

非半単純なモジュラーテンソル圏に 関する最近の展開

清水 健一 (芝浦工業大学 システム理工学部 数理科学科)*

【概要】 モジュラーテンソル圏とは、ある種の有限性と非退化性を満たす半単純なリボン圏である。しかしながら、表現論、共形場理論、位相不変量などの研究に動機づけられ、モジュラーテンソル圏の定義から半単純性を外したものについての研究が重要になってきている。1990年代、Lyubashenko はそのような“非半単純”なモジュラーテンソル圏の概念を定式化し、そのような圏から3次元多様体の不変量や閉曲面の写像類群の表現などが得られることを示した。本講演では、この理論において重要となるいくつかのテンソル圏に関する技巧を紹介しつつ、最近の“非半単純”モジュラーテンソル圏の理論の展開について紹介する。特に、モジュラー性の Müger center を用いた特徴づけを紹介し、これを用いることで、モジュラーテンソル圏の例が次々と得られることを紹介する。

1. モジュラーテンソル圏の理論

モジュラーテンソル圏とは、2次元の有理的共形場理論や3次元の位相的場の量子論の研究から見出された代数的構造であり、形式的にはある種の有限性と非退化性を満たす半単純なリボン圏として定義される。我々はその“非半単純”な一般化に興味があるのだが、まずはモジュラーテンソル圏の定義について復習し、そのような圏がどのような側面から研究されてきたのかを概説しておく。簡単のため、しばらくは複素数体 $\mathbb{C}$ 上で話を進める。

定義. フュージョン圏 [ENO05] とは、rigid monoidal category の構造を持つ $\mathbb{C}$ -線形半単純アーベル圏 $\mathcal{C}$ であって、以下の条件を満たすようなものである。

- (1) $\mathcal{C}$ の単純対象の同型類は高々有限個である。
- (2) $\mathcal{C}$ のテンソル積は $\mathbb{C}$ -双線形である。
- (3) $\mathcal{C}$ の単位対象 $1 \in \mathcal{C}$ は単純対象である。

$\mathcal{C}$ をリボン圏 [Kas95] の構造を持つようなフュージョン圏とし、 $\{V_1, \dots, V_m\}$ をその単純対象の同型類の完全代表系とする。 $\mathcal{C}$ の S-行列 $S = (s_{ij})_{i,j=1,\dots,m}$ を

$$s_{ij} = \text{tr}(\sigma_{V_j^*, V_i} \sigma_{V_i, V_j^*}) \in \text{End}_{\mathcal{C}}(1) \cong \mathbb{C}$$

で定義する(ここで σ は $\mathcal{C}$ の braiding, X^* は X の双対, tr はリボン圏におけるトレースである)。非退化な S-行列を持つようなリボン・フュージョン圏を**モジュラーテンソル圏**(modular tensor category)と呼ぶ。

$\mathcal{C}$ をモジュラーテンソル圏とし、 V_i および S は上の通りとする。各 $i = 1, \dots, m$ に対し、 $\theta_i \in \mathbb{C}$ を $\theta_{V_i} = \theta_i \text{id}_{V_i}$ (θ はリボン圏 $\mathcal{C}$ の twist) によって定める。対角行

本研究は科学研究費補助金・若手研究(B) (課題番号: 16K17568) の助成を受けている。

* 〒337-8570 埼玉県 さいたま市 見沼区 深作 307

e-mail: kshimizu@shibaura-it.ac.jp

列 $T = (\delta_{ij}\theta_i)$ は $\mathcal{C}$ の T-行列と呼ばれている. 実は,

$$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}) \rightarrow \mathrm{PGL}_m(\mathbb{C}), \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mapsto S, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto T$$

によってモジュラー群 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ の射影表現が定義される. この結果は, モジュラーテンソル圏が “モジュラー” なる名を冠する所以とされる [BK01].

トポロジーの観点からは, モジュラーテンソル圏から3次元の位相的場の量子論を構成することができることが重要であろう. 特に, このような圏からは3次元多様体の位相不変量 (Witten-Reshetikhin-Turaev 構成) や閉曲面の写像類群の射影表現などが得られる. 上で与えた $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ の射影表現は, 閉曲面としてトーラスを考えた場合に対応している.

