理7.3 は定理6.7と似た命題の形だが、定理7.3 では内半径崩壊は仮定されていない。

安定性

次に非崩壊モジュライ空間 $\mathcal{M}(n, \kappa, \lambda, d, v)$ における安定性について述べる。先に述べたように、閉包 $\overline{\mathcal{M}(n, \kappa, \lambda, d, v)}$ において位相的安定性は成立しない。しかし $\mathcal{M}(n, \kappa, \lambda, d, v)$ における ”内部位相安定性 ” は成立する。

定理 7.4. ([37]) $\mathcal{M}(n, \kappa, \lambda, d, v)$ 内の与えられた元 M に対して正の数 $\epsilon = \epsilon_M > 0$ が存在して、もし $\mathcal{M}(n, \kappa, \lambda, d, v)$ の元 M' が $d_{GH}(M, M') < \epsilon$ を満たすならば、M と M' は微分同相である。

また $\mathcal{M}(n, \kappa, \lambda, d, v)$ の元 M の体積とその境界 ∂M の体積の収束性が成り立つ：

定理 7.5. ([37]) $\in \mathcal{M}(n, \kappa, \lambda, d, v)$ 内の無限列 M_i が Gromov-Hausdorff 距離に関してコンパクト距離空間 N に収束するとするとき次の体積収束が成り立つ：

(1) $\lim_{i\to\infty} \mathrm{vol}(M_i) = \mathcal{H}^n(N);$

(2) $\lim_{i\to\infty} \mathrm{vol}(\partial M_i) = \mathcal{H}^{n-1}(N_0) + \mathcal{H}^{n-1}(N_0^2).$

ここで $f : C_0 \to C_0$ を定理7.1における involution、 $\pi : C_0 \to N_0 = C_0/f$ を射影としたとき、$N_0^2 = \{x \in N_0 \,|\, \sharp\, \pi^{-1}(x) = 2\}$ である。

崩壊の障害

最後に境界付きコンパクト多様体が $\mathcal{M}(n,\kappa,\lambda,d)$ 内で崩壊するかどうか、その障害について述べる。閉多様体 N の単体的体積を $||N||$ とする（ Gromov[13]）。Gromov は、単体的体積の非消滅 $||N|| > 0$ がリッチ曲率の下からのバウンドの下での崩壊に対する障害を与えることを示した。閉じたアレクサンドロフ空間に対しても単体的体積が定義されて、[13] の結果がアレクサンドロフ空間に拡張されている ([21])。

定理 7.6. ([37]) 一様な正の定数 $\epsilon = \epsilon(n,\kappa,\lambda,d)$ が存在して、もし $\mathcal{M}(n,\kappa,\lambda)$ の元 M の体積が $\mathrm{vol}(M) < \epsilon$ を満たすならば $||D(M)|| = 0$.

M の体積が小さいとき、$D(M)$ の体積も小さいが、$D(M)$ は貼り合わせの部分で計量の滑らかさが失われるため曲率の下からのバウンドが存在しない。そのため閉多様体の場合の結果から直接的に定理 7.6 を導くことはできない。そのため拡張 $\tilde{M}$ のダブル $D(\tilde{M})$ を考察することになる。その際に、M が余次元 1 の空間に内半径崩壊する場合に限り $D(\tilde{M})$ の体積が小さくならない。しかしその場合は定理 6.4 により $D(M)$ は特異 S^1-束の構造をもつことが分かり、そのことから $||D(M)|| = 0$ が従う。

系 7.7. M をコンパクトな境界付き多様体とする。もし M のダブルの単体的体積が正であれば、M は $\mathcal{M}(n,\kappa,\lambda,d)$ 内で崩壊するようなリーマン計量をもたない。

例えば種数が 1 の境界付き曲面はどのように κ, λ, d を選んでも $\mathcal{M}(2,\kappa,\lambda,d)$ において崩壊しない.

