

数論的スキームに対する新しいコホモロジー理論 とその応用

佐藤 周友 (中央大学)

1. 動機と背景など

動機 1: 不分岐類体論. 数論的に興味のあるスキーム X のアーベル基本群 (= エタール基本群のアーベル化) を, X に内在する不変量で記述するのが, スキーム X の不分岐類体論である. 代表的な例は, X が $\mathbb{Z}$ 上固有的な正則スキームの場合で, 修正¹ アーベル基本群 $\pi_1^{\text{ab}}(X)^\sim$ は 0 サイクルの Chow 群

$$\text{CH}_0(X) := \text{Coker} \left(\text{div}_X : \bigoplus_{x \in X_1} \kappa(x)^\times \rightarrow \bigoplus_{x \in X_0} \mathbb{Z} \right)$$

で記述される². すなわち, 閉点 $x \in X$ の同値類を, x での Frobenius 置換にうつす写像

$$\varrho_X : \text{CH}_0(X) \longrightarrow \pi_1^{\text{ab}}(X)^\sim$$

が存在し, ϱ_X は単射, かつ像は $\pi_1^{\text{ab}}(X)$ の副有限位相に関して稠密³である (高木, Artin, Lang [23], Bloch [2], 加藤・斎藤 [19]).

問 1 ϱ_X はエタールコホモロジーへのサイクル写像として解釈できるか?

X が有限体上の多様体の場合, Poincaré 双対性により, この問いの命題は真である.

動機 2: 加藤複体. 次に, n, j を整数とし, $n \geq 1, i \geq 0$ とする. 体 F のスペクトラム $x = \text{Spec}(F)$ 上エタール層の複体 $\mathbb{Z}/n(i) = \mathbb{Z}/n(i)_x$ を次のように定める.

$$\mathbb{Z}/n(i) := \begin{cases} \mu_n^{\otimes i} & (n \text{ が } F \text{ で可逆のとき}) \\ W_r \Omega_{x, \log}^i[-i] \oplus \mu_m^{\otimes i} & (\text{ch}(F) = p > 0, n = p^r m, (p, m) = 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

ただし, μ_n は 1 の n 乗根のなすエタール層を表す. また, $W_r \Omega_{x, \log}^i$ は対数的 Hodge-Witt 層 [14] とよばれるエタール層であり, 幾何的点 $\bar{x} = \text{Spec}(\bar{F}) \rightarrow x$ での茎は次のように記述される [4].

$$(W_r \Omega_{x, \log}^i)_{\bar{x}} \cong K_i^M(\bar{F})/p^r \quad (K_i^M \text{ は } i \text{ 次の Milnor } K \text{ 群})$$

エタールコホモロジー (体 F の Galois コホモロジー) $H^q(x, \mathbb{Z}/n(i))$ は, 体 F の重要な数論的不変量である. 例えば, 次の標準同型が成り立つ.

$$\begin{aligned} H^1(x, \mathbb{Z}/n) &\cong \text{Hom}_{\text{cont}}(\text{Gal}(\bar{F}/F), \mathbb{Z}/n), & H^2(x, \mathbb{Z}/n(1)) &\cong {}_n\text{Br}(F), \\ H^1(x, \mathbb{Z}/n(1)) &\cong F^\times/n, & H^i(x, \mathbb{Z}/n(i)) &\cong K_i^M(F)/n \quad ([30], [51]) \end{aligned}$$

キーワード: 数論的スキーム, エタールコホモロジー, 加藤複体, Lichtenbaum の公理

¹ X が $\mathbb{R}$ 値点をもつ場合には, すべての $\mathbb{R}$ 値点の寄与に関して $\pi_1^{\text{ab}}(X)$ を修正する.

² X_j は X の点 x で, 閉包 $\overline{\{x\}}$ が j 次元になるような点全体の集合を表す. $\kappa(x)$ は $\mathcal{O}_{X, x}$ の剰余体を表す. div_X は, 各 $x \in X_1$ の閉包 $\overline{\{x\}} \subset X$ の上で有理関数の因子を考える写像である.

³ X が $\mathbb{Z}$ 上平坦な場合には, $\pi_1^{\text{ab}}(X)$ は位数有限であり, $\text{Im}(\varrho_X)$ の稠密性は, ϱ_X の全射性に他ならない.

論文[18]において、加藤氏は適当な仮定⁴をみたすネータースキーム X に対し数論的 Bloch-Ogus 複体 (いわゆる加藤複体) とよばれる X の点たちのエタールコホモロジーのなす複体 $C_n^{q,i}(X)$ を導入した. ただし, $q = i + 1$ の場合には, 「任意の $x \in X_0$ に対し $[\kappa(x) : \kappa(x)^p] \leq p^i$ (ただし, $p := \text{ch}(x)$), または n は X 上可逆」と仮定する.

$$\begin{aligned} C_n^{q,i}(X) : \quad \cdots \xrightarrow{\partial} \bigoplus_{x \in X_j} H^{q+j}(x, \mathbb{Z}/n(i+j)) \xrightarrow{\partial} \cdots \\ \xrightarrow{\partial} \bigoplus_{x \in X_1} H^{q+1}(x, \mathbb{Z}/n(i+1)) \xrightarrow{\partial} \bigoplus_{x \in X_0} H^q(x, \mathbb{Z}/n(i)) \end{aligned}$$

ここで, ∂ は Galois コホモロジーの境界写像とよばれるものである. $x \in X_j$ に関する直和の項を次数 $-j$ と定めることによって, $C_n^{q,i}(X)$ を双対鎖複体 (cochain complex) とみなす.

予想 1.3 ([18] Conjecture 0.5) $\mathbb{Z}$ 上固有的な正則スキーム X に対し, $H^q(\widehat{C}_n^{1,0}(X)) = 0$ ($q < 0$), かつ $H^0(\widehat{C}_n^{1,0}(X)) \cong \mathbb{Z}/n$ である⁵.

$\dim(X) = 1$ の場合, 予想の主張は大域体上の中心的単純環に対する Hasse 原理を含む古典的類体論の主定理の一つであり (以下の例 1.4 参照), $\dim(X) = 2$ の場合は二次元の不分岐類体論を用いて加藤氏自身が証明している ([18] Theorem 0.7). $\dim(X) \geq 3$ の場合については, [6], [15], [16], [21] を参照して頂きたい. この講演では, この予想に対する大きな寄与はないのでこれ以上立ち入らず, むしろ加藤複体が, スキームのコホモロジーの立場から見て, どのような性質のものなのかを問題にしたい.

問 2 X が正則であるとき, $C_n^{q,i}(X)$ を Cousin 複体にもつような, エタールコホモロジーの係数 (層あるいは層の複体) は存在するか?

