

単項式イデアルと二項式イデアル

日 比 孝 之 (阪大情報)*

概 要

多項式環の単項式イデアルと二項式イデアルの可換代数は、凸多面体、単体的複体、有限半順序集合、有限グラフなどの組合せ数学、分割表と実験計画などの統計数学との相互関係を築きながら、グレブナー基底のテクニックなどを駆使し、劇的な発展を遂げている。本稿は、単項式イデアルと二項式イデアルの潮流を駆け足で辿る。

§ 1 . 背景 オイラーの多面体定理 (1752 年)、ピックの公式 (1899 年) などによる源を持つ凸多面体論は、組合せ論の伝統的な分野の一つである。その凸多面体論の潮流は 1970 年前後から劇変する。抽象論から具象論への時代の流れを背景に、可換代数との魅惑的な接点が発見され、代数学の抽象論から凸多面体の具象論への架け橋が築かれ、その結果、単項式イデアルの理論の劇的な展開が誘われた。その後、計算機の急激な発展とソフトウェアの進化を追い風とし、凸多面体論は計算代数の色彩を帯び、技の宝庫であるグレブナー基底の恩恵に浴し、三角形分割と二項式イデアルの理論が、統計数学とも接触し、著しい発展を遂げている。本稿は、そのような背景を踏まえ、単項式イデアルと二項式イデアルの潮流 ([HH11, HHO]) を駆け足で辿る。

a) 凸多面体と単体的複体 空間 $\mathbb{R}^3$ における格子点 $x_1 = (1, 1, 1)$, $x_2 = (1, 1, 0)$, $x_3 = (1, 0, 1)$, $x_4 = (0, 1, 1)$, $x_5 = (-1, -1, -1)$, を頂点とする六面体 P を考えよう。

その六面体の 6 個の面と 9 個の辺と 5 個の頂点を単体的複体 Δ と思うと、それは球面 S^2 の三角形分割である。いま、体 K 上の多項式環 $S = K[x_1, \dots, x_5]$ を準備し、単項式イデアル $I_\Delta = (x_1x_5, x_2x_3x_4)$ の剰余環 $A_\Delta = S/I_\Delta$ を作る¹。すると、 K 上の線型空間 A_Δ は $\text{supp}(u)$ がその単体的複体に属するような S の単項式 u の全体を基底に持つ。従って、剰余環 A_Δ の Hilbert 関数を計算することから単体的複体 Δ の面の個数 (いわゆる f 列) に関する数え上げの情報が得られる。単項式イデアル I_Δ は単体的複体 Δ に付随する Stanley–Reisner イデアルと呼ばれる ([Sta75, Rei])。

他方、その六面体 P に属する格子点 $x_1, \dots, x_5, x_6 = (0, 0, 0)$ に付随する Laurent 単項式 $t_1t_2t_3s, t_1t_2s, t_1t_3s, t_2t_3s, t_1^{-1}t_2^{-1}t_3^{-1}s, s$ を扱い、それらが生成する ($K[t_1^{\pm 1}, t_2^{\pm 1}, t_3^{\pm 1}, s]$ の) 部分環 $B_P = K[t_1t_2t_3s, t_1t_2s, t_1t_3s, t_2t_3s, t_1^{-1}t_2^{-1}t_3^{-1}s, s]$ を作る²。その定義イデアル $J_P \subset K[y_1, \dots, y_6]$ は二項式イデアル ($y_1y_5 - y_6^2, y_2y_3y_4 - y_1^2y_6$) である。二項式イデアル J_P は P のトーリックイデアルと呼ばれ、そのグレブナー基底を計算すれば、部分環 B_P の Hilbert 関数が計算できる。すると、六面体 P の dilated 多面体 NP (但し、 $N = 1, 2, \dots$) に属する格子点の個数に関する数え上げの情報が得られる。更に、正則三角形分割の理論 ([Stu]) から、六面体 P の三角形分割³ が構成できる。

本研究は JSPS 科研費 (基盤研究 (S)) JP26220701 の助成を受けたものである。

2010 Mathematics Subject Classification: 13P10, 05E40

キーワード: 単項式イデアル、二項式イデアル、凸多面体、トーリックイデアル、グレブナー基底

* 〒565-0871 大阪府吹田市山田丘 1 番 5 号

e-mail: hibi@math.sci.osaka-u.ac.jp

¹ 単項式イデアル I_Δ の生成系は単体的複体 Δ の極小な “non-face” に対応する。

² 部分環 B_P は P のトーリック環と呼ばれる。

³ 六面体 P の三角形分割は 6 個ある。

単項式イデアルの一般論は [HH11] に、二項式イデアルの一般論は [HHO] に、凸多面体と可換代数は [H92, H95] に、グレブナー基底の一般論は [H03] に委ねるとし、以下、単項式イデアルと二項式イデアルの著名な類を紹介し、その展望を占う。

§ 2 . 有限グラフ 頂点集合 $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$ の上の有限単純⁴ グラフ G の辺の集合を $E(G)$ とする。

a) edge ideal 体 K 上の多項式環 $S = K[x_1, \dots, x_n]$ を準備する。多項式環 S の単項式イデアル

$$I(G) = (\{x_i x_j : \{i, j\} \in E(G)\}) \subset S$$

を G の辺イデアル (edge ideal) と呼ぶ ([HH11, p. 156])。

頂点集合 $[n]$ の部分集合 C が、条件「 C に属する任意の i と j (但し、 $i \neq j$) は $\{i, j\} \in E(G)$ である。」を満たすとき、 C を G のクリークと呼ぶ。有限グラフ G のクリークの全体から成る集合 $\Delta(G)$ は $[n]$ 上の単体的複体となる。単体的複体 $\Delta(G)$ を G のクリーク複体と呼ぶ。有限グラフ G の補グラフを $\overline{G}$ とする⁵。すると、補グラフ $\overline{G}$ のクリーク複体 $\Delta(\overline{G})$ の Stanley–Reisner イデアル $I_{\Delta(\overline{G})}$ は $I(G)$ に一致する。

辺イデアルに関する文献は夥しい。とりわけ、 $I(G)$ の regularity に関する論文が量産されている。本稿では、 $I(G)$ の冪の linear resolution に関する結果を紹介する。

