

量子アフィン代数の表現論: レベル・ゼロ Demazure 加群を中心として

内藤 聡 (東京工業大学 理学院 数学系)*

1. 対称・非対称 Macdonald 多項式.

1.1. Weyl 指標と Demazure 指標.

$\mathfrak{g}$ を有限次元複素単純リー環, $\mathfrak{h}$ をその Cartan 部分環とする. そして, $Q := \sum_{i \in I} \mathbb{Z}\alpha_i \subset \mathfrak{h}^*$ を root lattice とし, $Q^+ := \sum_{i \in I} \mathbb{Z}_{\geq 0}\alpha_i \subset Q$ とおく. さらに, $P := \sum_{i \in I} \mathbb{Z}\varpi_i \subset \mathfrak{h}^*$ を $\mathfrak{g}$ の weight lattice とする; 但し, $\varpi_i \in \mathfrak{h}^*$, $i \in I$, は $\mathfrak{g}$ の基本ウェイトである. そして, $P^+ := \sum_{i \in I} \mathbb{Z}_{\geq 0}\varpi_i \subset P$ を dominant weight の全体, $P^{++} := \sum_{i \in I} \mathbb{Z}_{> 0}\varpi_i \subset P$ を regular dominant weight の全体とする. また, $W = \langle r_i \mid i \in I \rangle \subset GL(\mathfrak{h}^*)$ を $\mathfrak{g}$ の (有限) Weyl 群とする; 但し, $r_i \in GL(\mathfrak{h}^*)$ は simple reflection である. さらに, $\ell : W \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を length function, そして $w_o \in W$ を最長元とする.

さて, q, t を不定元とし, $N \in 2\mathbb{Z}_{> 0}$ を $P \subset \frac{1}{N}Q$ なる (最小の) 正の偶数とする. そして, 体 $K := \mathbb{Q}(t)(q^{1/N})$ 上の P の群環 $A := K[P] \ni e^\nu$, $\nu \in P$, を考える. ここで, W は $K[P]$ に $we^\nu := e^{w\nu}$, $w \in W$, $\nu \in P$, により作用するものとし, $A^W \subset A$ をこの作用に関して W -不変な元全体の成す部分代数とする. 各 $\lambda \in P^+$ に対して $m_\lambda := \sum_{\mu \in W\lambda} e^\mu$ (orbit-sum) とおけば, $\{m_\lambda \mid \lambda \in P^+\}$ は A^W の K 上の基底である.

また, $\Delta^+ \subset Q^+$ を $\mathfrak{g}$ の正の root の全体とし, $\rho := \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in \Delta^+} \alpha = \sum_{i \in I} \varpi_i \in P$ とおく. そして,

$$a_\rho := \sum_{w \in W} (-1)^{\ell(w)} e^{w\rho} = e^\rho \prod_{\alpha \in \Delta^+} (1 - e^{-\alpha}), \quad a_{\lambda+\rho} := \sum_{w \in W} (-1)^{\ell(w)} e^{w(\lambda+\rho)}, \quad \lambda \in P^+$$

とおき, $\lambda \in P^+$ に対して

$$s_\lambda := \frac{a_{\lambda+\rho}}{a_\rho} \quad (\text{Weyl 指標})$$

と定める. すると, $\{s_\lambda \mid \lambda \in P^+\}$ は A^W の K 上の基底である. そして, 各 $\lambda \in P^+$ に対して次が成り立つ.

$$s_\lambda = m_\lambda + \sum_{\mu < \lambda, \mu \in P^+} K_{\lambda, \mu} m_\mu, \quad K_{\lambda, \mu} \in \mathbb{Z}_{\geq 0};$$

ここで, $\lambda \geq \mu \iff \lambda - \mu \in Q^+$ である.

本研究は科研費「基盤研究 (B): アフィン・リー環における臨界レベル・ゼロレベル対応と半無限旗多様体 (課題番号: 16H03920)」の助成を受けたものである。

2010 Mathematics Subject Classification: 17B37; 33D52

キーワード: extremal weight module, Demazure module, Macdonald polynomial

* 〒152-8551 東京都目黒区大岡山 2-12-1

e-mail: naito@math.titech.ac.jp

さらに, 各 $\lambda \in P^+$ に対して, s_λ は λ を最高ウェイトとする $\mathfrak{g}$ の有限次元既約最高ウェイト表現 $L(\lambda)$ の指標である:

$$s_\lambda = \sum_{\nu \leq \lambda} (\dim_{\mathbb{C}} L(\lambda)_\nu) e^\nu;$$

ここで, $L(\lambda)_\nu$ は $L(\lambda)$ の ν -weight 空間である.

一方, $\mathfrak{b}$ を $\mathfrak{g}$ の (Δ^+ に対応する) Borel 部分環としたとき, 各 $w \in W$ に対して weight が $w\lambda$ である extremal weight vector $v_{w\lambda} \in L(\lambda)_{w\lambda}$ が生成する $\mathfrak{b}$ -加群 $L_w(\lambda) := U(\mathfrak{b})v_{w\lambda}$ を Demazure 加群と呼び, その指標を Demazure 指標と呼ぶ.

1.2. 対称・非対称 Macdonald 多項式.

$A^W \subset A = K[P]$ には, 対称 Macdonald 多項式と呼ばれる K 上の基底 $\{P_\lambda(q, t) \mid \lambda \in P^+\}$ が存在する:

$$P_\lambda(q, t) = m_\lambda + \sum_{\mu < \lambda, \mu \in P^+} a_{\lambda, \mu} m_\mu, \quad a_{\lambda, \mu} \in K.$$

Remark 1.1. [N] において, 一般のアフィン・ルート系に付随する対称 Macdonald 多項式の “pseudo-quantum Lakshmibai-Seshadri path (pQLS path)” による表示が与えられているので, 参照されたい.