ここで, $\mathcal{F}$ を X 上の層, あるいは層の複体とすると, $\mathcal{F}$ 係数のエタールコホモロジーの Cousin 複体とは, コホモロジーの局所化が与えるスペクトル系列

$$E_1^{j,q} = \bigoplus_{x \in X^j} H_x^{j+q}(\text{Spec}(\mathcal{O}_{X,x}), \mathcal{F}) \implies H^{j+q}(X, \mathcal{F})$$

の E_1 項のなす複体である⁶.

$$E_1^{*,q}(X, \mathcal{F}) : \quad \cdots \xrightarrow{d} E_1^{0,q} \xrightarrow{d} E_1^{1,q} \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} E_1^{j,q} \xrightarrow{d} \cdots$$

例 1.4 K を代数体とし, O_K をその整数環とする. $X = \text{Spec}(O_K)$, $\mathcal{F} = \mathbb{G}_m$ (可逆な正則関数のエタール層) の場合, Cousin 複体 $E_1^{*,q}(X, \mathbb{G}_m)$ は $q < 0$ または $q = 1$ なら自明であり, $q = 0, 2, 3, \dots$ ならそれぞれ次のようになる (Hilbert の定理 90 などを用いた計算による).

$$E_1^{*,0}(X, \mathbb{G}_m) : \quad K^\times \xrightarrow{d} \bigoplus_{x \in X^1} \mathbb{Z}$$

⁴ 単次元的な正則スキーム ([40] 演習問題 0.4 参照), あるいはそのようなスキーム上有限型なスキームがこの仮定に当てはまる. excellent でなくてよい. 代表例は, $\mathbb{Z}$ 上あるいは体上有限型なスキームである.

⁵ $\widehat{C}_n^{q,i}(X)$ は, 実素点の寄与に関して $C_n^{q,i}(X)$ に修正を施した複体である. 2-torsion を除けば, 常に $\widehat{C}_n^{q,i}(X) \cong C_n^{q,i}(X)$ である.

⁶ X^j は, $\dim(\mathcal{O}_{X,x}) = j$ となるような $x \in X$ 全体の集合を表す. $E_1^{*,q}(X, \mathcal{F})$ は $E_1^{j,q}$ を次数 j とする双対鎖複体である. $C_n^{q,i}(X)$ と $E_1^{*,q}(X, \mathcal{F})$ を比較する際には, 厳密には次数のシフト (とそれに伴う微分写像の符号の変更) を考慮する.

$$E_1^{*,2}(X, \mathbb{G}_m) : \text{Br}(K) \xrightarrow{d} \bigoplus_{x \in X^1} H^1(x, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$

$$E_1^{*,q}(X, \mathbb{G}_m) : H^q(K, \mathbb{G}_m) \longrightarrow 0 \quad (q \geq 3)$$

したがって、層の複体 $\mathcal{K}_n := \mathbb{G}_m \otimes^{\mathbb{L}} \mathbb{Z}/n$ を係数とした Cousin 複体 $E_1^{*,q}(X, \mathcal{K}_n)$ は、 $q < -1$ なら自明であり、 $q \geq -1$ なら次のようになる。

$$E_1^{*, -1}(X, \mathcal{K}_n) : \mu_n(K) \xrightarrow{d} 0$$

$$E_1^{*,0}(X, \mathcal{K}_n) : K^\times/n \xrightarrow{d} \bigoplus_{x \in X^1} \mathbb{Z}/n$$

$$E_1^{*,1}(X, \mathcal{K}_n) : {}_n\text{Br}(K) \xrightarrow{d} \bigoplus_{x \in X^1} H^1(x, \mathbb{Z}/n)$$

$$E_1^{*,q}(X, \mathcal{K}_n) : H^{q+1}(K, \mu_n) \longrightarrow 0 \quad (q \geq 2)$$

これらの複体は、微分写像の符号の違いを無視すれば、それぞれ

$$C_n^{-1,0}(X), \quad C_n^{0,0}(X), \quad C_n^{1,0}(X), \quad C_n^{q,0}(X) \quad (q \geq 2)$$

に同型であり、上記の間2は $X = \text{Spec}(O_K)$ かつ $i = 0$ の場合に正しい。

また、Artin-Verdier の双対性定理 ([29], [31]) は、米田ペアリング⁷

$$H_c^q(X, \mathbb{Z}/n) \times \text{Ext}_X^{3-q}(\mathbb{Z}/n, \mathbb{G}_m) \longrightarrow H_c^3(X, \mathbb{G}_m) \cong \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

が有限アーベル群の非退化ペアリングであることを主張している。この事実と層の導来圏での同型 $\mathcal{K}_n \cong R\mathcal{H}om(\mathbb{Z}/n, \mathbb{G}_m)[1]$ から、同型

$$H^1(X, \mathcal{K}_n) \cong \text{Ext}_X^2(\mathbb{Z}/n, \mathbb{G}_m) \cong \text{Hom}(H_c^1(X, \mathbb{Z}/n), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$

が成り立ち、類体論の相互写像 ϱ_X は次の可換図式に当てはまることが分かる。

$$\begin{array}{ccc} \text{CH}_0(X) & \xrightarrow{\sim} & H^1(X, \mathbb{G}_m) \xrightarrow{c_1} H^1(X, \mathcal{K}_n) \\ \varrho_X \downarrow & & \downarrow \cong \\ \pi_1^{\text{ab}}(X) \sim / n & \hookrightarrow & H_c^1(X, \mathbb{Z}/n)^\vee \end{array}$$

ただし、 c_1 は因子の第1 Chern 類写像 (サイクル写像) であり、 K が総虚か n が奇数なら、下側の水平な矢印は同型である。問1の主張はこの意味で正しい⁸。

2. Lichtenbaum 複体の公理

高次元の数論的スキーム ($\mathbb{Z}$ 上有限型な正則スキーム) の場合に問1, 問2を考えるために、Lichtenbaum 複体の公理を導入する。 X をネーター正則スキームとする。論文 [26], [27], [28] において、Lichtenbaum は以下の公理 **L0**~**L7** をみたす X 上のエタール層の複体の族 $\{\mathbb{Z}(i)\}_{i \geq 0}$ が存在するという予想を定式化し、 $\mathbb{Z}(2)$ の候補を代数的 K 理論を用いて構成した。

⁷ $\mathbb{Z}$ 上有限型なスキーム Y に対し、 $H_c^*(Y, -)$ は Y のコンパクト台付きエタールコホモロジーを表す。 $X = \text{Spec}(O_K)$ の Artin-Verdier 双対性定理は代数体 K およびその局所化たちの類体論の帰結である。

⁸ Artin-Verdier 双対性は高次元の数論的スキームに対して一般化されている [46], [9]。問1はこれらの結果によって (例1.4の最後の図式と同様の図式を考えれば) 正しい、というのが一つの答えである。ちなみに、高次元の数論的スキームでは、 $\mathbb{G}_m$ ではなく次節で述べる Lichtenbaum 複体、あるいは Bloch のサイクル複体が双対化複体 (dualizing complex) の役割を果たす。

L0. $\mathbb{Z}(0) = \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}(1) = \mathbb{G}_m[-1]$

L1. $i \geq 1$ ならば, 次数 $1 \leq q \leq i$ 以外では, コホモロジー層 $\mathcal{H}^q(\mathbb{Z}(i))$ は 0 である.