定理 ([HHZ]) 有限単純グラフ G に関する次の条件は同値である⁶。

- (i) $I(G)$ は linear resolution を持つ。
- (ii) $I(G)$ の任意の冪は linear resolution を持つ。
- (iii) 補グラフ $\overline{G}$ は弦グラフ⁷ である。

多項式環 S のイデアル I の冪の depth function (すなわち、 $\text{depth } S/I^N$, $N = 1, 2, \dots$) の研究 ([HH05a]) も盛んに展開されている。イデアル $I(G)$ の depth function に関する論文も散在するが、一般の有限グラフ G の edge ideal $I(G)$ の冪の limit depth (すなわち、 $\lim_{N \rightarrow \infty} \text{depth } S/I(G)^N$) を計算することは、著しく困難な状況である。

b) binomial edge ideal 体 K 上の多項式環 $K[\mathbf{x}, \mathbf{y}] = K[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n]$ を準備する。多項式環 $K[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$ の二項式イデアル

$$J_G = (\{x_i y_j - x_j y_i : \{i, j\} \in E(G)\}) \subset K[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$$

を G の二項式辺イデアル (binomial edge ideal) と呼ぶ。たとえば、 G が完全グラフ⁸ ならば、二項式辺イデアル J_G は、変数 $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ を成分とする 2 行 n 列の行列の 2 次の小行列式が生成するイデアルである。

定理 ([HHHKR, Oht]) 有限単純グラフ G の二項式辺イデアル J_G は根基イデアルである⁹。

⁴ 有限単純グラフとは、ループと重複辺を持たない有限グラフのことである。

⁵ 補グラフ $\overline{G}$ は $[n]$ が頂点集合、 $E(\overline{G}) = \{\{i, j\} : 1 \leq i < j \leq n, \{i, j\} \notin E(G)\}$ が辺の集合となる。

⁶ (i) と (iii) が同値であることは、既に、[Frö] が示している。(iii) $\Rightarrow$ (ii) の証明は、グレブナー基底のテクニックとともに、弦グラフの古典論である Dirac の定理 ([Dir]) に負う。

⁷ 有限単純グラフ G が弦グラフ (chordal graph) であるとは、 G の長さ 4 以上の任意のサイクルが弦を持つときという。

⁸ 辺の集合が $E(G) = \{\{i, j\} : 1 \leq i < j \leq n\}$ となる有限単純グラフを完全グラフと呼ぶ。

⁹ 根基イデアルであることは、 $x_1 > \dots > x_n > y_1 > \dots > y_n$ から導かれる辞書式順序に関する J_G の (被約な) グレブナー基底を計算し、その結果、 J_G のイニシャルイデアルが squarefree な単項式で生成されることから従う。

c) edge ring と edge polytope 以下、頂点集合 $[n]$ の上の有限単純グラフ G は連結であるとする。多項式環 $S = K[t_1, \dots, t_n]$ を準備し、空間 $\mathbb{R}^n$ の標準的単位座標ベクトルを $e_1, \dots, e_n$ とする。辺 $e = \{i, j\}$ に単項式 $t^e = t_i t_j \in S$ と格子点 $\rho(e) = e_i + e_j$ を付随させる。多項式環 S の部分環 $K[G] = K[\{t^e : e \in E(G)\}]$ を G の edge ring と呼ぶ。空間 $\mathbb{R}^n$ の有限集合 $\{\rho(e) : e \in E(G)\}$ の凸閉包 $\mathcal{P}_G$ を G の edge polytope と呼ぶ。

定理 ([SVV, OH98]) 有限単純連結グラフ G に関する次の条件は同値である¹⁰。

- (i) $K[G]$ は正規環である。
- (ii) G は odd cycle condition ([FHM]) を満たす¹¹。

いま、 $|E(G)|$ 変数の多項式環 $K[\{x_e : e \in E(G)\}]$ から $K[G]$ への環準同型 π を、 $e \in E(G)$ のとき、 $\pi(x_e) = t^e$ と定義する。その核、すなわち、 $K[G]$ の定義イデアルを I_G と表し、 $K[G]$ の (あるいは、 G の) トーリックイデアルと呼ぶ。トーリックイデアル I_G は二項式イデアルである。詳細は、[OH99a, OH99b]などを参照されたい。

§ 3 . 有限半順序集合 有限半順序集合 $P = \{p_1, \dots, p_n\}$ から定義される単項式イデアルと二項式イデアルを議論する。

a) 二項式イデアル 体 K 上の多項式環 $S = K[x_1, \dots, x_n, t]$ を準備し、部分集合 $\alpha \subset P$ に単項式 $u_\alpha = (\prod_{p_i \in \alpha} x_i) t \in S$ を付随させる。特に、 $u_\emptyset = t$ である。

部分集合 $\alpha \subset P$ が、条件「 $p_i \in \alpha, p_j \leq p_i$ ならば $p_j \in \alpha$ 」を満たすとき、 P のポセツトイデアル¹²と呼ぶ。特に、 $\emptyset$ と P は P のポセツトイデアルである。有限半順序集合 P のポセツトイデアルの全体を $L = \mathcal{J}(P)$ とすると、 L は包含関係による順序で有限半順序集合となる。更に、 α と β がポセツトイデアルならば $\alpha \cap \beta$ と $\alpha \cup \beta$ もポセツトイデアルであるから、 L は有限束となる。上限は $\alpha \vee \beta = \alpha \cup \beta$ と、下限は $\alpha \wedge \beta = \alpha \cap \beta$ となる。すると、分配法則¹³が成立するから $L = \mathcal{J}(P)$ は有限分配束である¹⁴。

多項式環 S の部分環 $K[\{u_\alpha : \alpha \in L = \mathcal{J}(P)\}]$ を $\mathcal{R}_K[L]$ と表し、 K 上の $|L|$ 変数の多項式環 $K[L] = K[\{y_\alpha : \alpha \in L = \mathcal{J}(P)\}]$ から $\mathcal{R}_K[L]$ への環準同型 $\pi : K[L] \rightarrow \mathcal{R}_K[L]$ を $\pi(y_\alpha) = u_\alpha$ と定義する。その核、すなわち、 $\mathcal{R}_K[L]$ の定義イデアルを I_L とする。