予想 7.8. 定理 7.6 において直径のバウンド d は不要であろう。

8. 3 次元の場合

以上一般次元の境界付きリーマン多様体の崩壊について述べた。3 次元アレクサンドロフ空間の崩壊については境界をもたない場合、境界をもつ場合、いずれの場合にも崩壊の詳細の記述が可能である ([19]), [20])。特に 3 次元軌道体の崩壊が記述できる。

この最後の節では、境界をもつ 3 次元アレクサンドロフ空間の崩壊現象と、これを適用して得られる $\mathcal{M}(3,\kappa,\lambda,d)$ における崩壊について両者の相違点に着目して要点のみ簡潔に述べる。

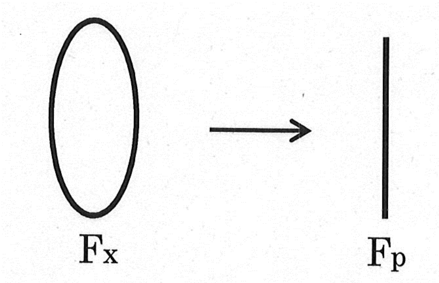
$\mathcal{M}(3,\kappa,\lambda,d)$ における無限列 M_i が N に、また M_i の拡張 $\tilde{M}_i$ が Y に Gromov-Hausdorff 収束するとする。定理 6.4 から、$\dim N = \dim Y = 2$ の場合が一番肝要である。

定理 8.1. ([20]) $\mathcal{M}(3,\kappa,\lambda,d)$ における無限列 M_i に対して、M_i と $\tilde{M}_i$ が各々 N, Y に Gromov-Hausdorff 収束し、$\dim N = \dim Y$ とするとき、次を満たす特異 S^1-ファイバー束 $f_i : M_i \to Y$ が存在する：

$$f_i^{-1}(x) = \begin{cases} S^1 & \text{if } x \in \mathrm{int}\, Y, \\ 1\,\text{点},\ S^1/2 \ \mathit{or}\ S^1 & \text{if } x \in \partial Y \end{cases}$$

すなわち、f は Y の内部の上ではフ S^1-ファイバー束であり、境界上ではそのコーナーでファイバー型が変化する可能性がある。

同じ状況で M_i が位相的特異点をもつ3次元アレクサンドロフ空間である場合には、特異 S^1-ファイバー束 $f_i : M_i \to Y$ が構成されるが、この場合 Y の内部の特異点 p 上で特異 I ファイバーが起こり得る。この場合 $x \in Y$ が p に近づくとき, 円周ファイバー $F_x = f_i^{-1}(x)$ は、折り返しにより、区間 $F_p = f_i^{-1}(p)$ に収束する。



3次元の場合、N が1次元や0次元の場合も崩壊の詳細な記述が可能である。

参考文献

[1] Alexander, Stephanie B.; Bishop, Richard L. Thin Riemannian manifolds with boundary. Math. Ann.**311**no. 1, 55-70, 1998.

[2] Burago,Y; Burago, D; Ivanov, S: *A course in metric geometry.* Graduate Studies in Mathematics 2001; Volume: 33.

[3] Burago, Y, Gromov, M and Perelman, G: A. D. Alexandrov spaces with curvature bounded below. Uspekhi Mat. Nauk. **42**:2, 3-51, 1992.

[4] Cheeger, J; Colding, T: On the structure of spaces with Ricci curvature bounded below. I. J. Differential Geom. 46 (1997), no. 3, 406-480.

[5] Cheeger, J; Colding, T. On the structure of spaces with Ricci curvature bounded below. II. J. Differential Geom. 54 (2000), no. 1, 13-35.

[6] Cheeger, J; Colding, T. On the structure of spaces with Ricci curvature bounded below. III. J. Differential Geom. 54 (2000), no. 1, 37-74.

[7] Cheeger, J; Fukaya, K; Gromov, M: Nilpotent structures and invariant metrics on collapsed manifolds. J. Amer. Math. Soc. 5 (1992), no. 2, 327-372.

[8] Cheeger, J; Naber, A: Regularity of Einstein Manifolds and the Codimension 4 Conjecture. arXiv:1406.6534.

[9] Colding, T; Naber, A: Sharp Hölder continuity of tangent cones for spaces with a lower Ricci curvature bound and applications. Ann. of Math. (2) 176 (2012), no. 2, 1173-1229.

[10] Fukaya, K; Yamaguchi, T: The fundamental groups of almost non-negatively curved manifolds. Ann. of Math. (2) 136 (1992), no. 2, 253-333.