代数的に興味深いのは, この $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ 表現を用いて $\mathcal{C}$ のテンソル積の分解則を記述する **フェアリンド公式** である (元々のアイデアは共形場理論に由来しており, そちらの観点からも重要な結果である). V_i たちを上の通りとし, N_{ij}^a を $V_i \otimes V_j$ に含まれる V_a の重複度とする. このとき等式

$$N_{ij}^a = \frac{1}{\dim(\mathcal{C})} \sum_{r=1}^m \frac{s_{ir}s_{jr}s_{a^*,r}}{\dim(V_r)} \quad (i, j, a = 1, \dots, m)$$

が成り立ち, これをフェアリンド公式と呼ぶ [BK01]. ここで a^* は $V_{a^*} \cong V_a^*$ となる番号, $\dim(X) = \mathrm{tr}(\mathrm{id}_X)$, $\dim(\mathcal{C}) = \sum_{i=1}^m \dim(V_i)^2$ である.

最近では, モジュラーテンソル圏の理論の量子コンピューティングへの応用も考えられている. これは興味深い話題であるが, 講演者には解説する能力がないから, Rowell-Wang [RW17] による解説記事を紹介するに留めておく.

2. 非半単純なモジュラーテンソル圏

2.1. Lyubashenko の理論とその発展

モジュラーテンソル圏はある種の有限性と非退化性を満たす半単純なりボン圏であるが, その定義から半単純性を外すという Lyubashenko によって始められた興味深い試みがある. Lyubashenko が [Lyu95a, Lyu95b, Lyu95c, Lyu95d] など示したように, そのような “非半単純” なモジュラーテンソル圏からも3次元多様体の不変量や閉曲面の写像類群の射影表現などが得られる. 我々が “非半単純” モジュラーテンソル圏に期待することとして――

- (1) **位相不変量への応用.** 素朴には, 半単純でないものは半単純なものよりずっと多い. Lyubashenko の理論により, 我々は WRT 構成を大きく拡張するような3次元多様体の不変量を構成する枠組みを手に入れたことになる.
- (2) **有理的ではない共形場理論への応用.** モジュラーテンソル圏の概念の出自のひとつは有理的な共形場理論である. この “有理的” という条件は代数的には “半単純性” であるから, 非有理的な共形場理論には Lyubashenko の意味でのモジュラーテンソル圏が対応するのではないかと期待される [CG17,

GR16, GR17]. このような予想が正しいかどうかはよくわかっていないものの, 既に symplectic fermion や triplet VOA に対応すると目される準ホップ代数の研究が, “非半単純” モジュラーテンソル圏の理論を援用しつつ行われている [FGR17a, FGR17b, CGR17].

- (3) **ホップ代数の表現論への応用.** 半単純ホップ代数に関するいくつかの問題は, モジュラーテンソル圏に関する結果を援用することで解かれている (例えば [EG98] など). このような意味でモジュラーテンソル圏の理論は半単純ホップ代数の研究に重要であった. 1 の冪根における量子群などの半単純ではないホップ代数の研究においては, Lyubashenko の意味でのモジュラーテンソル圏の理論が重要な役割を果たすと期待される.

このように多くの応用が期待される一方で, Lyubashenko の理論はモジュラーテンソル圏の定義からして難しく, 近年のテンソル圏の理論の発展によってようやく取り扱いが可能になってきたように思える. 以下, まずは Lyubashenko によるモジュラーテンソル圏の定義を紹介したい.

2.2. エンドと余エンド

定義を述べるために必要なのが, 余エンドと呼ばれる圏論の概念である. $\mathcal{C}$ と $\mathcal{V}$ を圏とし, $H : \mathcal{C}^{\text{op}} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{V}$ を関手とする. H の**エンド** (end) とは, $\mathcal{V}$ の対象 E と $\mathcal{C}$ の対象によって添え字付けられた射の族 $\pi = \{\pi_X : E \rightarrow H(X, X)\}_{X \in \mathcal{C}}$ の組 (E, π) であってある種の自然性と普遍性を満たすものである. 双対的に, H の**余エンド** (coend) は $\mathcal{V}$ の対象 $C \in \mathcal{V}$ と射の族 $i = \{i_X : H(X, X) \rightarrow C\}_{X \in \mathcal{C}}$ の組 (C, i) で, ある種の自然性と普遍性を満たすものとして定義される. Mac Lane [ML98] に従い, H のエンド E と余エンド C をそれぞれ

$$E = \int_{X \in \mathcal{C}} H(X, X) \quad \text{および} \quad C = \int^{X \in \mathcal{C}} H(X, X)$$

のように表す. いくつかの分かりやすい例を紹介しておこう.

例. A と B を小さな圏とし, F と G を A から B への関手とする. このとき, エンド $\int_{X \in A} \text{Hom}_B(F(X), G(X))$ は存在し, F から G への自然変換の全体 $\text{Nat}(F, G)$ と同一視できる. このことを用いて関手の間の自然変換の空間を計算するのは, 後述する有限テンソル圏の研究において重要なテクニックの一つである.