また, $A = K[P]$ には, 非対称 Macdonald 多項式と呼ばれる K 上の基底 $\{E_\mu(q, t) \mid \mu \in P\}$ が存在する:

$$E_\mu(q, t) = e^\mu + \sum_{\nu < \mu, \nu \in P} b_{\mu, \nu} e^\nu, \quad b_{\mu, \nu} \in K.$$

ここで $\nu < \mu$ とは, $\mu^+ - \nu^+ \in Q^+ \setminus \{0\}$, または $\mu^+ = \nu^+$ であって W 上の Bruhat order に関して $v(\mu) \geq v(\nu)$ なる事である; 但し, $\nu \in P$ に対して $\nu^+ \in P^+$ は $W\nu \cap P^+ = \{\nu^+\}$ なる唯一の元であり, $v(\nu) \in W$ は $v(\nu)\nu = \nu^+$ となる最小元である. (詳しくは, [M] を参照.)

1.3. 対称・非対称 Macdonald 多項式の様々な特殊化.

(1) 特殊化: $q = t$

このとき, $\lambda \in P^+$ に対して $P_\lambda(q, q) = s_\lambda$ (Weyl 指標) であり, これは q に依らない. また, $\mu = w\lambda$, $w \in W$, に対して $E_\mu(0, 0)$ は Demazure 加群 $L_w(\lambda)$ の指標 (Demazure 指標) である.

(2) 特殊化: $t = 1$

このとき, $\lambda \in P^+$ に対して $P_\lambda(q, 1) = m_\lambda$ (orbit-sum) であり, これは q に依らない. また, $\mu = w\lambda$, $w \in W$, に対して $E_\mu(0, 1) = e^\mu$ である.

(3) 特殊化: $q = 0$

このとき, $\lambda \in P^+$ に対して $P_\lambda(0, t)$ は Hall-Littlewood 多項式と呼ばれ, 次の表示を持つ:

$$P_\lambda(0, t) = \frac{1}{W_\lambda(t)} \sum_{w \in W} w \left(e^\lambda \prod_{\alpha \in \Delta^+} \frac{1 - te^{-\alpha}}{1 - e^{-\alpha}} \right), \quad W_\lambda(t) = \sum_{w \in W, w\lambda = \lambda} t^{\ell(w)}.$$

また, $\mu \in P^+$ に対しては, $E_\mu(0, t) = e^\mu$ である.

(4) 特殊化: $t = q^k$, $k \in \mathbb{R}_{>0}$; $q \rightarrow 1$ (従って $t \rightarrow 1$)

このとき, $\lambda \in P^+$ に対する $P_\lambda(q, t)$ の特殊化として Jacobi 多項式 (Jack 多項式) $J_\lambda^{(k)}$ が得られる.

2. Semi-infinite Lakshmibai-Seshadri paths.

2.1. アフィン・リー環.

$\mathfrak{g}_{\text{aff}} = (\mathbb{C}[z, z^{-1}] \otimes_{\mathbb{C}} \mathfrak{g}) \oplus \mathbb{C}c \oplus \mathbb{C}d$ を (untwisted な) アフィン・リー環, $\mathfrak{h}_{\text{aff}} = \mathfrak{h} \oplus \mathbb{C}c \oplus \mathbb{C}d$ をその Cartan 部分環, $\Delta_{\text{aff}} = \{\alpha + k\delta \mid \alpha \in \Delta, k \in \mathbb{Z}\}$ を実 (アフィン) ルート系とする; $\mathfrak{g}$ は有限次元複素単純リー環, $\mathfrak{h}$ はその Cartan 部分環, $\Delta \subset \mathfrak{h}^*$ は $\mathfrak{g}$ の (有限) ルート系である. また, $W_{\text{aff}} = \langle r_i \mid i \in I_{\text{aff}} \rangle = W \ltimes Q^\vee$ を (アフィン) Weyl 群とする. ここで, $W = \langle r_i \mid i \in I \rangle$ は $\mathfrak{g}$ の (有限) Weyl 群であり, $Q^\vee = \sum_{i \in I} \mathbb{Z}\alpha_i^\vee$ はコルート格子である; 但し, $I_{\text{aff}} = I \sqcup \{0\}$ である. 正の実 (アフィン) ルートの全体 Δ_{aff}^+ は, $\Delta_{\text{aff}}^+ = \Delta^+ \sqcup \{\alpha + k\delta \mid \alpha \in \Delta, k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}\}$ と表される; $\mathfrak{b}_{\text{aff}}$ を $\mathfrak{g}_{\text{aff}}$ の $(\Delta_{\text{aff}}^+ \sqcup \{k\delta \mid k \in \mathbb{Z}_{\geq 1}\})$ に対応する) Borel 部分環とする.

2.2. Semi-infinite Bruhat グラフ.

Definition 2.1. (アフィン) Weyl 群 $W_{\text{aff}} = W \ltimes Q^\vee$ 上の semi-infinite length function $\ell^{\frac{\infty}{2}} : W_{\text{aff}} \rightarrow \mathbb{Z}$ を,

$$\ell^{\frac{\infty}{2}}(wt_\xi) := \ell(w) + 2\langle \rho, \xi \rangle, \quad w \in W, \xi \in Q^\vee,$$

と定める. ここで, $\rho := (1/2) \sum_{\alpha \in \Delta^+} \alpha$ であり, $\ell : W \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$ は (有限) Weyl 群 W 上の通常の length function である.

Definition 2.2 ([INS]). (アフィン) Weyl 群 W_{aff} に付随する semi-infinite Bruhat グラフ $\text{BG}^{\frac{\infty}{2}}(W_{\text{aff}})$ は, W_{aff} を頂点集合とし Δ_{aff}^+ によりラベル付けされた有向グラフであって, その directed edges は

$$x \xrightarrow{\beta} r_\beta x, \quad x \in W_{\text{aff}}, \beta \in \Delta_{\text{aff}}^+, \text{ s.t. } \ell^{\frac{\infty}{2}}(r_\beta x) = \ell^{\frac{\infty}{2}}(x) + 1$$

の形のもの全体である.