以下、

$$\mathcal{R}_K[L] = K[\{u_\alpha : \alpha \in L = \mathcal{J}(P)\}]$$

を $L = \mathcal{J}(P)$ のトーリック環と、 I_L を $L = \mathcal{J}(P)$ のトーリックイデアルと呼ぶ。有限分配束 $L = \mathcal{J}(P)$ の元 α と β が比較不可能¹⁵なとき、二項式 $f_{\alpha, \beta} \in K[L]$ を

$$f_{\alpha, \beta} = y_\alpha y_\beta - y_{\alpha \wedge \beta} y_{\alpha \vee \beta}$$

と定義する。すると、 $u_\alpha u_\beta = u_{\alpha \cap \beta} u_{\alpha \cup \beta}$ だから、 $f_{\alpha, \beta} \in I_L$ である。

¹⁰ 論文 [SVV] の証明は、純粋に環論的であるが、[OH98] の証明は単模被覆の存在を経由している。実際、(i) と (ii) は、(iii) $\mathcal{P}_G$ が単模被覆を持つ、と同値である。

¹¹ すなわち、 C と C' が G の奇サイクルで共通の頂点を持たないならば C の頂点と C' の頂点を結ぶ辺が存在する。

¹² ポセツト (poset) は partially ordered set の俗称である。

¹³ $\alpha \vee (\beta \wedge \gamma) = (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma)$, $\alpha \wedge (\beta \vee \gamma) = (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma)$

¹⁴ 逆に、任意の有限分配束 L に対し、 $L = \mathcal{J}(P)$ となる唯一の有限半順序集合 P が存在する (有限分配束の構造定理 (Birkhoff))。実際、有限分配束 L の (最小限と異なる) 元 α で join-irreducible (すなわち、 $\alpha = \beta \vee \gamma$ となる $\beta < \alpha, \gamma < \alpha$ が存在しない) なものの全体から成る (L の) 半順序 (部分) 集合を P とすれば、 $L = \mathcal{J}(P)$ である。

¹⁵ 半順序集合 L の元 α と β が、 L の順序で $\alpha \not\leq \beta, \beta \not\leq \alpha$ となるとき、 L で比較不可能という。

多項式環 $K[L]$ の変数の全順序 $<$ で、条件「 $\alpha \subset \beta$ ならば $y_\alpha < y_\beta$ 」を満たすものを固定し、その全順序から誘導される逆辞書式順序を $<_{\text{rev}}$ と表す¹⁶。すると、 $L = \mathcal{J}(P)$ の元 α と β が比較不可能なとき、 $y_{\alpha \wedge \beta} y_{\alpha \vee \beta} <_{\text{rev}} y_\alpha y_\beta$ である。換言すると、 $f_{\alpha, \beta}$ のイニシャル単項式は $\text{in}_{<_{\text{rev}}}(f_{\alpha, \beta}) = y_\alpha y_\beta$ である¹⁷。二項式 $f_{\alpha, \beta}$ (但し、 $\alpha \not\subseteq \beta, \beta \not\subseteq \alpha$) の全体から成る有限集合を $\mathcal{G}_L$ とし、 $\text{in}_{<_{\text{rev}}}(\mathcal{G}_L) = \{\text{in}_{<_{\text{rev}}}(f_{\alpha, \beta}) : f_{\alpha, \beta} \in \mathcal{G}_L\}$ とする。すなわち、 $\text{in}_{<_{\text{rev}}}(\mathcal{G}_L)$ は単項式 $y_\alpha y_\beta$ (但し、 $\alpha \not\subseteq \beta, \beta \not\subseteq \alpha$) の全体から成る有限集合である。簡単な議論から、次の (♣) が従う。

(♣) 多項式環 $K[L]$ の単項式 u で、条件「任意の $y_\alpha y_\beta \in \text{in}_{<_{\text{rev}}}(\mathcal{G}_L)$ は u を割り切らない」を満たすものの全体から成る集合 $\mathcal{B}$ は、 K 上の線型空間 $K[L]/I_L$ における線型独立な集合である¹⁸。

すると、 $\mathcal{G}_L$ は I_L の $<_{\text{rev}}$ に関するグレブナー基底である。換言すると、 $\text{in}_{<_{\text{rev}}}(\mathcal{G}_L)$ は、 I_L の $<_{\text{rev}}$ に関するイニシャルイデアル

$$\text{in}_{<_{\text{rev}}}(I_L) = (\{ \text{in}_{<_{\text{rev}}}(f) : 0 \neq f \in I_L \})$$

の生成系である¹⁹。詳細は省略するが、 $\mathcal{G}_L$ が (♣) を満たすことから I_L のグレブナー基底となることは、いわゆる Macaulay の定理 ([H03, p. 28]) から従う²⁰。特に、 $\mathcal{G}_L$ は I_L の生成系である。すなわち

$$I_L = (\{ f_{\alpha, \beta} : \alpha \in L, \beta \in L, \alpha \not\subseteq \beta, \beta \not\subseteq \alpha \}) \quad (1)$$

である。

一般に、任意の有限束 L があったとき、二項式イデアル I_L を (1) と定義しよう。二項式イデアル I_L を L の join-meet イデアルと呼ぶ。但し、 L が分配束でなければ、 I_L が何らかのトーリック環の定義イデアルになっているか否かはわからない。実際、 L が分配束でなければ、 I_L は素イデアルではないから、トーリック環の定義イデアルとはならない。しかしながら、素イデアルではないとしても、 I_L は根基イデアルであろう、と予想されていた。が、その予想も反例があった ([EH])。

定理 ([H87]) 任意の有限束 L に関する次の条件は同値である。

- (i) I_L は素イデアルである。
- (ii) $\mathcal{G}_L$ は I_L の $<_{\text{rev}}$ に関するグレブナー基底である。
- (iii) L は分配束である。

¹⁶ 一般に、多項式環 $S = K[x_1, \dots, x_n]$ の単項式の全体の集合の上の全順序 $<$ が、条件 (i) 任意の単項式 $u \neq 1$ は $1 < u$ である、と (ii) 単項式 u と v が $u < v$ ならば $uw < vw$ が任意の単項式 w で成立する、を満たすとき、 $<$ を S の上の単項式順序と呼ぶ。逆辞書式順序 $<_{\text{rev}}$ は単項式順序である。