L2. $\epsilon: X_{\text{ét}} \rightarrow X_{\text{Zar}}$ をエタールサイトから Zariski サイトへの自然な連続写像とすると
き, $R^{i+1}\epsilon_*\mathbb{Z}(i) = 0$ である. ($i = 1$ の場合は Hilbert の定理 90, $i \geq 2$ ではその類似)

L3. n を X 上で可逆な自然数とすると, エタール層の導来圏において, 完全三角形

$$\mathbb{Z}(i) \xrightarrow{\times n} \mathbb{Z}(i) \longrightarrow \mu_n^{\otimes i} \longrightarrow \mathbb{Z}(i)[1]$$

が存在する. ($i = 1$ の場合は Kummer 理論, $i \geq 2$ ではその類似)

L3'. X が $\mathbb{F}_p$ 上の正則スキームならば, エタール層の導来圏において, 完全三角形

$$\mathbb{Z}(i) \xrightarrow{\times p^r} \mathbb{Z}(i) \longrightarrow W_r\Omega_{X,\log}^i[-i] \longrightarrow \mathbb{Z}(i)[1]$$

が存在する. (**L3** の p 準素類似)

L4. エタール層の導来圏において, 可換かつ結合的な積構造

$$\mathbb{Z}(i) \otimes^{\mathbb{L}} \mathbb{Z}(j) \longrightarrow \mathbb{Z}(i+j)$$

が存在する.

L5. 次数 q でのコホモロジー層 $\mathcal{H}^q(\mathbb{Z}(i))$ は, 代数的 K 群の (ある部分商の) エタール
層化 $\text{gr}_{\gamma}^i K_{2i-q}$ と, $\otimes \mathbb{Z} \left[\frac{1}{(i-1)!} \right]$ で同型である⁹. (代数的 K 群との比較)

L6. 次数 i でのコホモロジー層 $\mathcal{H}^i(\mathbb{Z}(i))$ は, Milnor K 群のエタール層化 K_i^M と同型で
ある. (Milnor K 群との比較)

L7. $\alpha: Y \hookrightarrow X$ を正則スキームの閉埋め込みとすると, $(Y$ 上の) エタール層の導来
圏において同型

$$\mathbb{Z}(i-c)_Y[-2c] \cong \tau_{\leq i+c} R\alpha^! \mathbb{Z}(i)_X \quad (c := \text{codim}_X(Y))$$

が成り立つ. (ある種の純粋性)

X が体上の正則スキームの場合, Bloch のサイクル複体 [3] のエタール層化¹⁰

$$\mathbb{Z}(i)_X^{\text{cyc}} : (X \text{ 上エタールなスキーム}) U \longmapsto z^i(U, *)[-2i]$$

は, **L0**, **L2**~**L4**, **L7** をみだし, **L1** については $q > i$ でのコホモロジー層 $\mathcal{H}^q(\mathbb{Z}(i)_X^{\text{cyc}})$ の
消滅をみだす ([3], [7], [10], [37], [45]). **L5** については, $\otimes \mathbb{Q}$ で成立する¹¹. **L6** について
は X が無限体上の正則スキームの場合に正しい [20]. 一方で, X が Dedekind 環上の正
則スキームの場合, $\mathbb{Z}(i)$ の候補として $\mathbb{Z}(i)_X^{\text{cyc}}$ を考えることはできるが, **L0** 以外は分かっ
ていないことの方が多い¹².

⁹ $i \geq 2$ かつ $q \leq 0$ の場合の **L5** と **L1** の整合性は, Beilinson-Soulé の消滅予想とよばれる未解決の問題に
他ならない.

¹⁰ X が体上有限型スームズならば, Suslin-Voevodsky のモチーフ複体と導来圏で同型である [47], [51].

¹¹ X が体上有限型スームズかつ d 次元なら, $\otimes \mathbb{Z} \left[\frac{1}{N_{i,q,d}!} \right]$ で同型 (ただし, $N_{i,q,d} = \max\{d+i-q+1, i-1\}$)
である [25].

¹² X が Dedekind 環上有限型スームズならば, $\mathbb{Z}(i)_X^{\text{cyc}}$ は **L2**, **L3**, **L7** をみだし, **L1** についても $q > i$ でのコ
ホモロジー層の消滅をみだす [8].

さて, X をネーター正則スキーム, p を X 上で可逆でない素数とし,

$$Y := (X \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{F}_p)_{\text{red}}, \quad U := X \setminus Y = X[p^{-1}]$$

とおく (red は被約な閉部分スキーム構造を与えたことを意味する). 上記の Lichtenbaum の公理のうち, いくつかを用いて $\mathbb{Z}/p^r(i)_X := \mathbb{Z}(i)_X \otimes^{\mathbb{L}} \mathbb{Z}/p^r$ がみたすべき公理を考える. ただし, X が $\mathbb{F}_p$ 上のスキームならば (すなわち $X = Y$ ならば), 公理 **L3'** によって

$$\mathbb{Z}(i)_X \otimes^{\mathbb{L}} \mathbb{Z}/p^r \cong W_r \Omega_{X, \log}^i[-i]$$

であり, 何も新しくはないから, $X \neq Y$ (すなわち $U \neq \emptyset$) と仮定しておく.