[11] Gromov, M: Synthetic geometry in Riemannian manifolds. Proceeding of ICM, Helsinki, (1978)i 31-44.

[12] Gromov, M: Curvature, dimeter and Betti numbers, Comment.Math. Helv. 56(1981), 179-195.

[13] Gromov, M: Volume and bounded cohomology. Publ. Math. IHES 56 (1982), 5–99.

[14] Gromov, M: *Structures métriques pour les variétés riemanniennes*, CEDIC, Paris, 1981, Edited by J. Lafontaine and P. Pansu.

[15] Kapovitch, V, Perelman's stability theorem. Surveys in differential geometry. Vol. XI, 103-136, Surv. Differ. Geom., 11, Int. Press, Somerville, MA, 2007.

[16] Kapovitch, V; Petrunin, A; Tuschmann, W: Nilpotency, almost nonnegative curvature, and the gradient flow on Alexandrov spaces. Ann. of Math.171 (2010), 3430-373.

[17] Kapovitch, V; Wilking, B: Structure of fundamental groups of manifolds with Ricci curvature bounded below . preprint.

[18] Kosovskiĭ, N. N: Gluing of Riemannian manifolds of curvature $\geq \kappa$. Algebra i Analiz 14:3 (2002), 140-157.

[19] Mitsuishi, A; Yamaguchi, T: Collapsing three-dimensional closed Alexandrov spaces with a lower curvature bound. Trans. Amer. Math. Soc. 367 (2015), no. 4, 2339-2410.

[20] Mitsuishi, A; Yamaguchi, T: Collapsing three-dimensional Alexandrov spaces with boundary. in preparation.

[21] Mitsuishi, A; Yamaguchi, T: Locally Lipschitz contractibility of Alexandrov spaces and its applications, Pacific J. Math. 270 (2014), 393-421.

[22] Mitsuishi, A; Yamaguchi, T: Good coverings of Alexandrov spaces, Preprint, arXiv:1508.07110.

[23] Mitsuishi, A; Yamaguchi, T: Lipschitz homotopy convergence of Alexandrov spaces, arXiv:1704.08789.

[24] Otsu,Y; Shioya,T: The Riemannian structure of Alexandrov spaces. J. Differential Geom. 39 (1994), no. 3, 629–658

[25] Perelman, G: Alexandrov spaces with curvature bounded below II. preprint, 1994.

[26] Perelman, G: Elements of Morse theory on Alexandrov spaces. St. Petersburg Math. J. 5 (1994) 207–214.

[27] Perelman, G.; Petrunin, A. Extremal subsets in Aleksandrov spaces and the generalized Liberman theorem. St. Petersburg Math. J. 5 (1994), no. 1, 215227.

[28] Shioya, T; Yamaguchi, T: Collapsing three-manifolds under a lower curvature bound. J. Differential Geom. 56 (2000), no. 1, 1-66.

[29] Shioya, T; Yamaguchi, T:Volume collapsed three-manifolds with a lower curvature bound. Math. Ann. 333 (2005), no. 1, 131-155.

[30] Wong, J.: An extension procedure for manifolds with boundary. Pacific J. **235**:173-199. 2008

[31] Wong, J.: Collapsing manifolds with boundary. Geom Dedicata. **149**:291-334. 2010

[32] Yamaguchi, T.: Collapsing and pinching under a lower curvature bound. Ann. Math. **133**(2) 317-357, 1991

[33] Yamaguchi, T.: A convergence theorem in the geometry of Alexandrov spaces. Actes de la Table Ronde de Géométrie Différentielle, Luminy 1992. Sémin. Congr., vol. 1, 601-642, Soc. Math. France, Paris (1996)

[34] Yamaguchi, T.: Collapsing 4-manifolds with a lower curvature bound, arXiv:1205.0323

[35] Yamaguchi, T.:Collapsing and essential coverings, arXiv:1205.0441.

[36] Yamaguchi, T and Zhang, Z: : Inradius collapsed manifolds, arXiv:1512.08136

[37] Yamaguchi, T and Zhang, Z.: Convergence of manifolds with boundary, in preparation.