¹⁷ 多項式環 $S = K[x_1, \dots, x_n]$ の上の単項式順序 $<$ を固定するとき、多項式 $0 \neq f \in S$ に現れる単項式の内、 $<$ に関して最大のものを $\text{in}_{<}(f)$ と表し、 f のイニシャル単項式と呼ぶ。

¹⁸ 単項式の集合 $\mathcal{B}$ が $K[L]/I_L$ における線型独立な集合であることと、 $\mathcal{B}$ が条件「 $u \neq v$ が $\mathcal{B}$ に属する単項式ならば $\pi(u) \neq \pi(v)$ 」を満たすことは同値である。

¹⁹ 単項式順序 $<$ を固定するとき、イデアル I に属する有限個の多項式の集合 $\{g_1, \dots, g_s\}$ が I の $<$ に関するグレブナー基底であるとは、 $\{\text{in}_{<}(g_1), \dots, \text{in}_{<}(g_s)\}$ がイニシャルイデアル $\text{in}_{<}(I)$ の生成系となる時にいう。

²⁰ なお、Buchberger の判定法から $\mathcal{G}_L$ がグレブナー基底であることを証明するには、まず、 $\mathcal{G}_L$ が I_L の生成系であることを示す必要がある。しかし、Macaulay の定理を使うと、 $\mathcal{G}_L$ が生成系であるか否かがわからなくても、グレブナー基底であることが従い、その結果、 $\mathcal{G}_L$ が生成系であることもわかる。

証明は、古典的な束論における Dedekind の定理²¹を使う。有限束 L が分配束のとき、 I_L の定義を、 $\mathcal{R}_K[L]$ の定義イデアルではなく、(1) とするならば、Buchberger の判定法から、 $\mathcal{G}_L$ は I_L の $<_{\text{rev}}$ に関するグレブナー基底であることが示せる。しかし、 I_L が素イデアルであることを、 $\mathcal{R}_K[L]$ を経由せず、示すことはできるのであろうか。

有限半順序集合 $P = \{p_1, \dots, p_n\}$ に最小限 $-\infty$ を添加したものを $\hat{P}$ とする。半順序集合 $\hat{P}$ から非負整数の全体 $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ への写像 σ が順序を逆転する写像であるとは、条件「 $-\infty < p_i < p_j$ ならば $\sigma(-\infty) \geq \sigma(p_i) \geq \sigma(p_j)$ 」を満たすときにいう。順序を逆転する写像 σ に $S = K[x_1, \dots, x_n, t]$ の単項式 $u^\sigma = (\prod_{i=1}^n x_i^{\sigma(x_i)}) t^{\sigma(-\infty)}$ を付随させる。単項式 u^σ は $\mathcal{R}_K[L]$ に属する。更に、順序を逆転する写像 σ に付随する単項式 u^σ の全体は、 $\mathcal{R}_K[L]$ の K 上の線型空間としての基底となる²²。すると、 $\mathcal{R}_K[L]$ は正規環である。特に、 $\mathcal{R}_K[L]$ は Cohen–Macaulay 環である。他方、写像 $\sigma : \hat{P} \rightarrow \mathbb{Z}_{\geq 0}$ が順序を真に逆転する写像であるとは、条件「 $-\infty < p_i < p_j$ ならば $\sigma(-\infty) > \sigma(p_i) > \sigma(p_j) > 0$ 」を満たすときにいう。順序を真に逆転する写像 σ に付随する単項式 u^σ の全体は、トーリック環 $\mathcal{R}_K[L]$ の canonical module $\omega_{\mathcal{R}_K[L]}$ の K 上の線型空間としての基底となる。

すると、トーリック環 $\mathcal{R}_K[L]$ が Gorenstein 環、すなわち、 $\omega_{\mathcal{R}_K[L]}$ が単項イデアル(単項式イデアルではない!) となるためには、有限半順序集合 P が純である²³ ことが必要十分である、ということが従う。

b) 順序凸多面体 有限半順序集合 $P = \{p_1, \dots, p_n\}$ の部分集合 α に格子点 $\rho(\alpha) = \sum_{p_i \in \alpha} \mathbf{e}_i \in \mathbb{R}^n$ を対応させる。但し、 $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ は $\mathbb{R}^n$ の標準的単位座標ベクトルである。特に、 $\rho(\emptyset)$ は $\mathbb{R}^n$ の原点である。

空間 $\mathbb{R}^n$ における格子点²⁴ の有限集合 $\{\rho(\alpha) : \alpha \in \mathcal{J}(P)\}$ の凸閉包を $\mathcal{O}(P)$ とする。格子凸多面体 $\mathcal{O}(P) \subset \mathbb{R}^n$ を P の順序凸多面体と呼ぶ。順序凸多面体に属する格子点の集合は $\{\rho(\alpha) : \alpha \in \mathcal{J}(P)\}$ であるから、§ 1 の a) における部分環 $B_{\mathcal{O}(P)}$ は $\mathcal{R}_K[L]$ に一致する。それゆえ、 $\mathcal{R}_K[L]$ は $\mathcal{O}(P)$ のトーリック環と、 I_L は $\mathcal{O}(P)$ のトーリックイデアルとも呼ばれる。順序凸多面体 $\mathcal{O}(P)$ の次元は n である。

有限分配束 $L = \mathcal{J}(P)$ の極大鎖

$$C : \emptyset = \alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_n = P$$

を考えよう。もちろん、それぞれの α_i は P のポセツトイデアルであり、 $|\alpha_i| = i$ である。すると、 $\{\rho(\alpha_0), \rho(\alpha_1), \dots, \rho(\alpha_n)\} \subset \mathbb{R}^n$ の凸閉包は、次元 n の単体である。一般に、 C が $L = \mathcal{J}(P)$ の(極大とは限らない、任意の)鎖のとき、 $\{\rho(\alpha) : \alpha \in C\}$ の $\mathbb{R}^n$ における凸閉包は、次元 $|C| - 1$ の単体である。それを $\text{conv}(C)$ と表す。すると

$$\Gamma = \{\text{conv}(C) : C \text{ は } L = \mathcal{J}(P) \text{ の鎖}\}$$

は、 $\mathcal{O}(P)$ の三角形分割となる。三角形分割 Γ を、頂点集合 $L = \mathcal{J}(P)$ の上の単体的複体 Δ の幾何学的実現 $|\Delta|$ と見做すと、 $\text{in}_{<_{\text{rev}}}(I_L) = I_\Delta$ となる。