例. H をホップ代数, $\mathcal{C}$ をその有限次元余表現の圏, $U : \mathcal{C} \rightarrow \text{Vec}$ を fiber functor とする. このとき, 余エンド $\int^{X \in \mathcal{C}} U(X)^* \otimes U(X)$ は自然なホップ代数構造を持ち, さらに H と同型である. つまり, ホップ代数はその余表現の圏の fiber functor から再構成することができる (淡中双対).

2.3. Lyubashenko の定義

我々は Etingof-Ostrik [EO04] によって整備された有限テンソル圏という枠組みを用いて “非半単純” なモジュラーテンソル圏を定義する. Lyubashenko の一連

の結果 [Lyu95a, Lyu95b, Lyu95c, Lyu95d] が出版された時点ではこのような用語は存在していなかったが、設定としては同じである。

定義. k を代数閉体とする. 有限次元代数の有限次元表現の圏と同値であるような圏を k 上の**有限アーベル圏**と呼ぶ. k 上の**有限テンソル圏** [EO04] とは, rigid monoidal category の構造を持つような有限アーベル圏であって, 以下の条件を満たすようなものである.

- (1) $\mathcal{C}$ のテンソル積は k -双線形である.
- (2) $\mathcal{C}$ の単位対象 $\mathbb{1} \in \mathcal{C}$ は単純対象である.

$\mathcal{C}$ を有限組みひも圏 (つまり組みひも圏の構造を持つ有限テンソル圏) とし, 余エンド $\mathbb{F}_{\mathcal{C}} := \int^{X \in \mathcal{C}} X^* \otimes X$ を考える (そう明らかなことではないが, この余エンドは $\mathcal{C}$ の対象として存在する). 上述した fiber functor からホップ代数を再構成する手法と同様にして, $\mathbb{F}_{\mathcal{C}}$ にホップ代数の構造を導入することができる. さらに, 余エンドの普遍性を用いてペアリング $\omega : \mathbb{F}_{\mathcal{C}} \otimes \mathbb{F}_{\mathcal{C}} \rightarrow \mathbb{1}$ が定義される.

定義. ペアリング ω が非退化であるとき, $\mathcal{C}$ は**非退化**であるという. リボン構造を持つ非退化な有限組みひも圏をモジュラーテンソル圏と呼ぶ.

実は Lyubashenko はペアリング ω が退化する場合も含むより一般的な設定で理論を展開している. 上の定義は [Lyu95d] の意味での perfect modular tensor category である. 我々は Kerler-Lyubashenko [KL01] の用語法に従った.

リボン・フュージョン圏 $\mathcal{C}$ の S-行列が非退化であることと, $\mathcal{C}$ が上の意味でモジュラーテンソル圏であることは, 実は同値である [KL01, §7.4.1]. このことは明らかなことではないから, 後で詳しく解説する. とにかくそのような事情があるため, 以降では**モジュラーテンソル圏という語は常に上の意味で用いる**ことにし, 半単純なものを考える場合にはそのように明記する.

2.4. Lyubashenko の定義の意味 — Factorizable Hopf algebras

モジュラーテンソル圏についての結果を紹介していきたいのだが, その前に, まず Lyubashenko の意味について説明しておきたい. H を有限次元準三角ホップ代数とし, その普遍 R-行列を $R = \sum_i a_i \otimes b_i \in H \otimes H$ とする. このとき $\text{Rep}(H)$ は R から誘導される braiding を持つ有限テンソル圏となる.

補題 ([KL01, §7.4.6]). $\mathcal{C} = \text{Rep}(H)$ に対する余エンド $\mathbb{F}_{\mathcal{C}}$ およびペアリング ω は, 以下のように与えられる. ベクトル空間として $\mathbb{F}_{\mathcal{C}} = H^*$. 左 H -加群の構造は,

$$(h \triangleright f)(x) = f(S(h_{(1)})xh_{(2)}) \quad (h, x \in H, f \in \mathbb{F}_{\mathcal{C}})$$

で与えられる. ただし, S は H の対合射, $h_{(1)} \otimes h_{(2)}$ は $h \in H$ の余積の Sweedler 記法による表示である. さらに, ペアリング $\omega : \mathbb{F}_{\mathcal{C}} \otimes \mathbb{F}_{\mathcal{C}} \rightarrow \mathbb{1}$ は

$$\omega(f \otimes g) = \sum_{i,j} f(b_i a_j) g(S(a_i b_j)) \quad (f, g \in \mathbb{F}_{\mathcal{C}})$$

で与えられる.