T1. 同型 $t: \mathbb{Z}/p^r(i)_X|_U \xrightarrow{\sim} \mu_{p^r}^{\otimes i}$ が存在する. ($\mathbb{Z}(i)_U$ に対する **L3** の帰結)

T2. 次数 $0 \leq q \leq i$ 以外では, $\mathcal{H}^q(\mathbb{Z}/p^r(i)_X) = 0$ である. (**L1** の帰結)

T3. $\alpha: T \hookrightarrow X$ を正則かつ連結な局所閉部分スキームとし, T を $\mathbb{F}_p$ 上のスキームと仮定するとき, T 上のエタール層の導来圏において同型

$$\alpha!: W_r \Omega_{T, \log}^{i-c}[-i-c] \xrightarrow{\sim} \tau_{\leq i+c} R\alpha^! \mathbb{Z}/p^r(i)_X \quad (c := \text{codim}_X(T))$$

が成り立つ. (**L7** と, $\mathbb{Z}(i)_T$ に対する **L3'** からの類推)

T4. X 上エタールなスキーム Z と, $x \in \overline{\{y\}}$, $\text{ch}(x) = p$ をみたす 2 点 $x \in Z^c$, $y \in Z^{c-1}$ に対し, 次のエタールコホモロジーの図式は反可換 (どれか一つの矢印を (-1) 倍すれば可換) である.

$$\begin{array}{ccc} H^{i-c+1}(y, \mathbb{Z}/p^r(i-c+1)) & \xrightarrow{\partial_{y,x}} & H^{i-c}(x, \mathbb{Z}/p^r(i-c)) \\ \beta_{y!} \downarrow \cong & & \cong \downarrow \beta_{x!} \\ H_y^{i+c-1}(\text{Spec}(\mathcal{O}_{Z,y}), \mathbb{Z}/p^r(i)) & \xrightarrow{\delta_{y,x}} & H_x^{i+c}(\text{Spec}(\mathcal{O}_{Z,x}), \mathbb{Z}/p^r(i)) \end{array}$$

ただし, $w \in Z$ に対し, $\beta_w: w \hookrightarrow \text{Spec}(\mathcal{O}_{Z,w})$ は自然な閉埋め込みを表す. $\text{ch}(w) = p$ ならば, $\beta_{w!}$ は **T3** の同型がひき起こす同型を表し, $\text{ch}(w) = 0$ ならば, $\beta_{w!}$ は **T1** の同型 t と絶対純粋性 ([7], [37]) による同型を表す. $\partial_{y,x}$ は Galois コホモロジーの境界写像を, $\delta_{y,x}$ はエタールコホモロジーの局所化完全系列の接続準同型を表す.

補足 2.1 (1) Cousin 複体 $E_1^{*,i}(X, \mathbb{Z}/p^r(i)_X)$ の微分写像は $\delta_{y,x}$ たちを集めたものである.

(2) $\text{ch}(y) \neq p$, $\text{ch}(x) \neq p$ の場合の **T4** の図式の反可換性は [17] において示されている.

(3) **T4** は Lichtenbaum の公理の帰結・類推ではなく, 「 $\mathcal{F} = \mathbb{Z}/p^r(i)_X$ が問 2 の $q = i$, $n = p^r$ の場合の解を与える」という条件である.

Milne の考察 ([32] Remark 2.7) を一般化することにより, 次のことが分かる.

命題 2.2 $j: U \hookrightarrow X$, $\alpha: Y \hookrightarrow X$ をそれぞれ自然な開埋め込みと閉埋め込みとし, **T1–T4** をみたす $\mathbb{Z}/p^r(i)_X$ が存在すると仮定する. このとき,

(1) 次のエタール層の系列は完全である.

$$R^i j_* \mu_{p^r}^{\otimes i} \xrightarrow{\partial} \bigoplus_{y \in Y^0} \beta_{y*} W_r \Omega_{y, \log}^{i-1} \xrightarrow{\partial} \bigoplus_{x \in Y^1} \beta_{x*} W_r \Omega_{x, \log}^{i-2}, \quad (\text{あ})$$

ただし, 各 $z \in Y$ に対し β_z は自然な射 $z \rightarrow Y$ を表し, (あ) の各矢印は Galois コホモロジーの境界写像を層化したものである.

(2) X 上のエタール層の導来圏において、次の形の完全三角形が存在する.

$$\alpha_* \nu_{Y,r}^{i-1}[-i-1] \xrightarrow{g} \mathbb{Z}/p^r(i)_X \xrightarrow{t'} \tau_{\leq i} Rj_* \mu_{p^r}^{\otimes i} \xrightarrow{\sigma_{r,i}} \alpha_* \nu_{Y,r}^{i-1}[-i]$$

ここで、 t' は **T1** の t と **T2** がひき起こす射であり、 $\nu_{Y,r}^{i-1}$ は (あ) の右側の準同型 ∂ の核である (自然に Y 上の層とみなした). $\sigma_{r,i}$ は完全系列 (あ) がひき起こす射である.

系 2.3 T1–T4 をみたす $\mathbb{Z}/p^r(i)_X$ と **T1** の同型 t の組 $(\mathbb{Z}/p^r(i)_X, t)$ は、エタール層の導来圏において一意的な同型を除き一意的である.

3. 基本的な諸結果

前節で述べた4つの公理 **T1–T4** に関する基本的な結果は次の通りである. これは §1 で提起した問2の $q = i, n = p^r$ の場合に対する解になっている.

定理 3.1 ([41], [42]) A を混標数の Dedekind 環とし、 X を A 上有限型平坦な正則スキームで、次の条件 (★) をみたすものとする.

(★) $\text{Spec}(A)$ の標数 p の閉点全体のなす集合を Σ と表したとき、 $X \times_{\text{Spec}(A)} \Sigma$ が被約で (すなわち有効 Cartier 因子として Y に一致し)、かつ X 上の正規交叉因子である¹³.

このとき、**T1–T4** をみたす X 上のエタール層の複体 $\mathfrak{T}_r(i)_X$ が存在し、さらに次が成り立つ.

T5. $\mathbb{Z}/p^r$ 加群のエタール層の導来圏において、可換かつ結合的な積構造

$$\mathfrak{T}_r(i)_X \otimes^{\mathbb{L}} \mathfrak{T}_r(j)_X \longrightarrow \mathfrak{T}_r(i+j)_X$$

で、 U 上のエタール層の自然な同型 $\mu_{p^r}^{\otimes i} \otimes \mu_{p^r}^{\otimes j} \cong \mu_{p^r}^{\otimes i+j}$ を延長するものが一意的に存在する. (**L4** の類似)

T6. 任意の射 $f: X' \rightarrow X$ に関する反変関手性

T7. 任意の有限型かつ分離的な射 $f: X' \rightarrow X$ に関する共変関手性

($\mathfrak{T}_r(i)_X$ の構成と定理 3.1 の証明の概略)

- Y が X 上の normal crossing divisor であること (仮定 (★) に含まれる) を用いて、命題 2.2 (1) の系列 (あ) が複体かつ完全であることを示す. ここで、 Y の既約成分やその交わりたち (標数 p のスムーズ多様体) の対数的 Hodge-Witt 層に対し、Gros-Suwa の定理 [11] を本質的に用いる. (あ) が複体であることから命題 2.2 (2) の $\sigma_{r,i}$ の存在が分かる.
- 命題 2.2 の記号のもとで、 $\mathfrak{T}_r(i)_X$ を次のように定義する.

$$\mathfrak{T}_r(i)_X := \text{Cone}(\sigma_{r,i} : \tau_{\leq i} Rj_* \mu_{p^r}^{\otimes i} \rightarrow \alpha_* \nu_{Y,r}^{i-1}[-i])[-1]$$

(あ) の完全性から、 $\mathfrak{T}_r(i)_X$ は **T2** をみたす. **T1** をみたすことは自明である.