²¹ 有限束 L が分配束であるには、 L が pentagon lattice N_5 と diamond lattice M_5 の両者を部分束に持たないことが必要十分である。

²² トーリック環 $\mathcal{R}_K[L]$ に属する単項式をそのように解釈すると、 $\mathcal{R}_K[L]$ が表現論とも関連する。詳細は [Howe, Wang] に譲る。

²³ 有限半順序集合 P が純であるとは、 P に含まれるすべての極大鎖の長さが等しいときにいう。なお、鎖とは全順序部分集合のことである。

²⁴ 格子点とは $\mathbb{Z}^n$ に属する $\mathbb{R}^n$ の点のことである。

一般に、 $\prec$ を $K[L]$ の上の単項式順序とし、 I_L の $\prec$ に関するイニシャルイデアルの根基 $\sqrt{\text{in}_{\prec}(I_L)}$ を Stanley–Reisner ideal とする L の上の単体的複体を $\Delta_{\prec}$ とする。すると、 $F = \{\alpha_1, \dots, \alpha_q\} \in \Delta_{\prec}$ ならば、 $\text{conv}(F)$ は $\mathbb{R}^n$ の次元 $q-1$ の単体である。更に、 $\Delta_{\prec}$ の幾何学的実現 $|\Delta_{\prec}|$ は $\mathcal{O}(P)$ の三角形分割である ([Stu])。イニシャルイデアルの根基から得られる三角形分割を正則三角形分割と呼ぶ。なお、 $\text{in}_{\prec}(I_L)$ が根基イデアルであることと $\Delta_{\prec}$ が単模 (unimodular) である²⁵ ことは同値である ([Stu])。

c) 単項式イデアル 体 K 上の $2n$ 変数の多項式環 $K[\mathbf{x}, \mathbf{y}] = K[x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n]$ を準備し、 $P = \{p_1, \dots, p_n\}$ のポセットイデアル α に、単項式

$$w_{\alpha} = \left(\prod_{p_i \in \alpha} x_i \right) \left(\prod_{p_j \notin \alpha} y_j \right) \in K[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$$

を付随させる。特に、 $w_{\emptyset} = y_1 \cdots y_n, w_P = x_1 \cdots x_n$ である。更に、単項式イデアル

$$H_P = (\{w_{\alpha} : \alpha \in L = \mathcal{J}(P)\}) \subset K[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$$

を導入する。

補題 単項式イデアル H_P は linear resolution を持つ²⁶。

いま、 H_P が squarefree な単項式イデアルであることから、 $H_P = I_{\Delta_P}$ となる、頂点集合 $V = \{x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n\}$ の上の単体的複体 Δ_P が存在する。その単体的複体 Δ_P の Alexander dual を $\Delta_P^{\vee}$ とする。すなわち

$$\Delta_P^{\vee} = \{V \setminus F : F \subset V, F \notin \Delta_P\}$$

である。すると、 $\Delta_P^{\vee}$ は V の上の単体的複体である。他方、頂点集合を V とし、辺の集合を $E(G_P) = \{\{x_i, y_j\} : p_i \leq p_j\}$ とする有限二部グラフ G_P を考えよう。

補題 有限二部グラフ G_P の edge ideal $I(G_P)$ と単体的複体 Δ_P の Alexander dual $\Delta_P^{\vee}$ の Stanley–Reisner ideal $I_{\Delta_P^{\vee}}$ は一致する。

一般に、 $I_{\Delta} \subset S$ が linear resolution を持つことと $S/I_{\Delta^{\vee}}$ が Cohen–Macaulay であることは同値である ([ER])²⁷。すると、 H_P が linear resolution を持つことから、 $K[\mathbf{x}, \mathbf{y}]/I(G_P)$ は Cohen–Macaulay である。これより、Cohen–Macaulay 二部グラフ²⁸ が分類できる。

定理 ([HH05b]) 有限二部グラフ G が Cohen–Macaulay グラフであるための必要十分条件は、 G と G_P が同型となる有限半順序集合 P が存在すること²⁹ である。

²⁵ 三角形分割を構成する極大な単体の体積が $1/n!$ であるとき、その三角形分割を単模と呼ぶ。

²⁶ 実際、 H_P が linear quotients を持つ [HH11, Theorem 9.1.8] ことから、 H_P は linear resolution を持つことが従う。

²⁷ その結果を一般化することから componentwise linear ideal の概念 [HH99, AHH] が誕生した。

²⁸ 一般に、有限グラフ G が Cohen–Macaulay であるとは、剰余環 $S/I(G)$ が Cohen–Macaulay 環であるときにいう。

²⁹ 換言すると、二部グラフ G が Cohen–Macaulay であるためには、次の条件が成立することが必要十分である。『(i) G の頂点の個数が偶数個、しかも、(ii) 頂点の集合の分割を $U \cup V$ とすると $|U| = |V|$ となり、更に、(iii) 頂点の番号を適当に入れ替え $U = \{x_1, \dots, x_n\}$ と $V = \{y_1, \dots, y_n\}$ とすると、条件「 $\{x_i, y_i\} \in E(G)$ for $i = 1, \dots, n$; $\{x_i, y_j\} \in E(G)$ ならば $i \leq j$; $\{x_i, y_j\}, \{x_j, y_k\} \in E(G)$ ならば $\{x_i, y_k\} \in E(G)$ 」が満たされる。』

§ 4 . 反射的ファノ多面体 次元 d の格子凸多面体 $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^d$ が、条件³⁰

$$\sum_{\mathbf{a} \in \mathcal{P} \cap \mathbb{Z}^d} \mathbb{Z}(\mathbf{a}, 1) = \mathbb{Z}^{d+1} \quad (2)$$