Definition 2.3 ([L], [Pe]). (アフィン) Weyl 群 W_{aff} 上の semi-infinite Bruhat 順序とは, 以下で定められる W_{aff} 上の半順序 $\leq_{\frac{\infty}{2}}$ である: $x, x' \in W_{\text{aff}}$ に対して, $x \leq_{\frac{\infty}{2}} x'$ とは,

$$x = x_0 \xrightarrow{\beta_1} x_1 \xrightarrow{\beta_2} \cdots \xrightarrow{\beta_r} x_r = x'$$

なる $\text{BG}^{\frac{\infty}{2}}(W_{\text{aff}})$ における directed path が存在することである.

2.3. Semi-infinite Lakshmibai-Seshadri paths.

以下では, $\lambda \in P^{++} := \sum_{i \in I} \mathbb{Z}_{\geq 1} \varpi_i$ とする; ただし, $\varpi_i = \Lambda_i - a_i^\vee \Lambda_0$, $i \in I$, はレベル・ゼロ基本ウェイトである (Λ_i , $i \in I_{\text{aff}}$, はアフィン・リー環 $\mathfrak{g}_{\text{aff}}$ の基本ウェイトである). なお, 本稿の結果は全て, 適当な修正の下で, 一般の $\lambda \in P^+ := \sum_{i \in I} \mathbb{Z}_{\geq 0} \varpi_i$ に対して成り立つ; 詳しくは, 原論文を参照されたい.

Definition 2.4. $\sigma \in \mathbb{Q}$, $0 < \sigma \leq 1$, とする. $(\text{BG}^{\frac{\infty}{2}}(W_{\text{aff}}))$ の部分グラフ $\text{BG}_{\lambda, \sigma}^{\frac{\infty}{2}}(W_{\text{aff}})$ は, W_{aff} を頂点集合とし Δ_{aff}^+ によりラベル付けされた有向グラフであって, その directed edges は $\text{BG}^{\frac{\infty}{2}}(W_{\text{aff}})$ の directed edges $x \xrightarrow{\beta} r_\beta x$ のうちで $\sigma \langle x\lambda, \beta^\vee \rangle \in \mathbb{Z}$ なるもの全体である.

Remark 2.5. $\text{BG}_{\lambda, 1}^{\frac{\infty}{2}}(W_{\text{aff}}) = \text{BG}^{\frac{\infty}{2}}(W_{\text{aff}})$ である.

Definition 2.6 ([INS]). $\lambda \in P^{++}$ とする. semi-infinite Lakshmibai-Seshadri (LS) path of shape λ とは,

$$\eta = (x_1 >_{\frac{\infty}{2}} \cdots >_{\frac{\infty}{2}} x_s; 0 = \sigma_0 < \sigma_1 < \cdots < \sigma_s = 1),$$

$$x_k \in W_{\text{aff}}, \sigma_k \in \mathbb{Q} \ (1 \leq k \leq s),$$

であって, 各 $1 \leq k \leq s-1$ に対して x_{k+1} から x_k への $\text{BG}_{\lambda, \sigma_k}^{\frac{\infty}{2}}(W_{\text{aff}})$ における directed path が存在するものである. (ここで, x_{k+1} から x_k への $\text{BG}^{\frac{\infty}{2}}(W_{\text{aff}})$ における directed path が存在することは, $x >_{\frac{\infty}{2}} x_{k+1}$ という条件から従う事に注意.)

Remark 2.7. 上記の η に対して, $\sigma_k(x_{k+1}\lambda - x_k\lambda) \in \sum_{i \in I_{\text{aff}}} \mathbb{Z}_{\geq 0} \alpha_i$, $1 \leq k \leq s-1$, であり, 従って

$$\text{wt}(\eta) := \sum_{k=0}^{s-1} (\sigma_{k+1} - \sigma_k) x_{k+1} \lambda \in \lambda + \sum_{i \in I_{\text{aff}}} \mathbb{Z} \alpha_i$$

である.

$\lambda \in P^{++}$ に対して, $\mathbb{B}^{\frac{\infty}{2}}(\lambda)$ で semi-infinite LS path of shape λ の全体を表すことにする. また, $\mathbb{B}^{\frac{\infty}{2}}(\lambda) \ni \eta = (x_1 >_{\frac{\infty}{2}} \cdots >_{\frac{\infty}{2}} x_s; 0 = \sigma_0 < \sigma_1 < \cdots < \sigma_s = 1)$ に対して, $\iota(\eta) := x_1$ (initial direction), $\kappa(\eta) := x_s$ (final direction) と定める.

2.4. Standard monomial theory for semi-infinite LS paths.

$\lambda, \mu \in P^{++}$ とする (従って $\lambda + \mu \in P^{++}$ である). テンソル積 $\mathbb{B}^{\frac{\infty}{2}}(\lambda) \otimes \mathbb{B}^{\frac{\infty}{2}}(\mu)$ の部分集合 $\mathbb{S}^{\frac{\infty}{2}}(\lambda + \mu)$ を

$$\mathbb{S}^{\frac{\infty}{2}}(\lambda + \mu) := \{ \pi \otimes \eta \in \mathbb{B}^{\frac{\infty}{2}}(\lambda) \otimes \mathbb{B}^{\frac{\infty}{2}}(\mu) \mid \kappa(\pi) \geq_{\frac{\infty}{2}} \iota(\eta) \}$$

と定める.

Theorem 2.8 ([KNS3]). $\lambda, \mu \in P^{++}$ とする. このとき, $\mathbb{S}^{\frac{\infty}{2}}(\lambda + \mu)$ は $\mathbb{B}^{\frac{\infty}{2}}(\lambda) \otimes \mathbb{B}^{\frac{\infty}{2}}(\mu)$ の subcrystal である. さらに, crystal としての同型

$$\mathbb{S}^{\frac{\infty}{2}}(\lambda + \mu) \cong \mathbb{B}^{\frac{\infty}{2}}(\lambda + \mu)$$

が成り立つ.