- **T3** の α_i の定義を具体的に与えて、 $\mathfrak{T}_r(i)_X$ が **T3**, **T4** をみたすことを示す. **T3** の証明で鍵となるのは、 p 進消滅輪体の層 $\alpha^* R^q j_* \mu_p^{\otimes q}$ ($q \geq i$) の構造が具体的に分かっていること (Bloch-Kato-Hyodo の定理 [4], [12]) である.

¹³ 正則スキーム X 上の被約な因子 D が正規交叉因子であるとは、 D の各点 x でエタール近傍 $g: V \rightarrow X$ と点 $v \in g^{-1}(x)$ が存在し、 $g^{-1}(D) \subset V$ が局所環 $\mathcal{O}_{V,v}$ の正則パラメータ (極大イデアル $\mathfrak{m}_v$ の元たちで、余接空間 $\mathfrak{m}_v/\mathfrak{m}_v^2$ において一次独立なもの) で定義されることをいう.

例 3.2 $i = 1$ の場合, $\mathfrak{T}_r(1)_X \cong \mathbb{G}_m \otimes^{\mathbb{L}} \mathbb{Z}/p^r[-1]$ である. したがって, **T3** の純粋性は, Brauer 群の p 準素部分の純粋性

$$\mathrm{Br}(X \setminus T)\{p\} \cong \mathrm{Br}(X)\{p\} \quad (\mathrm{codim}_X(T) \geq 2)$$

を導く.

補足 3.3 Lichtenbaum の複体 $\mathbb{Z}(i)_X$ の候補としては, 前節でも述べたように, Bloch のサイクル複体のエタール層化 $\mathbb{Z}(i)_X^{\mathrm{cyc}}$ が有力である. これを用いて定義した

$$\mathbb{Z}/p^r(i)_X^{\mathrm{cyc}} := \mathbb{Z}(i)_X^{\mathrm{cyc}} \otimes \mathbb{Z}/p^r$$

との混同を避けるために, $\mathfrak{T}_r(i)_X$ という記号を用いている. 当然ながら, 層の導来圏において

$$\mathbb{Z}/p^r(i)_X^{\mathrm{cyc}} \cong \mathfrak{T}_r(i)_X$$

であろうと予想され ([42] Conjecture 1.4.1), X が A 上有限型スムーズならば, Geisser 氏の結果により予想は正しい ([8] Theorems 1.2 (2), (4), 1.3). 一般には, 層の導来圏での射

$$\mathbb{Z}/p^r(i)_X^{\mathrm{cyc}} \longrightarrow \mathfrak{T}_r(i)_X \longrightarrow \mathbb{Z}/p^r(i)_X^{\mathrm{cyc}}$$

が存在する. 左側の矢印はサイクル射 [43], 右側の矢印は Zhong 氏による射である [53]. $\mathbb{Z}/p^r(i)_X^{\mathrm{cyc}}$ に対する Gersten 予想を仮定すれば, これらの射は同型である [53].

定理 3.4 (双対性 [42]) A を代数的整数環とする. X を A 上固有的な等次元正則スキームとし, X は素数 p に対し, 定理 3.1 の $(\star)$ をみたすと仮定する. $d = \dim(X)$ とおくと, エタールコホモロジーのカップ積によるペアリング

$$H_c^q(X, \mathfrak{T}_r(i)) \times H_c^{2d+1-q}(X, \mathfrak{T}_r(d-i)) \longrightarrow H_c^{2d+1}(X, \mathfrak{T}_r(d)) \cong \mathbb{Z}/p^r$$

は有限アーベル p 群の非退化ペアリングである.

$Y := (X \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{F}_p)_{\mathrm{red}}$, $U := X \setminus Y$ とおくと, Artin-Verdier 双対性と絶対純粋性などから, カップ積によるペアリング

$$H_c^q(U, \mu_{p^r}^{\otimes i}) \times H_c^{2d+1-q}(U, \mu_{p^r}^{\otimes d-i}) \longrightarrow H_c^{2d+1}(U, \mu_{p^r}^{\otimes d}) \cong \mathbb{Z}/p^r$$

は有限アーベル群の非退化ペアリングである. この事実により, 定理 3.4 の双対性の主張は次の双対性に帰着される.

定理 3.5 (双対性 [42]) 定理 3.4 の状況で, $\Sigma \subset \mathrm{Spec}(A)$ を標数 p の閉点すべての集合とし, $X_{\Sigma} := \coprod_{s \in \Sigma} X \otimes_A A_s (= X \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_p)$ とおく. ただし, A_s は A の s での完備化である. このとき, エタールコホモロジーのカップ積によるペアリング

$$H^q(X_{\Sigma}, \mathfrak{T}_r(i)) \times H_Y^{2d+1-q}(X, \mathfrak{T}_r(d-i)) \longrightarrow H_Y^{2d+1}(X, \mathfrak{T}_r(d)) \cong \mathbb{Z}/p^r$$

は有限アーベル p 群の非退化ペアリングである.

定理 3.5 は, p 進消滅輪体の層に対する詳しい相互法則 (explicit reciprocity law) を準備して, Y 上の接続層のコホモロジーの Serre 双対性を積み上げることにより証明される.

系 3.6 定理 3.4 の状況で, 次の図式が可換である.

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{CH}_0(X) & \xrightarrow{\mathrm{cl}_X} & H^{2d}(X, \mathfrak{T}_r(d)) \\ \varrho_X \downarrow & & \downarrow \cong \\ \pi_1^{\mathrm{ab}}(X)/p^r & \hookrightarrow & H_c^1(X, \mathbb{Z}/p^r)^\vee \end{array}$$

ただし, cl_X は **T3**, **T4**, および Gabber の絶対純粋性から得られるサイクル写像である. 右側の縦の同型は定理 3.4 の双対性から得られる. また, $p \geq 3$ か $\mathrm{Hom}_{\mathrm{alg}}(A, \mathbb{R}) = \emptyset$ なら, 下側の水平な矢印は同型である.

系 3.6 は冒頭に述べた問 1 への一つの答えを与えている. また, $\mathcal{F} = \mathbb{Z}/p^r(d)_X$ ($d := \dim(X)$) が問 2 の $(q, i) = (1, 0)$, $n = p^r$ (かつ, 任意の $x \in X_0$ に対し, $\kappa(x)$ が完全体) の場合に対する解になっている [17] Theorem 5.10.1 (4).