を満たし、更に、 $\mathcal{P}$ の内部に含まれる格子点が $\mathbb{R}^d$ の原点のみであるとき、 $\mathcal{P}$ をファノ多面体と呼ぶ。

a) 反射的ファノ多面体 ファノ多面体 $\mathcal{P}$ が反射的であるとは、その双対凸多面体

$$\mathcal{P}^\vee = \{ \mathbf{a} \in \mathbb{R}^d : \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \leq 1, \forall \mathbf{b} \in \mathcal{P} \}$$

が格子凸多面体であるときにいう³¹。

次元 d のファノ多面体 $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^d$ のトーリック環を $K[\mathcal{P}]$ とする。すなわち、 $K[\mathcal{P}]$ は $K[x^{\pm 1}, t] = K[x_1^{\pm 1}, \dots, x_d^{\pm 1}, t]$ の部分環

$$K[\mathcal{P}] = K[\{ \mathbf{x}^{\mathbf{a}} t : \mathbf{a} \in \mathcal{P} \cap \mathbb{Z}^d \}]$$

である。トーリック環 $K[\mathcal{P}]$ が正規環のとき、 $\mathcal{P}$ を正規なファノ多面体と呼ぶ³²。

体 K 上の $|\mathcal{P} \cap \mathbb{Z}^d|$ 変数の多項式環 $K[y] = K[\{ y_{\mathbf{a}} : \mathbf{a} \in \mathcal{P} \cap \mathbb{Z}^d \}]$ を準備し、環準同型 $\pi : K[y] \rightarrow K[\mathcal{P}]$ を $\pi(y_{\mathbf{a}}) = \mathbf{x}^{\mathbf{a}} t$ と定義し、その核、すなわち、 $K[\mathcal{P}]$ の定義イデアル $I_{\mathcal{P}}$ を $\mathcal{P}$ のトーリックイデアルと呼ぶ。いま、 $K[y]$ の変数の全順序 $<$ で原点に対応する変数 y_0 を最小とするものを固定し、 $<$ から導かれる $K[y]$ の逆辞書式順序 $<_{\text{rev}}$ を考えよう。一般に、ファノ多面体が正規であるとか、あるいは、反射的であるとかを示すことは難しいが、下記の補題³³ は、しばしば、有益である。

補題 ファノ多面体 $\mathcal{P}$ のイニシャルイデアル $\text{in}_{<_{\text{rev}}}(I_{\mathcal{P}})$ が squarefree な単項式で生成されるならば、 $\mathcal{P}$ は正規、しかも、反射的である。

格子凸多面体の理論における反射的ファノ多面体が担う顕著な役割を端的に物語るのは、次の事実である ([HaMe, Proposition 2.2])、「任意の格子凸多面体は、或る反射的ファノ多面体の面になっている³⁴。」更に、[HM, Proposition 2.2] の証明を詳細に辿るならば、「任意の正規な格子凸多面体は、或る正規な反射的ファノ多面体の面になっている。」ということもチェックできる。

たとえば、一次元の格子凸多面体 (すなわち、線分) $[0, 1]$ は4次元の反射的ファノ多面体の面であるが、次元2の、あるいは、次元3の反射的ファノ多面体の面とはならない。すると、格子凸多面体は、必ずしも、反射的ファノ多面体のファセット (極大面) になるとは限らない。すると、どんな格子凸多面体が反射的ファノ多面体のファセットになるのだろうか、という問いが浮上する。

その問いを議論する準備のため、順序凸多面体に加え、鎖凸多面体と安定集合凸多面体を導入する。

³⁰ 一般に、条件 (2) を仮定しても議論の展開の妨げにはならず、寧ろ、無駄な誤解を避けることができる。

³¹ 空間 $\mathbb{R}^d$ の通常の内積を $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$ と表す。

³² 条件 (2) を仮定すると、 $\mathcal{P}$ が正規であることと $\mathcal{P}$ が整分割性を持つことは同値である。一般に、格子凸多面体 $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^d$ が整分割性を持つとは、任意の整数 $N \geq 1$ と任意の格子点 $\alpha \in N\mathcal{P}$ について、 $\mathcal{P}$ に属する N 個の格子点 $\alpha_1, \dots, \alpha_N$ で、 $\alpha = \alpha_1 + \dots + \alpha_N$ となるものが存在するときにいう。

³³ 証明は、三角形分割の議論を経由すれば、ほとんど自明である。

³⁴ 厳密には、或る反射的ファノ多面体の面と unimodular 同値 (脚注 36) である、と記載すべきである。

b) 鎖凸多面体 有限半順序集合 $P = \{p_1, \dots, p_n\}$ の順序凸多面体 $\mathcal{O}(P) \subset \mathbb{R}^n$ とともに、鎖凸多面体 $\mathcal{C}(P) \subset \mathbb{R}^n$ も興味深い ([Sta86])。部分集合 $\alpha \subset P$ が P の反鎖であるとは、 α に属する任意の元 p_i と p_j (但し、 $i \neq j$) が比較不可能なときにいう。いま、 P の反鎖の全体を $\mathcal{A}(P)$ とし、有限集合 $\{\rho(\alpha) : \alpha \in \mathcal{A}(P)\} \subset \mathbb{R}^n$ の凸閉包 $\mathcal{C}(P) \subset \mathbb{R}^n$ を P の鎖凸多面体と呼ぶ。鎖凸多面体 $\mathcal{C}(P)$ の次元は n である。頂点集合は $\{\rho(\alpha) : \alpha \in \mathcal{A}(P)\}$ である。すると、 $|\mathcal{J}(P)| = |\mathcal{A}(P)|$ である³⁵ から、 $\mathcal{O}(P)$ と $\mathcal{A}(P)$ の頂点の個数は等しい。更に、 $\mathcal{O}(P)$ と $\mathcal{A}(P)$ の辺の個数も等しい ([HLSS])。

他方、 $\mathcal{O}(P)$ の極大面の個数は P に最小元 $-\infty$ と最大元 $+\infty$ を添加した半順序集合 $P \cup \{-\infty, +\infty\}$ のハッセ図形の辺の個数と一致し、 $\mathcal{A}(P)$ の極大面の個数は P の極大鎖の個数と n の和に一致する。たとえば、 $X = \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5\}$ を $p_1 < p_3, p_2 < p_3, p_3 < p_4, p_3 < p_5$ なる順序を持つ半順序集合とすると、 $\mathcal{O}(P)$ の極大面の個数は8個、 $\mathcal{C}(P)$ の極大面の個数は9個である。特に、 $\mathcal{O}(X)$ と $\mathcal{C}(X)$ は unimodular 同値³⁶ ではない。