3. レベル・ゼロ extremal ウェイト加群とレベル・ゼロ Demazure 加群.

3.1. レベル・ゼロ extremal ウェイト加群.

$U_q := U_q(\mathfrak{g}_{\text{aff}})$ をアフィン・リー環 $\mathfrak{g}_{\text{aff}}$ に付随する量子 (普遍) 包絡環とする.

Definition 3.1 ([Kas1]). M を可積分 U_q -加群, $0 \neq v \in M$ をウェイト $\lambda \in P_{\text{aff}} := (\sum_{i \in I_{\text{aff}}} \mathbb{Z}\Lambda_i) + \mathbb{Z}\delta$ のウェイト・ベクトルとする. v が extremal ウェイト・ベクトルであるとは, 以下の条件を満たす $\{v_x\}_{x \in W_{\text{aff}}} \subset M$ で $v_e = v$ なるものが存在することである: 各 $x \in W_{\text{aff}}$ と $j \in I_{\text{aff}}$ に対して,

$$\begin{aligned} E_j v_x &= 0 \text{ and } F_j^{(k)} v_x = v_{r_j x} \text{ if } k := \langle x\lambda, \alpha_j^\vee \rangle \geq 0, \\ F_j v_x &= 0 \text{ and } E_j^{(-k)} v_x = v_{r_j x} \text{ if } k := \langle x\lambda, \alpha_j^\vee \rangle \leq 0; \end{aligned}$$

ここで, E_j, F_j ($j \in I_{\text{aff}}$) は U_q の Chevalley 生成元であり, $E_j^{(-k)}, F_j^{(k)}$ ($j \in I_{\text{aff}}$) はそれらの “divided power” である.

$0 \neq v \in M$ がウェイト $\mu \in P_{\text{aff}}$ の extremal ウェイト・ベクトルなら, 各 $j \in I_{\text{aff}}$ に対して

$$S_j v := \begin{cases} F_j^{(k)} v & \text{if } k := \langle \mu, \alpha_j^\vee \rangle \geq 0, \\ E_j^{(-k)} v & \text{if } k := \langle \mu, \alpha_j^\vee \rangle \leq 0 \end{cases}$$

として, M の extremal ウェイト・ベクトルの全体への W_{aff} の作用が定義される; $0 \neq v \in M$ をウェイト $\lambda \in P_{\text{aff}}$ の extremal ウェイト・ベクトルとすると, Definition 3.1 の記号の下で, 各 $x \in W_{\text{aff}}$ に対して $S_x v = v_x$ である.

Remark 3.2. M の extremal ウェイト・ベクトルの全体へのアフィン・ワイル群 W_{aff} の上記の作用は, 一般の可積分表現上の braid 群の作用とは少し異なっている事に注意する.

Definition 3.3 ([Kas1]). $\lambda \in P^+ = \sum_{i \in I} \mathbb{Z}_{\geq 0} \varpi_i$ とする. (ウェイト λ の) extremal ウェイト加群 $V(\lambda)$ は, 1つの元 v_λ で生成される U_q -加群であって, 「 $v_\lambda \in V(\lambda)$ がウェイト λ の extremal ウェイト・ベクトルである」という基本関係により定義される.

Theorem 3.4 ([INS]). $\lambda \in P^{++}$ とする. (ウェイト λ の) extremal ウェイト加群 $V(\lambda)$ の結晶基底は, semi-infinite LS path of shape λ の全体 $\mathbb{B}^{\frac{\infty}{2}}(\lambda)$ として実現される.

3.2. レベル・ゼロ Demazure 加群.

$\lambda \in P^+ = \sum_{i \in I} \mathbb{Z}_{\geq 0} \varpi_i$ とし, $V(\lambda)$ を (ウェイト λ の) extremal ウェイト加群とする. また, $U_q^- := \langle F_j \mid j \in I_{\text{aff}} \rangle \subset U_q$ を, U_q の下半三角部分とする.

Definition 3.5 ([Kas2]). 各 $x \in W_{\text{aff}}$ に対して, $V(\lambda)$ の Demazure 加群 $V_x^-(\lambda)$ を

$$V_x^-(\lambda) := U_q^- S_x v_\lambda \subset V(\lambda)$$

と定める.

Theorem 3.6 ([NS9]). $\lambda \in P^{++}$, $x \in W_{\text{aff}}$ とする. $V(\lambda)$ の Demazure 加群 $V_x^-(\lambda)$ の結晶基底は, Demazure crystal

$$\mathbb{B}_{\geq x}^{\frac{\infty}{2}}(\lambda) := \left\{ \eta \in \mathbb{B}^{\frac{\infty}{2}}(\lambda) \mid \kappa(\eta) \geq_{\frac{\infty}{2}} x \right\}$$

として実現される; ここで $\kappa(\eta) \in W_{\text{aff}}$ は η の final direction である.

$\lambda, \mu \in P^{++}$, $x \in W_{\text{aff}}$ とする. このとき, Theorem 2.8 の (crystal としての) 同型 $\mathbb{B}^{\frac{\infty}{2}}(\lambda + \mu) \cong \mathbb{S}^{\frac{\infty}{2}}(\lambda + \mu) \subset \mathbb{B}^{\frac{\infty}{2}}(\lambda) \otimes \mathbb{B}^{\frac{\infty}{2}}(\mu)$ の下で, Demazure crystal $\mathbb{B}_{\geq x}^{\frac{\infty}{2}}(\lambda + \mu) \subset \mathbb{B}^{\frac{\infty}{2}}(\lambda + \mu)$ は, 次の様に記述される.