4. p 進 regulator への応用

X が p 進整数環上のスムーズなスキームならば, 前節で構成を述べた $\mathfrak{T}_r(i)_X$ はサントミック複体 $s_r(i)_X$ と同型である [22]. サントミック複体は p 進表現, とりわけクリスタル表現の研究において重要なエタール層の複体であるが, クリスタル表現の拡大 (Bloch-Kato の Selmer 群) とも関係が深い. 一般の状況での $\mathfrak{T}_r(i)_X$ は, スキームの正則性が係数拡大で必ずしも保たれないという理由で, p 進表現そのものに応用することは考えにくい, Bloch-Kato の Selmer 群を調べる上では応用がある. ここでは, 複体 $\mathfrak{T}_r(i)_X$ の応用の中から, Selmer 群 H_f^1, H_g^1 に関する結果を二つ紹介する (以下の系 4.3, 定理 4.5 を参照).

K を代数体, O_K をその整数環とする. $G_K := \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ とおく. X を O_K 上平坦かつ射影的な正則スキームとし, X は素数 p に関して, 定理 3.1 の条件 $(\star)$ をみたしていると仮定する. 次のような $\mathbb{Q}_p$ ベクトル空間たちを考える.

$$\begin{aligned} V^q(i) &:= \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \varprojlim_{r \geq 1} H^q(X_{\overline{K}}, \mu_{p^r}^{\otimes i}) \\ H^q(X_K, \mathbb{Q}_p(i)) &:= \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \varprojlim_{r \geq 1} H^q(X_K, \mu_{p^r}^{\otimes i}) \\ H^q(X, \mathfrak{T}_{\mathbb{Q}_p}(i)) &:= \mathbb{Q}_p \otimes_{\mathbb{Z}_p} \varprojlim_{r \geq 1} H^q(X, \mathfrak{T}_r(i)) \end{aligned}$$

$V^q(i)$ と $H^q(X, \mathfrak{T}_{\mathbb{Q}_p}(i))$ は $\mathbb{Q}_p$ 上有限次元であるが, $H^q(X_K, \mathbb{Q}_p(i))$ は (特に, $2i - q = 1$ の場合など) 必ずしも有限次元ではない.

以下では簡単のため, $2i - q \geq 1$ と仮定する. Bloch-Kato の Selmer 群 [5] に関して重要な問題は玉河数予想であるが, その一部 (最初の部分) を述べると次の通りである.

予想 4.1 (玉河数予想 [5] の一部) (1) p 進 regulator 写像

$$\mathrm{reg}_{X_K}^{q,i} : K_{2i-q}(X_K) \xrightarrow{\mathrm{ch}^{q,i}} H^q(X_K, \mathbb{Q}_p(i)) \longrightarrow H^1(G_K, V^{q-1}(i))$$

の像は $H_g^1(G_K, V^{q-1}(i))$ に一致する. ただし, $\mathrm{ch}^{q,i}$ は Chern 指標を表す.

(2) 合成写像

$$\mathrm{reg}_X^{q,i} : K_{2i-q}(X) \longrightarrow K_{2i-q}(X_K) \xrightarrow{\mathrm{reg}_{X_K}^{q,i}} H^1(G_K, V^{q-1}(i))$$

の像は $H_f^1(G_K, V^{q-1}(i))$ に一致する.

予想 (1) に関しては, $\text{Im}(\text{reg}_{X_K}^{q,i}) \subset H_g^1(G_K, V^{q-1}(i))$ であることが分かっている [24], [34]. 予想 (2) に関しては, X が $v|p$ となる任意の素点 v で good reduction を持つ場合に, Niziol によって $\text{Im}(\text{reg}_X^{q,i}) \subset H^1(G_K, V^{q-1}(i))$ が示されている [36].

予想 4.1 に対する $\mathfrak{T}_r(i)_X$ の応用は,

(A) Niziol の結果の拡張

(B) $H_g^1(G_K, V^2(2))/\text{Im}(\text{reg}_{X_K}^{3,2})$ の記述 (正しくは $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$ 係数版で)

の二つである. まず (A) について述べる. 次のような合成写像を考える.

$$\Phi^{q,i} : H^q(X, \mathfrak{T}_{\mathbb{Q}_p}(i)) \longrightarrow H^q(X_K, \mathbb{Q}_p(i)) \longrightarrow H^1(G_K, V^{q-1}(i))$$

定理 4.2 ([43]) $Y := (X \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{F}_p)_{\text{red}}$ とおく. $p-2 \geq i$, および対数的クリスタルコホモロジー $H_{\log\text{-crys}}^{q-1}(Y/W)$ のモノドロミー予想を仮定する [13], [33]. このとき, $\text{Im}(\Phi^{q,i}) = H_f^1(G_K, V^{q-1}(i))$ である.

この定理の証明では, Fontaine-Jannsen 予想の証明 [49], および対数的サントミック複体と p 進消滅輪体の比較 [50] を本質的に用いている. 定理 4.2 と Chern 指標

$$\text{ch}^{q,i} : K_{2i-q}(X) \longrightarrow H^q(X, \mathfrak{T}_{\mathbb{Q}_p}(i))$$

の存在 ([43], [1]) を合わせると, 以下の系 4.3 が得られる.

系 4.3 定理 4.2 の仮定の下で, $\text{Im}(\text{reg}_X^{q,i}) \subset H_f^1(G_K, V^{q-1}(i))$ が成り立つ.

補足 4.4 Scholl [44] が定義した $K_{2i-q}(X_K) \otimes \mathbb{Q}$ の整数部分 $K_{2i-q}(X_K)_{O_K}$ を用いれば, 系 4.3 は K 上の多様体 X_K に対する $(\text{reg}_{X_K}^{q,i} K_{2i-q}(X_K)_{O_K})$ に対する) 主張に拡張される. ただし, ここでいう拡張とは, 「 X_K の正則なモデル X があるかどうかを気にする必要がなくなる」という意味である.