この結果から, $\text{Rep}(H)$ が非退化であることと, H が factorizable [RSTS88] であることが同値であることが分かる. Lyubashenko による非退化性の定義は, 準三角ホップ代数の factorizability を純粋に圏論的な言葉で書き換えたものであると言ってもよい.

3. 非退化性の特徴づけ

我々は組みひも有限テンソル圏の非退化性が有限次元準三角ホップ代数の factorizability と対応する概念であることを見た. モジュラーテンソル圏の研究を進めるため, まずは非退化性なる条件を簡便に確かめられるようにしたい. そのために有用と思われるいくつかの結果を [Shi16] に基づいて紹介しよう.

3.1. Schneider の結果との関係

はじめに, 非退化性の定義と Schneider [Sch01] による factorizability の特徴づけとの関係について述べたい. H を有限次元準三角ホップ代数, $R = \sum_i a_i \otimes b_i$ をその普遍 R -行列とする. このとき $F = \sum_i 1 \otimes b_i \otimes a_i \otimes 1 \in H^{\otimes 4}$ は $H \otimes H$ の Drinfeld twist となる. Schneider は普遍 R -行列を用いてホップ代数射 $\delta_R : D(H) \rightarrow (H \otimes H)^F$ を定義し, 写像 δ_R が全単射であることと, H が factorizable であることが同値であることを示した [Sch01, Theorem 4.3]. ここで, $D(H)$ は H の Drinfeld double, $(H \otimes H)^F$ は $H \otimes H$ の余積を F によって変形したホップ代数である.

さて, $\mathcal{C}$ を組みひも有限テンソル圏とする. このときホップ代数射 δ_R に対応するようなテンソル関手 $\delta_{\mathcal{C}} : \mathcal{C} \boxtimes \mathcal{C}^{\text{rev}} \rightarrow \mathcal{Z}(\mathcal{C})$ を定義できる. 上述の Schneider の結果を鑑み, Etingof-Nikshych-Ostrik [ENO04, Definition 4.2] は関手 $\delta_{\mathcal{C}}$ が圏同値であることを以って “ $\mathcal{C}$ は factorizable である” と定義した. しかし, 実は,

定理 ([Shi16]). $\mathcal{C}$ が非退化であることと, $\mathcal{C}$ が Etingof-Nikshych-Ostrik の意味で factorizable であることは同値である.

この定理の証明はそう難しくない. Lyubashenko [Lyu99, §2.7] によって $\mathbb{F}_{\mathcal{C}}$ -余加群の圏は $\mathcal{C} \boxtimes \mathcal{C}^{\text{rev}}$ と同値であることが分かっている. 一方で, Majid [Maj92, Theorem 3.2] によれば, $\mathbb{F}_{\mathcal{C}}$ -加群の圏は $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ と同値である. さらに, ω は $\mathbb{F}_{\mathcal{C}}$ から $\mathbb{F}_{\mathcal{C}}^*$ へのホップ代数射を誘導し, これにより $\mathbb{F}_{\mathcal{C}}$ -余加群の圏 ($= \mathbb{F}_{\mathcal{C}}^*$ -加群の圏) から $\mathbb{F}_{\mathcal{C}}$ -加群の圏への関手が誘導される. これらを図にまとめよう:

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{C} \boxtimes \mathcal{C}^{\text{rev}} & \xrightarrow[\approx]{\text{Lyubashenko}} & \mathbb{F}_{\mathcal{C}}\text{-余加群の圏} \\
 \delta_{\mathcal{C}} \downarrow & & \downarrow \omega \text{ から誘導された関手} \\
 \mathcal{Z}(\mathcal{C}) & \xrightarrow[\approx]{\text{Majid}} & \mathbb{F}_{\mathcal{C}}\text{-加群の圏}
 \end{array}$$

簡単な計算により, この図式が同型を除いて可換となることが確かめられる. もはや定理が成り立つことは明らかである.

3.2. Müger center

次に, 非退化性の Müger center を用いた特徴づけについて述べる.

定義. $\mathcal{C}$ を組みひも有限テンソル圏, σ をその braiding とする. 任意の対象 $X \in \mathcal{C}$ に対して $\sigma_{X,T}\sigma_{T,X} = \text{id}_{T \otimes X}$ が成り立つとき, 対象 $T \in \mathcal{C}$ は**透過的** (transparent) であるという. すべての透過的对象からなる $\mathcal{C}$ の充満部分圏を $\mathcal{C}'$ と書き, これを $\mathcal{C}$ の **Müger center** と呼ぶ. すべての $\mathcal{C}'$ の対象が単位対象 $\mathbb{1}$ の有限直和と同型であるとき, $\mathcal{C}$ は**自明な Müger center を持つ**という.