Theorem 3.7 ([KNS3]). $\lambda, \mu \in P^{++}$, $x \in W_{\text{aff}}$ とする. このとき, 上の (crystal としての) 同型の下で

$$\mathbb{B}_{\geq x}^{\frac{\infty}{2}}(\lambda + \mu) \cong \left\{ \pi \otimes \eta \in \mathbb{S}^{\frac{\infty}{2}}(\lambda + \mu) \mid \kappa(\eta) \geq_{\frac{\infty}{2}} x \right\}$$

が成り立つ.

3.3. レベル・ゼロ Demazure 加群の次数付き指標.

以下では, $\lambda \in P^+ = \sum_{i \in I} \mathbb{Z}_{\geq 0} \varpi_i$, $w \in W \subset W_{\text{aff}}$ とする.

Demazure 加群 $V_w^-(\lambda) \subset V(\lambda)$ は, $\mathfrak{g}_{\text{aff}}$ の Cartan 部分環 $\mathfrak{h}_{\text{aff}}$ の作用に関するウェイト空間分解:

$$V_w^-(\lambda) = \bigoplus_{\beta \in Q_{\text{aff}}^+} V_w^-(\lambda)_{w\lambda - \beta}$$

を持つ; ここで, 各 $\beta \in Q_{\text{aff}}^+ := \sum_{i \in I_{\text{aff}}} \mathbb{Z}_{\geq 0} \alpha_i$ に対して, $V_w^-(\lambda)_{w\lambda - \beta}$ はウェイト $w\lambda - \beta$ のウェイト空間 (有限次元!) である. そこで, 各 $\beta \in Q_{\text{aff}}^+$ は $\beta = \gamma + k\delta$, $\gamma \in Q$, $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, と表される事に注意して, $V_w^-(\lambda)$ の次数付き指標 $\text{gch } V_w^-(\lambda)$ を

$$\text{gch } V_w^-(\lambda) := \sum_{\gamma \in Q, k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} (\dim V_w^-(\lambda)_{w\lambda + \gamma - k\delta}) e^{w\lambda + \gamma} q^{-k}$$

と定める.

Remark 3.8. Demazure 加群 $V_w^-(\lambda)$ の商加群 (従って $\mathfrak{h}_{\text{aff}}$ -加群である) に対しても, 同様に次数付き指標 gch が定義される.

4. 非対称 Macdonald 多項式の特特殊化 ($t = 0, t = \infty$).

4.1. $t = 0$ での特殊化とレベル・ゼロ Demazure 加群.

$\lambda \in P^{++}$, $w \in W$ に対して $P_\lambda(q, t)$ を対称 Macdonald 多項式, $E_{w\lambda}(q, t)$ を非対称 Macdonald 多項式とする ([M], [RY], [OS] 参照).

Remark 4.1. $w_\circ \in W$ を最長元とすると, $t = 0$ での特殊化については, 等式 $E_{w_\circ\lambda}(q, 0) = P_\lambda(q, 0)$ が成り立つ.

Theorem 4.2 ([NS9]). $\lambda = \sum_{i \in I} m_i \varpi_i \in P^{++}$ ($m_i \in \mathbb{Z}_{\geq 1}, i \in I$) とする. Demazure 加群 $V_e^-(\lambda)$ の次数付き指標 $\text{gch } V_e^-(\lambda)$ は, 次の様に表される:

$$\text{gch } V_e^-(\lambda) = \left(\prod_{i \in I} \prod_{r=1}^{m_i} (1 - q^{-r}) \right)^{-1} E_{w_\circ\lambda}(q^{-1}, 0).$$

一般の $w \in W$ に対しては, Demazure 加群 $V_w^-(\lambda)$ の商加群

$$\mathbb{U}_w^-(\lambda) := V_w^-(\lambda) / \left(V_w^-(\lambda) \cap \sum_{i \in I} V_{t_{\alpha_i}^Y}^-(\lambda) \right)$$

を考えると, その次数付き指標 $\text{gch } \mathbb{U}_w^-(\lambda)$ と非対称 Macdonald 多項式の $t = 0$ での特殊化 $E_{w_\circ w\lambda}(q^{-1}, 0)$ の間に, 次の等式が成り立つ.

Proposition 4.3 (see [LNS³4]; cf. [FM]). $\lambda = \sum_{i \in I} m_i \varpi_i \in P^{++}$ ($m_i \in \mathbb{Z}_{\geq 1}, i \in I$), $w \in W$ とする. このとき, 次の等式が成り立つ:

$$w_\circ (\text{gch } \mathbb{U}_w^-(\lambda)) = \left(\prod_{i \in I} \prod_{r=1}^{m_i-1} (1 - q^{-r}) \right)^{-1} E_{w_\circ w\lambda}(q^{-1}, 0);$$

ここで, 最長元 $w_\circ \in W$ は $w_\circ e^\nu = e^{w_\circ \nu}$, $\nu \in P$, により $\text{gch } \mathbb{U}_w^-(\lambda)$ に作用しているものとする.

4.2. $t = \infty$ での特殊化とレベル・ゼロ Demazure 加群.

$\lambda = \sum_{i \in I} m_i \varpi_i \in P^{++}$ ($m_i \in \mathbb{Z}_{\geq 1}, i \in I$) とする. ここでは, 一般の $w \in W$ に対して, 非対称 Macdonald 多項式 $E_{w\lambda}(q, t)$ の $t = \infty$ での特殊化を考える ([CO], [OS] 参照).

Remark 4.4. $E_{w_\circ\lambda}(q, \infty) \neq P_\lambda(q, \infty) = P_\lambda(q^{-1}, 0)$ に注意する.

Theorem 4.5 ([NNS1]). $\lambda = \sum_{i \in I} m_i \varpi_i \in P^{++}$ ($m_i \in \mathbb{Z}_{\geq 1}, i \in I$) とする. Demazure 加群 $V_{w_\circ}^-(\lambda)$ の次数付き指標 $\text{gch } V_{w_\circ}^-(\lambda)$ は, 次の様に表される:

$$\text{gch } V_{w_\circ}^-(\lambda) = \left(\prod_{i \in I} \prod_{r=1}^{m_i} (1 - q^{-r}) \right)^{-1} E_{w_\circ\lambda}(q, \infty).$$

Remark 4.6. 包含関係 $V_{w_\circ}^-(\lambda) \subset V_e^-(\lambda) \subset V(\lambda)$ に注意.