次に, (B) について述べる. 不分岐コホモロジー $H_{\text{ur}}^3(K(X), 2)$ を次のエタールコホモロジーの境界写像 δ の核として定義する.

$$\delta : H^3(\text{Spec}(K(X)), \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(2)) \longrightarrow \bigoplus_{x \in X^1} H_x^4(\text{Spec}(\mathcal{O}_{X,x}), \mathfrak{T}_{\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p}(2)),$$

ただし, $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(2) := \varinjlim_{r \geq 1} \mu_{p^r}^{\otimes 2}$, $\mathfrak{T}_{\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p}(2) := \varinjlim_{r \geq 1} \mathfrak{T}_r(2)_X$ とおいた. さらに,

$$\begin{aligned} H_{\text{ur}}^3(K(X), X_K; 2) \\ := H_{\text{ur}}^3(K(X), 2) \cap \text{Im}(H^3(X_K, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(2)) \rightarrow H^3(\text{Spec}(K(X)), \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(2))) \end{aligned}$$

とおく. $H_{\text{ur}}^3(K(X), 2)$ は Brauer 群の p 準素部分を拡張した不変量で, 有限性を期待できるかどうかは議論の余地がある. ここで述べたいのは, このように $\mathfrak{T}_r(2)_X$ を用いて定義した不変量が, X_K の p 進 regulator の $\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$ 係数版

$$\text{reg}_{\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p}^{3,2} : K_1(X_K) \otimes \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \longrightarrow H_g^1(G_K, A^2(2)) \quad (A^2(2) := H^2(X_{\bar{K}}, \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p(2)))$$

の余核と関係づけられるということである.

定理 4.5 ([39], Theorem 7.1.1) $p \geq 5$ を仮定し, さらに次の二つを仮定する.

- (i) $X \rightarrow \operatorname{Spec}(O_K)$ のすべての閉ファイバーの被約部分は X 上の単純正規交差因子であり, それらのファイバーの各既約成分では因子に関する Tate 予想が成り立つ.
- (ii) $\operatorname{CH}^2(X_K)\{p\}$ を最大可除部分群 $(\operatorname{CH}^2(X_K)\{p\})_{\operatorname{Div}}$ で割った商は指数有限である, すなわち, ある十分大きな p のべきで零化される.

このとき, 指数有限な $\mathbb{Z}_p$ 加群によるズレを除いて, 次の完全系列が存在する.

$$0 \longrightarrow \operatorname{CH}^2(X_K)\{p\} \longrightarrow \frac{H_g^1(G_K, A^2(2))}{\operatorname{Im}(\operatorname{reg}_{\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p}^{3,2})} \longrightarrow H_{\operatorname{ur}}^3(K(X), X_K; 2).$$

さらに, 最後の写像の像は $H_{\operatorname{ur}}^3(K(X), X_K; 2)_{\operatorname{Div}}$ を含む.

自然な写像

$$H^1(G_K, V^2(2)) \longrightarrow H^1(G_K, A^2(2))$$

のもとで, $H_g^1(G_K, V^2(2))$ の像は $H^1(G_K, A^2(2))_{\operatorname{Div}}$ に一致する ([39] Lemma 2.4.1). したがって定理 4.5 から (同じ仮定の下では), $\operatorname{Im}(\operatorname{reg}_{X_K}^{3,2}) = H_g^1(G_K, V^2(2))$ ならば,

$$(\operatorname{CH}^2(X_K)\{p\})_{\operatorname{Div}} = 0 \quad \text{かつ} \quad H_{\operatorname{ur}}^3(K(X), X_K; 2)_{\operatorname{Div}} = 0$$

であることが分かる. 実は, $\operatorname{Ker}(\operatorname{CH}^2(X) \rightarrow \operatorname{CH}^2(X_K))$ が有限生成であることを仮定すれば, 逆も成立する ([39] Remark 3.2.5).

参考文献

- [1] Asakura, M., Sato, K.: Chern class and Riemann-Roch theorem for cohomology theory without homotopy invariance. <http://front.math.ucdavis.edu/1301.5829>
- [2] Bloch, S.: Algebraic K-theory and classfield theory for arithmetic surfaces. *Ann. of Math. (2)* **114**, 229–265 (1981)
- [3] Bloch, S.: Algebraic cycles and higher K-theory. *Adv. Math.* **61**, 267–304 (1986)
- [4] Bloch, S., Kato, K.: p -adic étale cohomology. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* **63**, 107–152 (1986)
- [5] Bloch, S., Kato, K.: L -functions and Tamagawa numbers of motives. In: Cartier, P., Illusie, L., Katz, N. M., Laumon, G., Manin, Yu. I., Ribet, K. A. (eds.) *The Grothendieck Festschrift I*, (Progr. Math. 86), pp. 333–400, Boston, Birkhäuser, 1990
- [6] Colliot-Thélène, J.-L.: On the reciprocity sequence in the higher class field theory of function fields. In: Goerss, P. G., Jardine, J. F. (eds.) *Algebraic K-theory and algebraic topology, Lake Louise, 1991*, NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci., 407, pp. 35–55, Kluwer, Dordrecht, 1993
- [7] Fujiwara, K.: A proof of the absolute purity conjecture (after Gabber). In: Usui, S., Green, M., Illusie, L., Kato, K., Looijenga, E., Mukai, S., Saito, S. (eds.) *Algebraic Geometry 2000, Azumino*, (Adv. Stud. Pure Math. 36), pp. 153–183, Tokyo, Math. Soc. Japan, 2002
- [8] Geisser, T.: Motivic cohomology over Dedekind rings. *Math. Z.* **248**, 773–794 (2004)
- [9] Geisser, T.: Duality via cycle complexes. *Ann. of Math. (2)* **172**, 1095–1126 (2010)
- [10] Geisser, T., Levine, M.: The p -part of K-theory of fields in characteristic p . *Invent. Math.* **139**, 459–494 (2000)