定理 ([HL]) 有限半順序集合 P に関する次の条件は同値である³⁷。

- (i) $\mathcal{O}(P)$ と $\mathcal{C}(P)$ は unimodular 同値である。
- (ii) $\mathcal{O}(P)$ の極大面の個数と $\mathcal{C}(P)$ の極大面の個数は一致する。
- (iii) P は半順序集合 X を部分半順序集合として含まない。

c) 安定集合凸多面体 頂点集合 $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$ の上に有限単純グラフ G の安定集合とは、部分集合 $\alpha \subset [n]$ で、条件「 $i \in \alpha, j \in \alpha, i \neq j$ ならば $\{i, j\} \notin \alpha$ 」を満たすものである。特に、 $\emptyset, \{1\}, \dots, \{n\}$ は G の安定集合である。有限グラフ G の安定集合の全体からなる集合を $\mathcal{S}(G)$ とする。いま、 $\alpha \in \mathcal{S}(G)$ のとき、 $\rho(\alpha) = \sum_{i \in \alpha} e_i \in \mathbb{R}^n$ とし、 $\mathbb{R}^n$ の有限集合 $\{\rho(\alpha) : \alpha \in \mathcal{S}(G)\}$ の凸閉包を $\mathcal{Q}_G$ とする。すると、 $\mathcal{Q}_G$ は $\mathbb{R}^n$ の次元 n の格子凸多面体である。それを G の安定集合凸多面体と呼ぶ。有限グラフ G が理想グラフ (perfect graph)³⁸ ならば、 $\mathcal{Q}_G$ は圧搾的 (compressed)³⁹ である ([OH01])。

さて、格子凸多面体の役者が舞台に揃ったから、どんな格子凸多面体が反射的ファノ多面体のファセットになるのだろうか、との問いに戻ろう。

定理 ([HM, HMOS, HMT]) 任意の順序凸多面体は正規な反射的ファノ多面体のファセットである。任意の鎖凸多面体は正規な反射的ファノ多面体のファセットである。

定理 ([HTa, HTb]) 理想グラフの安定集合凸多面体は正規な反射的ファノ多面体のファセットである。

³⁵ ポセッティイデアルと反鎖の自然な対応がある。すなわち、任意のポセッティイデアルの極大元の集合は反鎖である。任意の反鎖は或るポセッティイデアルの極大元の集合である。

³⁶ 一般に、次元 n の格子凸多面体 $P \subset \mathbb{R}^n$ と $Q \subset \mathbb{R}^n$ が unimodular 同値であるとは、unimodular 行列 (行列式 $= \pm 1$ の整数行列) $U \in \mathbb{Z}^{n \times n}$ と整数ベクトル $w \in \mathbb{Z}^n$ を使い、 $P = f_U(Q) + w$ となる時にいう。但し、 f_U は U が定義する $\mathbb{R}^n$ の線型変換である。

³⁷ もっと強く、或る $1 < i < |P| - 1$ について、 $\mathcal{O}(P)$ の i 次元の面の個数と $\mathcal{C}(P)$ の i 次元の面の個数が一致するならば、 $\mathcal{O}(P)$ と $\mathcal{C}(P)$ は unimodular 同値である、と予想されている。

³⁸ 頂点集合 $[n]$ の上の有限単純グラフ G が理想グラフであるとは、 G の任意の (G 自身を含む) 誘導部分グラフ H の彩色数と H に含まれるクリークに属する元の最大個数が一致するときにいう。但し、有限単純グラフ G の彩色数とは、次の条件「 G の安定集合 $W_1, \dots, W_t$ で $[n] = W_1 \cup \dots \cup W_t$ となるものが存在する」を満たす整数 $t \geq 1$ の最小値のことである。理想グラフの補グラフは理想グラフである。

³⁹ 格子凸多面体 P のトーリックイデアルの、任意の逆辞書式順序に関するイニシャルイデアルが根基イデアルのとき、 P を圧搾的という。

一般に、任意の整数 $1 \leq r < n$ があつたとき、次元 r の格子凸多面体 $\mathcal{P}$ で、条件「 $\mathcal{P}$ は次元 n の反射的ファノ多面体の面になるが、次元 $n-1$ 以下の反射的ファノ多面体の面にはならない」を満たすものは存在するであろうか。あるいは、次元 n の正規な反射的ファノ多面体のファセットにはならないが、次元 n の反射的ファノ多面体のファセットになるような、次元 $n-1$ の正規な格子凸多面体は存在するであろうか⁴⁰。

§ 5 . 統計数学 Box–Behnken 計画と呼ばれる実験計画の主効果モデルを、マルコフ連鎖モンテカルロ法で検定する際のマルコフ基底は、D型ルート系に付随する格子凸多面体⁴¹のトーリックイデアルの生成系と解釈できる。他方、その格子凸多面体の三角形分割は、純粋な組合せ論の議論から構成できる。すると、その三角形分割の情報から、そのトーリックイデアルのグレブナー基底を導くことができる⁴²。一般に、グレブナー基底は生成系であるから、Box–Behnken 計画のマルコフ基底が、凸多面体の三角形分割を経由し、発掘される ([AHO])。背景と概要は [H17] を参照されたい。