一般の $w \in W$ に対しては, Demazure 加群 $V_w^-(\lambda)$ の商加群 (level-zero van der Kallen 加群)

$$\mathbb{K}_w^-(\lambda) := V_w^-(\lambda) / \left(\sum_{z > w, z \in W} V_z^-(\lambda) \right)$$

を考えれば, その次数付き指標 $\text{gch } \mathbb{K}_w^-(\lambda)$ と非対称 Macdonald 多項式の $t = \infty$ での特殊化 $E_{w\lambda}(q, \infty)$ の間に, 次の等式が成り立つ.

Theorem 4.7 ([NS10]; cf. [Kat], [FKM]). $\lambda = \sum_{i \in I} m_i \varpi_i \in P^{++}$ ($m_i \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, $i \in I$), $w \in W$ とする. このとき, 次の等式が成り立つ:

$$\text{gch } \mathbb{K}_w^-(\lambda) = \left(\prod_{i \in I} \prod_{r=1}^{m_i + \epsilon_i} (1 - q^{-r}) \right)^{-1} E_{w\lambda}(q, \infty);$$

ここで,

$$\epsilon_i := \begin{cases} 1 & (ws_i > w), \\ 0 & (ws_i < w) \end{cases}$$

である.

5. レベル・ゼロ Demazure 加群の次数付き指標の幾何学的意味付け.

5.1. 古典的 Borel-Weil-Bott 定理.

G を連結かつ単連結な複素単純代数群, $B \subset G$ を Borel 部分群, $H \subset B$ を極大 torus, そして $X := G/B$ を旗多様体とする. 各 $\lambda \in P^+ \subset \text{Hom}(H, \mathbb{C}^\times)$ に対して $\mathcal{L}_{G/B}(\lambda)$ を λ (より正確には, $-\lambda$ であるが) に付随する G -同変直線束とする. また, 各 $w \in W \cong N_G(H)/H$ に対して, $X(w) := \overline{BwB}/B \subset G/B = X$ を Schubert 多様体とする; Bruhat 分解 $G/B = \bigsqcup_{w \in W} BwB/B$ に注意する. 各 $\lambda \in P^+$ に対する直線束 $\mathcal{L}_{G/B}(\lambda)$ の $X(w) \subset G/B$ への制限を $\mathcal{L}_{X(w)}(\lambda)$ と書くことにすると, 層係数コホモロジー群 $H^i(X(w), \mathcal{L}_{X(w)}(\lambda))$, $i \geq 0$, は B -加群の構造を持つ. ($w = w_0$ のときには $X(w_0) = G/B$ であり, $H^i(G/B, \mathcal{L}_{G/B}(\lambda))$ は G -加群の構造を持つ.)

このとき, 次の古典的事実が (良く) 知られている.

Fact 5.1. $\lambda \in P^+$, $w \in W$ とする.

(1) G -加群としての次の同型が成り立つ:

$$H^0(G/B, \mathcal{L}_{G/B}(\lambda))^* \cong L(\lambda).$$

(2) B -加群としての次の同型が成り立つ:

$$H^0(X(w), \mathcal{L}_{X(w)}(\lambda))^* \cong L_w(\lambda).$$

(3) 各 $i > 0$ に対して, 次が成り立つ.

$$H^i(X(w), \mathcal{L}_{X(w)}(\lambda)) = \{0\}.$$

5.2. Semi-infinite 旗多様体

N を Borel 部分群 $B \subset G$ の unipotent radical とし, $\overline{G/N}$ を quasi-affine 多様体 G/U の affine closure とする (つまり, $\overline{G/N} := \text{Specm } \mathbb{C}[G/N]$ である); ここで, (有名な) Peter-Weyl の定理により, 両側 G -加群としての同型 $\mathbb{C}[G] \cong \bigoplus_{\lambda \in P^+} (L(\lambda)^* \otimes L(\lambda))$ が成り立つので, G -作用を持つ次数付き環としての同型 $\mathbb{C}[G/N] \cong \bigoplus_{\lambda \in P^+} L(\lambda)^*$ が成り立つことに注意する. そして, $Z := \overline{G/N} \setminus (G/N)$ (affine 代数多様体) を G/N の境界とし, この $\mathbb{C}[[z]]$ -値点の全体 $Z[[z]] \subset \overline{G/N}[[z]]$ を考え, H による (free) right quotient $\mathbf{Q}_G := (\overline{G/N}[[z]] \setminus Z[[z]])/H$ を semi-infinite 旗多様体 (の形式的冪級数モデル) と呼ぶ; ここで, 旗多様体 G/B は G/N の H による (free) right quotient である事に注意する. すると, $z = 0$ での代入写像 $\text{ev}_0 : G[[z]] \rightarrow G$ による Borel 部分群 $B \subset G$ の逆像 $\mathbf{I} := \text{ev}_0^{-1}(B) \subset G[[z]]$ (岩堀部分群) についての $\mathbf{Q}_G$ の軌道の全体は W_{aff} の部分集合 $W_{\text{aff}}^{\geq 0} := W \times Q^{\vee,+}$, $Q^{\vee,+} := \sum_{i \in I} \mathbb{Z}_{\geq 0} \alpha_i^\vee$, によりパラメトライズされる:

$$\mathbf{Q}_G = \bigsqcup_{x=wt_\xi \in W_{\text{aff}}^{\geq 0}} \mathbf{O}(x);$$

ここで, $\mathbf{I}$ -軌道 $\mathbf{O}(x)$, $x \in W_{\text{aff}}^{\geq 0}$, の $\mathbf{Q}_G$ における余次元が $\ell_{\frac{\infty}{2}}(x) = \ell(w) + 2\langle \rho, \xi \rangle$ であり, semi-infinite Bruhat 順序 $\leq_{\frac{\infty}{2}}$ はこれらの $\mathbf{I}$ -軌道の閉包関係を記述している事に注意する. そこで, 各 $x \in W_{\text{aff}}^{\geq 0}$ に対して, $\mathbf{Q}_G(x) := \overline{\mathbf{O}(x)} \subset \mathbf{Q}_G$ を semi-infinite Schubert 多様体と呼ぶ. (特に, $\mathbf{Q}_G = \mathbf{Q}_G(e) = \overline{\mathbf{O}(e)}$ である.)