リボン・フュージョン圏の非退化性と, その Müger center が自明であることが同値であることはよく知られていた [Müg03a, Müg03b, Bru00]. この結果をそのまま半単純ではない場合に一般化することができる:

定理 ([Shi16]). 組みひも有限テンソル圏が非退化であるための必要十分条件は, その Müger center が自明であることである.

この定理は, Frobenius-Perron (FP) 次元 [EO04, ENO05] の理論を用いて証明される. 有限テンソル圏 $\mathcal{C}$ に対し, その FP 次元 $\text{FPdim}(\mathcal{C}) \in \mathbb{R}_{>0}$ が定義されるが, これはテンソル関手が圏同値であるか否かを判定するためにとっても便利である. 例えば, $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ が同じ FP 次元を持つような有限テンソル圏の間のテンソル関手であるとき, 以下のようなことが成り立つ:

$$F \text{ は圏同値} \iff \text{Im}(F) = \mathcal{D} \iff \text{FPdim}(\text{Im}(F)) = \text{FPdim}(\mathcal{D}).$$

ただし, $\text{Im}(F)$ はクラス $\{F(X) \mid X \in \mathcal{C}\}$ を含み, subquotient に関して閉じているような $\mathcal{D}$ の充満部分圏の中で最小のものである.

さて, $\mathcal{B}$ を組みひも有限テンソル圏とし, $\mathcal{X}$ と $\mathcal{Y}$ をその部分テンソル圏 (つまりテンソル積, 双対, 有限直和および subquotient に関して閉じているような空でない充満部分圏) とする. このとき $\mathcal{X} \vee \mathcal{Y}$ で $\mathcal{X}$ と $\mathcal{Y}$ を含む $\mathcal{B}$ の部分テンソル圏のうちで最小のものを表す. 上の定理の証明のために重要な等式が,

$$\text{FPdim}(\mathcal{X}) \cdot \text{FPdim}(\mathcal{Y}) = \text{FPdim}(\mathcal{X} \cap \mathcal{Y}) \cdot \text{FPdim}(\mathcal{X} \vee \mathcal{Y})$$

である [Shi16] (半単純の場合は [EGNO15, Lemma 8.21.6]). この等式を用いるとテンソル関手 $\delta_{\mathcal{C}}: \mathcal{C} \boxtimes \mathcal{C}^{\text{rev}} \rightarrow \mathcal{Z}(\mathcal{C})$ の像の FP 次元が

$$\text{FPdim}(\text{Im}(\delta_{\mathcal{C}})) = \text{FPdim}(\mathcal{C})^2 / \text{FPdim}(\mathcal{C}')$$

と計算できる. $\text{FPdim}(\mathcal{Z}(\mathcal{C})) = \text{FPdim}(\mathcal{C})^2$ だから, この式は $\delta_{\mathcal{C}}$ が圏同値となるための“不足分”がちょうど $\text{FPdim}(\mathcal{C}')$ であると言っているのである. ここまで来れば, 上述の Müger center による非退化性の特徴づけは明らかである.

3.3. S-行列はどこに？

上述の Müger center による特徴づけは強力で, モジュラー性の判定にとっても便利である. そのような応用的な話に進む前に, 半単純の場合に定義に現れていた **S-行列はどこに行ったのか**という疑問について解決しておきたい. $\mathcal{C}$ を組みひも有限テンソル圏とする. ペアリング ω を用いて, 線形写像

$$\Omega_{\mathcal{C}}: \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathbb{1}, \mathbb{F}_{\mathcal{C}}) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathbb{F}_{\mathcal{C}}, \mathbb{1}), \quad a \mapsto \omega \circ (a \otimes \text{id})$$

を定義する. 実は $\mathcal{C}$ がリボン・フュージョン圏の場合, $\{V_1, \dots, V_m\}$ を $\mathcal{C}$ の単純対象の同型類の完全代表系とすると $\mathbb{F}_{\mathcal{C}} = \bigoplus_{i=1}^m V_i^* \otimes V_i$ のような分解がある. 写像 $\Omega_{\mathcal{C}}$ の定義域と終域はこの直和分解を反映した良い基底を持ち, $\mathcal{C}$ の S-行列はその基底に関して $\Omega_{\mathcal{C}}$ を行列表示したものとなっているのである.

以上の議論から, 特に, S-行列が非退化ならば $\Omega_{\mathcal{C}}$ が全単射である. Lyubashenko の意味でのモジュラーテンソル圏が非退化な S-行列を持つようリボン・フュージョン圏の一般化であるというのなら, $\Omega_{\mathcal{C}}$ の全単射性と $\mathcal{C}$ の非退化性との関係を調べておかなければならない. 結果としては次が成立する.