参考文献

- [AHH] A. Aramova, J. Herzog and T. Hibi, Ideals with stable Betti numbers, *Adv. in Math.* **152** (2000), 72–77.
- [AHO] S. Aoki, T. Hibi and H. Ohsugi, Markov chain Monte Carlo methods for the Box–Behnken designs and centrally symmetric configurations, *Journal of Statistical Theory and Practice* **10** (2016), 59–72.
- [Dir] G. A. Dirac, On rigid circuit graphs, *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg* **38** (1961), 71–76.
- [ER] J. A. Eagon and V. Reiner, Resolutions of Stanley–Reisner rings and Alexander duality, *J. Pure and Appl. Algebra* **130** (1998), 265–275.
- [EH] V. Ene and T. Hibi, The join-meet ideal of a finite lattice, *J. Commut. Algebra* **5** (2013), 209–230.
- [FHM] D. R. Fulkerson, A. J. Hoffman and M. H. McAndrew, Some properties of graphs with multiple edges, *Canad. J. Math.* **17** (1965), 166–177.
- [Frö] R. Fröberg, On Stanley–Reisner rings, in “Topics in Algebra (Belcerzyk, L. et al., Eds.), Polish Scientific Publishers, Volume 26, 1990, pp. 57–70.
- [HaMe] C. Haase and I. V. Melnikov, The reflexive dimension of a lattice polytope, *Annals of Combin.* **10** (2006), 211–217.
- [HH99] J. Herzog and T. Hibi, Componentwise linear ideals, *Nagoya Math. J.* **153** (1999), 141–153.
- [HH05a] J. Herzog and T. Hibi, The depth of powers of an ideal, *J. of Algebra* **291** (2005), 534–550.
- [HH05b] J. Herzog and T. Hibi, Distributive lattices, bipartite graphs and Alexander duality, *J. Algebraic Combin.* **22** (2005), 289–302.
- [HH11] J. Herzog and T. Hibi, “Monomial Ideals,” GTM 260, Springer, 2011.
- [HHHKR] J. Herzog, T. Hibi, F. Hreinsdóttir, T. Kahle and J. Rau, Binomial edge ideals and conditional independence statements, *Advances Appl. Math.* **45** (2010), 317–333.
- [HHO] J. Herzog, T. Hibi and H. Ohsugi, “Binomial Ideals,” Prog. Math., Birkhäuser, in press.
- [HHZ] J. Herzog, T. Hibi and X. Zheng, Monomial ideals whose powers have a linear resolution, *Math. Scand.* **95** (2004), 23–32.

⁴⁰ 一般に、正規な格子凸多面体の面は正規である。

⁴¹ 空間 $\mathbb{R}^d$ の有限集合 $\mathbf{D}_d \cup (-\mathbf{D}_d)$ の凸閉包である。但し、 $\mathbf{D}_d = \{\mathbf{e}_i \pm \mathbf{e}_j : 1 \leq i < j \leq d\}$ である。

⁴² イニシャルイデアルの根基から正則三角形分割を作ること (§ 3 の b)) の逆の着想である。

- [H87] T. Hibi, Distributive lattices, affine semigroup rings and algebras with straightening laws, in “Commutative Algebra and Combinatorics” (M. Nagata and H. Matsumura, Eds.), Advanced Studies in Pure Math., Volume 11, North-Holland, Amsterdam, 1987, pp. 93–109.
- [H92] T. Hibi, “Algebraic Combinatorics on Convex Polytopes,” Carslaw Publications, Glebe, N.S.W., Australia, 1992.
- [H95] 日比孝之『可換代数と組合せ論』(シュプリンガー東京) 1995 年
- [H03] 日比孝之『グレブナー基底』(朝倉書店) 2003 年
- [H17] 日比孝之「凸多面体と可換代数と統計の奏でる三重奏を聴く」特別セッション“凸多面体論の現代的潮流”日本数学会年会, 応用数学分科会, 2017 年 3 月 26 日
- [HL] T. Hibi and N. Li, Unimodular equivalence of order and chain polytopes, *Math. Scand.* **118** (2016), 5–12.
- [HLSS] T. Hibi, N. Li, Y. Sahara and A. Shikama, The numbers of edges of the order polytope and the chain polytope of a finite partially ordered set, *Discrete Math.* **340** (2017), 991–994.
- [HM] T. Hibi, K. Matsuda, Quadratic Gröbner bases of twinned order polytopes, *European J. Combin.* **54** (2016), 187–192.
- [HMOS] T. Hibi, K. Matsuda, H. Ohsugi and K. Shibata, Centrally symmetric configurations of order polytopes, *J. Algebra* **443** (2015), 469–478.
- [HMT] T. Hibi, K. Matsuda and A. Tsuchiya, Gorenstein Fano polytopes arising from order polytopes and chain polytopes, arXiv:1507.03221
- [HTa] T. Hibi and A. Tsuchiya, Reflexive polytopes arising from perfect graphs, arXiv:1703.04410
- [HTb] T. Hibi and A. Tsuchiya, Reflexive polytopes arising from partially ordered sets and perfect graphs, arXiv:1705.00134
- [Howe] R. Howe, Weyl Chambers and standard monomial theory for poset lattice cones, *Q. J. Pure Appl. Math.* **1** (2005), 227–239.
- [OH98] H. Ohsugi and T. Hibi, Normal polytopes arising from finite graphs, *J. Algebra* **207** (1998), 409–426.
- [OH99a] H. Ohsugi and T. Hibi, Toric ideals generated by quadratic binomials, *J. Algebra* **218** (1999), 509–527.
- [OH99b] H. Ohsugi and T. Hibi, Koszul bipartite graphs, *Adv. Appl. Math.* **22** (1999), 25–28.
- [OH01] H. Ohsugi and T. Hibi, Convex polytopes all of whose reverse lexicographic initial ideals are squarefree, *Proc. Amer. Math. Soc.* **129** (2001), 2541–2546.
- [Oht] M. Ohtani, Graphs and ideals generated by some 2-minors, *Comm. Algebra* **39** (2011), 905–917.
- [Rei] G. A. Reisner, Cohen–Macaulay quotients of polynomial rings, *Adv. Math.* **21** (1976), 30–49.
- [Sta75] R. P. Stanley, The upper bound conjecture and Cohen–Macaulay rings, *Stud. Appl. Math.* **54** (1975), 135–142.
- [Sta86] R. P. Stanley, Two poset polytopes, *Discrete Comput. Geom.* **1** (1986), 9–23.
- [SVV] A. Simis, W. V. Vasconcelos and R. H. Villarreal, The integral closure of subrings associated to graphs, *J. Algebra* **199** (1998), 281–289.
- [Stu] B. Sturmfels, “Gröbner bases and convex polytopes”, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1996.
- [Wang] Y. Wang, Sign Hibi cones and the anti-row iterated Pieri algebras for the general linear groups, *J. of Algebra* **410** (2014), 355–392.