5.3. Semi-infinite 旗多様体に対する Borel-Weil-Bott 型定理

semi-infinite 旗多様体 $\mathbf{Q}_G$ は, (Drinfeld-) Plücker 埋め込みによって (無限次元) 射影空間 $\mathbb{P}(L(\varpi_i)[[z]])$ の直積 $\prod_{i \in I} \mathbb{P}(L(\varpi_i)[[z]])$ の閉部分多様体とみなせるので, 引き戻しによって, 各 $i \in I$ に対して $\mathbf{Q}_G$ 上の $G[[z]]$ -同変直線束 $\mathcal{O}_{\mathbf{Q}_G}(\varpi_i)$ が定義される; $\lambda = \sum_{i \in I} m_i \varpi_i \in P^+$ に対しては, $\mathcal{O}_{\mathbf{Q}_G}(\lambda) := \bigotimes_{i \in I} \mathcal{O}_{\mathbf{Q}_G}(\varpi_i)^{\otimes m_i}$ により $\mathbf{Q}_G$ 上の $G[[z]]$ -同変直線束が定義される. また, 各 $x \in W_{\text{aff}}^{\geq 0}$ に対して, 制限によって $\mathbf{Q}_G(x) \subset \mathbf{Q}_G$ 上の $\mathbf{I}$ -同変直線束 $\mathcal{O}_{\mathbf{Q}_G(x)}(\lambda)$ が定まる. 従って, 層係数コホモロジー群 $H^i(\mathbf{Q}_G(x), \mathcal{O}_{\mathbf{Q}_G(x)}(\lambda))$, $i \geq 0$, は $\mathbf{I}$ -加群の構造を持つ. (ここで, 岩堀部分群 $\mathbf{I}$ のリー環は $\mathfrak{b} \oplus (z\mathbb{C}[[z]] \otimes_{\mathbb{C}} \mathfrak{g}) \subset \mathfrak{b}_{\text{aff}}$ である事に注意.) この $\mathbf{I}$ -加群の次数付き指標について, 次の Borel-Weil 型の定理が成り立つ.

Theorem 5.2 ([KNS3]). $\lambda \in P^+$, $x \in W_{\text{aff}}^{\geq 0}$ とする.

(1) 次の等式が成り立つ:

$$\text{gch } H^0(\mathbf{Q}_G(x), \mathcal{O}_{\mathbf{Q}_G(x)}(\lambda)) = \text{gch } V_x^-(-w_\circ \lambda).$$

(2) 各 $i > 0$ に対して, 次が成り立つ:

$$H^i(\mathbf{Q}_G(x), \mathcal{O}_{\mathbf{Q}_G(x)}(\lambda)) = \{0\}.$$

参考文献

- [BF1] A. Braverman and M. Finkelberg, Semi-infinite Schubert varieties and quantum K -theory of flag manifolds, *J. Amer. Math. Soc.* **27** (2014), 1147–1168.
- [BF2] A. Braverman and M. Finkelberg, Weyl modules and q -Whittaker functions, *Math. Ann.* **359** (2014), 45–59.
- [BFP] F. Brenti, S. Fomin, and A. Postnikov, Mixed Bruhat operators and Yang-Baxter equations for Weyl groups. *Int. Math. Res. Not. IMRN* **1999**, no. 8, 419–441.
- [BN] J. Beck and H. Nakajima, Crystal bases and two-sided cells of quantum affine algebras, *Duke Math. J.* **123** (2004), 335–402.
- [CO] I. Cherednik and D. Orr, Nonsymmetric difference Whittaker functions, *Math. Z.* **279** (2015), 879–938.
- [FF] B. Feigin and E. Frenkel, Affine Kac-Moody algebras and semi-infinite flag manifolds, *Comm. Math. Phys.* **128** (1990), 161–189.
- [FKM] E. Feigin, S. Kato, and I. Makedonskyi, Representation theoretic realization of non-symmetric Macdonald polynomials at infinity, preprint 2017, arXiv:1703.04108.
- [FM] E. Feigin and I. Makedonskyi, Generalized Weyl modules, alcove paths and Macdonald polynomials, *Selecta Math. (N.S.)* **23** (2017), 2863–2897.
- [FN] N. Fujita and S. Naito, Newton-Okounkov convex bodies of Schubert varieties and polyhedral realizations of crystal bases, *Math. Z.* **285** (2017), 325–352.
- [INS] M. Ishii, S. Naito, and D. Sagaki, Semi-infinite Lakshmibai-Seshadri path model for level-zero extremal weight modules over quantum affine algebras, *Adv. Math.* **290** (2016), 967–1009.
- [Kas1] M. Kashiwara, On level-zero representations of quantized affine algebras, *Duke Math. J.* **112** (2002), 117–175.
- [Kas2] M. Kashiwara, Level zero fundamental representations over quantized affine algebras and Demazure modules, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **41** (2005), 223–250.
- [Kat] S. Kato, Demazure character formula for semi-infinite flag manifolds, preprint 2016, arXiv:1605.04953.
- [KNS1] S. Kato, S. Naito, and D. Sagaki, Polytopal estimate of Mirković-Vilonen polytopes lying in a Demazure crystal, *Adv. Math.* **226** (2011), 2587–2617.
- [KNS2] S. Kato, S. Naito, and D. Sagaki, Tensor products and Minkowski sums of Mirković-Vilonen polytopes, *Transform. Groups* **17** (2012), 195–207.
- [KNS3] S. Kato, S. Naito, and D. Sagaki, Equivariant K -theory of semi-infinite flag manifolds and Pieri-Chevalley formula, preprint 2017, arXiv:1702.02408.
- [L] G. Lusztig, Hecke algebras and Jantzen’s generic decomposition patterns, *Adv. Math.* **37** (1980), 121–164.
- [LNS³1] C. Lenart, S. Naito, D. Sagaki, A. Schilling, and M. Shimozono, A uniform model for Kirillov-Reshetikhin crystals I: Lifting the parabolic quantum Bruhat graph, *Int. Math. Res. Not. IMRN* **2015**, no. 7, 1848–1901.
- [LNS³2] C. Lenart, S. Naito, D. Sagaki, A. Schilling, and M. Shimozono, Quantum Lakshmibai-Seshadri paths and root operators, *Adv. Stud. Pure Math. Vol. 71* (2016), 267–294.
- [LNS³3] C. Lenart, S. Naito, D. Sagaki, A. Schilling, and M. Shimozono, A uniform model for Kirillov-Reshetikhin crystals II: Alcove model, path model, and $P = X$, *Int. Math. Res. Not. IMRN* **2017**, no. 14, 4259–4319.
- [LNS³4] C. Lenart, S. Naito, D. Sagaki, A. Schilling, and M. Shimozono, A uniform model for Kirillov-Reshetikhin crystals III: Nonsymmetric Macdonald polynomials at $t = 0$ and Demazure characters, *Transform. Groups* **22** (2017), 1041–1079.