定理 ([Shi16]). 組みひも有限テンソル圏 $\mathcal{C}$ が非退化であるための必要十分条件は, 上で導入した線形写像 $\Omega_{\mathcal{C}}$ が**単射**であることである.

なお, $\Omega_{\mathcal{C}}$ が全射であるが $\mathcal{C}$ が非退化とならないような例は存在する.

$\Omega_{\mathcal{C}}$ の単射性が必要であることは明らかであろう. 十分性の証明には, ホップ代数の指標や積分の理論を有限テンソル圏の内部でエミュレートする**内部指標理論** [Shi17c] および**積分理論** [Shi17c, Shi17a] を用いる. 一般に, 有限テンソル圏 $\mathcal{G}$ に対して $\text{CF}(\mathcal{G}) = \text{Hom}_{\mathcal{G}}(1, \mathbb{F}_{\mathcal{G}})$ とおく. $\mathcal{G}$ が有限群 G の表現の圏であるような場合, $\text{CF}(\mathcal{G})$ は G 上の類関数の空間と同型になるから, 我々は $\text{CF}(\mathcal{G})$ を $\mathcal{G}$ の**類関数の空間**と呼ぶことにする. 指標および積分の理論を用いると,

補題. $\dim_k \text{CF}(\mathcal{G}) = 1$ を満たす有限テンソル圏 $\mathcal{G}$ は **Vec** と同値である.

余エンドに関する繊細な議論が必要になるが, $\mathcal{D}$ が $\mathcal{C}$ の部分テンソル圏であるとき, $\text{CF}(\mathcal{D})$ は $\text{CF}(\mathcal{C})$ の部分空間とみなせる. 線形写像 $\Omega_{\mathcal{C}}$ は $\text{CF}(\mathcal{C})$ をホップ代数 $\mathbb{F}_{\mathcal{C}}$ の余単位射の張る 1 次元空間に写してしまうことが簡単な計算により分かる. したがって, もし $\Omega_{\mathcal{C}}$ が単射なら, $\text{CF}(\mathcal{C})$ も 1 次元である. ここで上の補題を使うと, $\mathcal{C}$ の Müger center が自明であることが従う.

4. 非半単純なモジュラーテンソル圏の構成

ここまでの結果を用いて, 非半単純なモジュラーテンソル圏の例を構成してみよう.

4.1. Drinfeld center

最も基本的かつ簡単な例として, Drinfeld center がある. $\mathcal{C}$ が Barrett-Westbury [BW99] の意味で spherical なフュージョン圏であるとき, $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ が (半単純な) モジュラーテンソル圏となることはよく知られている. 実はこの結果は $\mathcal{C}$ が半単純ではないような場合を含むように一般化できる. ただし, 半単純でない場合には spherical の定義を変更する必要がある.

定理 ([Shi17b]). $\mathcal{C}$ が Douglas, Schommer-Pries, Snyder [DSS13] の意味で spherical な有限テンソル圏ならば, $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ はモジュラーテンソル圏である.

より詳しく言えば, 我々の非退化性の特徴づけと [ENO04] の結果より, $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ は常に非退化であることが分かる. したがって, いつ $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ がリボン構造を持つのかということが問題となる. Kauffman-Radford [KR93] は有限次元ホップ代数の Drinfeld double のリボン構造を分類しているが, 実はこの結果は有限テンソル圏

の Drinfeld center のリボン構造の分類へと一般化できる [Shi17b]. この分類結果から, $\mathcal{C}$ が [DSS13] の意味で spherical ならば, $\mathcal{Z}(\mathcal{C})$ がリボン圏になることが直ちに分かる.

4.2. Yetter-Drinfeld category

$\mathcal{C}$ を組みひも有限テンソル圏とし, B を $\mathcal{C}$ におけるホップ代数とする. このとき B の (左-左-)Yetter-Drinfeld 圏 ${}^B_B\mathcal{YD}(\mathcal{C})$ が定義される [Bes97]. 実は ${}^B_B\mathcal{YD}(\mathcal{C})$ も組みひも有限テンソル圏である. さらに, その Müger center について:

定理 ([Shi16]). ${}^B_B\mathcal{YD}(\mathcal{C})$ の Müger center は $\mathcal{C}'$ と圏同値である. したがって, もし $\mathcal{C}$ が非退化なら, Yetter-Drinfeld 圏 ${}^B_B\mathcal{YD}(\mathcal{C})$ も非退化である.