- [11] Gros, M., Suwa, N.: La conjecture de Gersten pour les faisceaux de Hodge-Witt logarithmique. *Duke Math. J.* **57**, 615–628 (1988)
- [12] Hyodo, O.: A note on p -adic étale cohomology in the semi-stable reduction case. *Invent. Math.* **91**, 543–557 (1988)
- [13] Hyodo, O., Kato, K.: Semi-stable reduction and crystalline cohomology with logarithmic poles. In: *Périodes p -adiques. Séminaire de Bures, 1988*, (Astérisque 223), pp. 221–268, Marseille, Soc. Math. France, 1994
- [14] Illusie, L.: Complexe de de Rham-Witt et cohomologie cristalline. *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (4) **12**, 501–661 (1979)
- [15] Jannsen, U.: Hasse principles for higher-dimensional fields. *Ann. of Math.* (2) **183**, 1–71 (2016)
- [16] Jannsen, U., Saito, S.: Kato homology of arithmetic schemes and higher class field theory over local fields. *Documenta Math. Extra Volume: Kazuya Kato's Fiftieth Birthday*, 479–538 (2003)
- [17] Jannsen, U., Saito, S., Sato, K.: Étale duality for constructible sheaves on arithmetic schemes. *J. Reine Angew. Math.* **688**, 1–66 (2014)
- [18] Kato, K.: A Hasse principle for two-dimensional global fields. (with an appendix by Colliot-Thélène, J.-L.), *J. Reine Angew. Math.* **366**, 142–183 (1986)
- [19] Kato, K., Saito, S.: Unramified class field theory of arithmetical surfaces. *Ann. of Math.* (2) **118**, 241–275 (1983)
- [20] Kerz, M.: The Gersten conjecture for Milnor K -theory. *Invent. Math.* **175**, 1–33 (2009)
- [21] Kerz, M., Saito, S.: Cohomological Hasse principle and motivic cohomology for arithmetic schemes. *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* **115**, 123–183 (2012)
- [22] Kurihara, M.: A note on p -adic étale cohomology. *Proc. Japan Acad. Ser. A* **63**, 275–278 (1987)
- [23] Lang, S.: Unramified class field theory over function fields in several varieties. *Ann. of Math.* (2) **64**, 285–325 (1956)
- [24] Langer, A.: Local points of motives in semistable reduction. *Compositio Math.* **116**, 189–217 (1999)
- [25] Levine, M.: Lambda-operations, K -theory and motivic cohomology. In: *Algebraic K-theory, Toronto, ON, 1996*, (Fields Inst. Commun. 16), pp. 131–184, Providence, Amer. Math. Soc., 1997
- [26] Lichtenbaum, S.: Values of zeta functions at non-negative integers. In: Jager, H. (ed.) *Number Theory, Noordwijkerhout 1983*, (Lecture Notes in Math. 1068), pp. 127–138, Berlin, Springer, 1984
- [27] Lichtenbaum, S.: The construction of weight-two arithmetic cohomology. *Invent. Math.* **88**, 183–215 (1987)
- [28] Lichtenbaum, S.: New results on weight-two motivic cohomology. In: Cartier, P., Illusie, L., Katz, N. M., Laumon, G., Manin, Y., Ribet, K. A. (eds.) *The Grothendieck Festschrift III*, (Progr. Math. 88), pp. 35–55, Boston, Birkhäuser, 1990
- [29] Mazur, B.: Notes on étale cohomology of number fields. *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (4) **6**, 521–552 (1973)
- [30] Merkur'ev, A. S., Suslin, A. A.: K -cohomology of Severi-Brauer varieties and the norm residue homomorphism. *Math. USSR Izv.* **21**, 307–341 (1983)
- [31] Milne, J. S.: *Arithmetic Duality Theorems*. (Perspectives in Math. 1), Boston, Academic Press, 1986
- [32] Milne, J. S.: Motivic cohomology and values of zeta functions. *Compositio Math.* **68**, 59–102 (1988)
- [33] Mokrane, A.: La suite spectrale des poids en cohomologie de Hyodo-Kato. *Duke Math. J.* **72**, 301–337 (1993)

- [34] Nekovář, J., Niziol, W.: Syntomic cohomology and p -adic regulators for varieties over p -adic fields, with appendices by Berger, L. and Deglise, F. *Algebra Number Theory* **10**, 1695–1790 (2016)
- [35] Nesterenko, Y., Suslin, A. A.: Homology of the general linear group over a local ring, and Milnor’s K -theory. *Math. USSR-Izv.* **34**, 121–145 (1990)
- [36] Niziol, W.: On the image of p -adic regulators. *Invent. Math.* **127**, 375–400 (1997)
- [37] Riou, J.: Classes de Chern, morphismes de Gysin et pureté absolue. In: Illusie, L., Laszlo, Y., Orgogozo, F. (eds.) *Travaux de Gabber sur l’uniformisation locale et la cohomologie étale des schémas quasi-excellents, Séminaire à l’École polytechnique 2006–2008*, (Astérisque 363–364), pp. 207–240, Paris, Soc. Math. France, 2014
- [38] Saito, S.: Unramified class field theory of arithmetical schemes. *Ann. of Math. (2)* **121**, 251–281 (1985)
- [39] Saito, S., Sato, K.: A p -adic regulator map and finiteness results for arithmetic schemes. *Documenta Math. Extra Volume: Andrei A. Suslin’s Sixtieth Birthday*, 525–594 (2010)
- [40] 斎藤秀司, 佐藤周友: 代数的サイクルとエタールコホモロジー. シュプリンガー現代数学シリーズ 17, 丸善出版, 2012 年
- [41] Sato, K.: Logarithmic Hodge-Witt sheaves on normal crossing varieties. *Math. Z.* **257**, 707–743 (2007)
- [42] Sato, K.: p -adic étale Tate twists and arithmetic duality, with an appendix by Hagihara, K. *Ann. Sci. Éc. Norm. Sup. (4)* **40**, 519–588 (2007)
- [43] Sato, K.: Cycle classes for p -adic étale Tate twists and the image of p -adic regulators. *Doc. Math.* **18**, 177–247 (2013)
- [44] Scholl, A. J.: Integral elements in K -theory and products of modular curves. In: Gordon, B. B., Lewis, J. D., Müller-Stach, S., Saito, S., Yui, N. (eds.) *The arithmetic and geometry of algebraic cycles, Banff, 1998*, (NATO Sci. Ser. C Math. Phys. Sci., 548), pp. 467–489, Dordrecht, Kluwer, 2000.
- [45] Shiho, A.: On logarithmic Hodge-Witt cohomology of regular schemes. *J. Math. Sci. Univ. Tokyo* **14**, 567–635 (2007)
- [46] Spiess, M.: Artin-Verdier duality for arithmetic surfaces. *Math. Ann.* **305**, 705–792 (1996)
- [47] Suslin, A. A., Voevodsky, V.: Bloch-Kato conjecture and motivic cohomology with finite coefficients. In: Gordon, B. B., Lewis, J. D., Müller-Stach, S., Saito, S., Yui, N. (eds.) *The Arithmetic and Geometry of Algebraic Cycles, Banff, 1998*, (NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci. 548), pp. 117–189, Dordrecht, Kluwer, 2000
- [48] Totaro, B.: Milnor K -theory is the most simplest part of algebraic K -theory. *K-Theory* **6**, 177–189 (1992)
- [49] Tsuji, T.: p -adic étale cohomology and crystalline cohomology in the semi-stable reduction case. *Invent. Math.* **137**, 233–411 (1999)
- [50] Tsuji, T.: On p -adic nearby cycles of log smooth families. *Bull. Soc. Math. France* **128**, 529–575 (2000)
- [51] Voevodsky, V.: Motivic cohomology groups are isomorphic to higher Chow groups in any characteristic. *Internat. Math. Res. Notices* 2002, 351–355
- [52] Voevodsky, V.: On motivic cohomology with $\mathbb{Z}/l$ -coefficients. *Ann of Math. (2)* **174**, 401–438 (2011)
- [53] Zhong, C.: Comparison of dualizing complexes. *J. Reine Angew. Math.* **695**, 1–39 (2014)