- [LS] T. Lam and M. Shimozono, Quantum cohomology of G/P and homology of affine Grassmannian, *Acta Math.* **204** (2010), 49–90.
- [M] I. G. Macdonald, “Affine Hecke Algebras and Orthogonal Polynomials”, Cambridge Tracts in Mathematics Vol. 157, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2003.
- [N] 内藤 聡, 対称 Macdonald 多項式の $t = 0$ での特殊化とアフィン量子群上の extremal weight 加群, 第 60 回代数学シンポジウム報告集, 217–236.
- [NNS1] S. Naito, F. Nomoto, and D. Sagaki, Specialization of nonsymmetric Macdonald polynomials at $t = \infty$ and Demazure submodules of level-zero extremal weight modules, *Trans. Amer. Math. Soc.* **370** (2018), 2739–2783.
- [NNS2] S. Naito, F. Nomoto, and D. Sagaki, Representation-theoretic interpretation of Cherednik-Orr’s recursion formula for the specialization of nonsymmetric Macdonald polynomials at $t = \infty$, to appear in *Transform. Groups*, DOI:10.1007/s00031-017-9467-0.
- [NS1] S. Naito and D. Sagaki, Path model for a level-zero extremal weight module over a quantum affine algebra, *Int. Math. Res. Not. IMRN* **2003**, no. 32, 1731–1754.
- [NS2] S. Naito and D. Sagaki, Crystal of Lakshmibai-Seshadri paths associated to an integral weight of level zero for an affine Lie algebra, *Int. Math. Res. Not. IMRN* **2005**, no. 14, 815–840.
- [NS3] S. Naito and D. Sagaki, Path model for a level-zero extremal weight module over a quantum affine algebra. II, *Adv. Math.* **200** (2006), 102–124.
- [NS4] S. Naito and D. Sagaki, Crystal structure on the set of Lakshmibai-Seshadri paths of an arbitrary level-zero shape, *Proc. Lond. Math. Soc.* (3) **96** (2008), 582–622.
- [NS5] S. Naito and D. Sagaki, Lakshmibai-Seshadri paths of level-zero weight shape and one-dimensional sums associated to level-zero fundamental representations, *Compos. Math.* **144** (2008), 1525–1556.
- [NS6] S. Naito and D. Sagaki, Mirković-Vilonen polytopes lying in a Demazure crystal and an opposite Demazure crystal, *Adv. Math.* **221** (2009), 1804–1842.
- [NS7] 内藤聡, 佐垣大輔, 量子アファイン展開環上の extremal ウェイト加群の結晶基底と Littelmann のパス模型, 「数学」, 第62巻 第1号 (2010年1月冬季号), 57–84.
- [NS8] S. Naito and D. Sagaki, Tensor product multiplicities for crystal bases of extremal weight modules over quantum infinite rank affine algebras of types B_∞ , C_∞ , and D_∞ , *Trans. Amer. Math. Soc.* **364** (2012), 6531–6564.
- [NS9] S. Naito and D. Sagaki, Demazure submodules of level-zero extremal weight modules and specializations of Macdonald polynomials, *Math. Z.* **283** (2016), 937–978.
- [NS10] S. Naito and D. Sagaki, Level-zero van der Kallen modules and specialization of nonsymmetric Macdonald polynomials at $t = \infty$, preprint 2018.
- [OS] D. Orr and M. Shimozono, Specialization of nonsymmetric Macdonald-Koornwinder polynomials, to appear in *J. Algebraic Combin.*, DOI:10.1007/s10801-017-0770-6.
- [Pe] D. Peterson, Quantum cohomology of G/P , Lecture notes, M.I.T., Spring 1997.
- [Po] A. Postnikov, Quantum Bruhat graph and Schubert polynomials, *Proc. Amer. Math. Soc.* **133** (2005), 699–709.
- [RY] A. Ram and M. Yip, A combinatorial formula for Macdonald polynomials, *Adv. Math.* **226** (2011), 309–331.
- [WN] H. Watanabe and S. Naito, A combinatorial formula expressing periodic R -polynomials, *J. Combin. Theory Ser. A* **148** (2017), 197–243.