${}^B_B\mathcal{YD}(\mathcal{C})$ のリボン構造の分類は知られていない. ただし, ${}^B_B\mathcal{YD}(\mathcal{C})$ は $\mathcal{C}$ における左 B -加群の圏 ${}_B\mathcal{C}$ の Drinfeld center に組みひも圏として埋め込まれることが知られている [Bes97]. したがって, もし ${}_B\mathcal{C}$ が [DSS13] の意味で spherical なら, ${}^B_B\mathcal{YD}(\mathcal{C})$ はリボン圏になる.

4.3. 量子群の構成について

最後に, 1 の冪根 q に対する “小さな” 量子群 $u_q(\mathfrak{g})$ がこのような結果からどのように見えるのかについて説明しておく. Γ を $u_q(\mathfrak{g})$ の grouplike element のなす群とする. このとき $u_q^+(\mathfrak{g})$ は, ある Yetter-Drinfeld Γ -加群 V の Nichols 代数 $\mathfrak{B}(V)$ と同型である. パラメータ q の位数に少々条件を課しておくと, $k\Gamma$ に特別な普遍 R -行列 R を導入することで, $\mathfrak{B}(V)$ を $V \in \text{Rep}(k\Gamma, R)$ の Nichols 代数とすることが出来る (ここでは $\text{Rep}(k\Gamma)$ に通常とは異なる braiding が入っているから, 普遍 R -行列を強調して $\text{Rep}(k\Gamma, R)$ と書いた). ここで Yetter-Drinfeld 圏

$$\mathcal{U} := {}^{\mathfrak{B}(V)}_{\mathfrak{B}(V)}\mathcal{YD}(\text{Rep}(k\Gamma, R))$$

を考えよう. 組みひもテンソル圏 $\mathcal{U}$ は fiber functor を持つから, ある準三角ホップ代数 U が存在して $\mathcal{U} \approx \text{Rep}(U)$ となる. ところが――

- (1) 我々の結果より, $\mathcal{U}' \approx \text{Rep}(k\Gamma, R)'$ である. ゆえに, U が factorizable であることと $(k\Gamma, R)$ が factorizable であることは同値である.
- (2) Majid [Maj99] の double-bosonization を用いると, ホップ代数 U を具体的に表示することができ, 結果として $U \cong u_q(\mathfrak{g})$ である.

以上の結果を用いると, 多くの q に対する $u_q(\mathfrak{g})$ が factorizable であることが示せる. 有限次元の Nichols 代数の分類に関する近年の結果 [AA17] を用いれば, $u_q(\mathfrak{g})$ とは異なる様々な factorizable Hopf algebra を構成できよう.

5. 今後の展開

ここまでで紹介した結果により, モジュラー性はこれまで考えられていたよりかは簡単に判定可能であることが分かった. また, “非半単純” なモジュラーテンソル圏の新しい例を構成することも容易になった. 紙数の都合上, 予講では有限組みひもテンソル圏の非退化性の特徴づけとその応用を中心に紹介した. 講演では,

時間が許せば、例えばフェアリンデ公式の“非半単純”モジュラーテンソル圏への一般化 [GR16, GR17] などの新しい結果についても紹介したい。

参考文献

- [AA17] N. Andruskiewitsch and I. Angiono. On finite-dimensional Nichols algebras of diagonal type. [arXiv:1707.08387](#).
- [Bes97] Y. N. Bespalov. Crossed modules and quantum groups in braided categories. *Appl. Categ. Structures*, 5(2):155–204, 1997.
- [BK01] B. Bakalov and A. Kirillov, *Lectures on tensor categories and modular functors*, volume 21 of *University Lecture Series*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2001.
- [Bru00] A. Bruguières. Catégories prémodulaires, modularisations et invariants des variétés de dimension 3. *Math. Ann.*, 316(2):215–236, 2000.
- [BW99] J. W. Barrett and B. W. Westbury. Spherical categories. *Adv. Math.*, 143(2):357–375, 1999.
- [CG17] T. Creutzig and T. Gannon. Logarithmic conformal field theory, log-modular tensor categories and modular forms. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 50(40), 2017.
- [CGR17] T. Creutzig, A. M. Gainutdinov, and I. Runkel. A quasi-Hopf algebra for the triplet vertex operator algebra. [arXiv:1712.07260](#).
- [DSS13] C. L. Douglas, C. Schommer-Pries, and N. Snyder. Dualizable tensor categories. [arXiv:1312.7188](#).
- [EG98] P. Etingof and S. Gelaki. Some properties of finite-dimensional semisimple Hopf algebras. *Math. Res. Lett.*, 5(1-2):191–197, 1998.
- [EGNO15] P. Etingof, S. Gelaki, D. Nikshych, and V. Ostrik. *Tensor categories*, volume 205 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2015.
- [ENO04] P. Etingof, D. Nikshych, and V. Ostrik. An analogue of Radford’s S^4 formula for finite tensor categories. *Int. Math. Res. Not.*, (54):2915–2933, 2004.
- [ENO05] P. Etingof, D. Nikshych, and V. Ostrik. On fusion categories. *Ann. of Math. (2)*, 162(2):581–642, 2005.
- [EO04] P. Etingof and V. Ostrik. Finite tensor categories. *Mosc. Math. J.*, 4(3):627–654, 782–783, 2004.
- [FGR17a] V. Farsad, A. M. Gainutdinov, and I. Runkel. $SL(2, \mathbb{Z})$ -action for ribbon quasi-Hopf algebras. [arXiv:1702.01086](#).
- [FGR17b] V. Farsad, A. M. Gainutdinov, and I. Runkel. The symplectic fermion ribbon quasi-Hopf algebra and the $SL(2, \mathbb{Z})$ -action on its centre. [arXiv:1706.08164](#).
- [GR16] A. M. Gainutdinov and I. Runkel. The non-semisimple Verlinde formula and pseudo-trace functions. [arXiv:1605.04448](#).
- [GR17] A. M. Gainutdinov and I. Runkel. Projective objects and the modified trace in factorisable finite tensor categories. [arXiv:1703.00150](#).
- [Kas95] C. Kassel. *Quantum groups*, volume 155 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 1995.

- [KL01] T. Kerler and V. V. Lyubashenko. *Non-semisimple topological quantum field theories for 3-manifolds with corners*, volume 1765 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 2001.
- [KR93] L. H. Kauffman and D. E. Radford. A necessary and sufficient condition for a finite-dimensional Drinfel'd double to be a ribbon Hopf algebra. *J. Algebra*, 159(1):98–114, 1993.
- [Lyu95a] V. V. Lyubashenko. Modular transformations for tensor categories. *J. Pure Appl. Algebra*, 98(3):279–327, 1995.
- [Lyu95b] V. V. Lyubashenko. Modular properties of ribbon abelian categories. In *Proceedings of the 2nd Gauss Symposium. Conference A: Mathematics and Theoretical Physics (Munich, 1993)*, Sympos. Gaussiana, pages 529–579, Berlin, 1995. de Gruyter.
- [Lyu95c] V. V. Lyubashenko. Tangles and Hopf algebras in braided categories. *J. Pure Appl. Algebra*, 98(3):245–278, 1995.
- [Lyu95d] V. V. Lyubashenko. Invariants of 3-manifolds and projective representations of mapping class groups via quantum groups at roots of unity. *Comm. Math. Phys.*, 172(3):467–516, 1995.
- [Lyu99] V. V. Lyubashenko. Squared Hopf algebras. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 142(677):x+180, 1999.
- [Maj92] S. Majid. Braided groups and duals of monoidal categories. In *Category theory 1991 (Montreal, PQ, 1991)*, volume 13 of *CMS Conf. Proc.*, pages 329–343. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1992.
- [Maj99] S. Majid. Double-bosonization of braided groups and the construction of $U_q(\mathfrak{g})$. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 125(1):151–192, 1999.
- [ML98] S. Mac Lane. *Categories for the working mathematician*, volume 5 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 2nd edition, 1998.
- [Müg03a] M. Müger. From subfactors to categories and topology. I. Frobenius algebras in and Morita equivalence of tensor categories. *J. Pure Appl. Algebra*, 180(1-2):81–157, 2003.
- [Müg03b] M. Müger. From subfactors to categories and topology. II. The quantum double of tensor categories and subfactors. *J. Pure Appl. Algebra*, 180(1-2):159–219, 2003.
- [RSTS88] N. Y. Reshetikhin and M. A. Semenov-Tian-Shansky. Quantum R -matrices and factorization problems. *J. Geom. Phys.*, 5(4):533–550 (1989), 1988.
- [RW17] E. C. Rowell and Z. Wang. Mathematics of Topological Quantum Computing. [arXiv:1705.06206](#).
- [Sch01] H.-J. Schneider. Some properties of factorizable Hopf algebras. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 129(7):1891–1898 (electronic), 2001.
- [Shi16] K. Shimizu. Non-degeneracy conditions for braided finite tensor categories. [arXiv:1602.06534](#)
- [Shi17a] K. Shimizu. Integrals for finite tensor categories. [arXiv:1702.02425](#).
- [Shi17b] K. Shimizu. Ribbon structures of the Drinfeld center. [arXiv:1707.09691](#).
- [Shi17c] K. Shimizu. The monoidal center and the character algebra. *J. Pure Appl. Algebra*, 221(9):2338–2371, 2017.