

離散群上のポテンシャル論における 距離埋め込みの方法

Potential theory on discrete groups and metric embedding

田中亮吉 (東北大学)*

概 要

We discuss countable groups, mainly focusing on problems related to existence of (bounded) harmonic functions. In particular we study questions such as which group does not admit any non-constant bounded harmonic function (Liouville property), and when it admits such a function, how all such functions are obtained (Poisson boundary). This problem often requires deep understanding on geometry of underlying groups as well as quantitative behavior of random walks. I will try to present this subject with several explicit key examples, emphasizing on importance of combining different ideas and techniques.

1. 有限生成群の Liouville 性

有限生成群 Γ 上の調和関数に関する問題について述べる. 断らない限り Γ は可算無限群であり, 以下に出てくる多くの例は有限表示を持たない. 群 Γ の有限生成系 S で $S = S^{-1}$ となるものをとる: $\Gamma = \langle S \rangle$. ペア (Γ, S) から定まるケーリーグラフとは, 頂点の集合が Γ そのものであり, 辺 $x \sim y$ を, ある $s \in S$ があつて $y = xs$ となるときと定める. 仮定 $S = S^{-1}$ からグラフは無向グラフとして定義することが出来て, $\Gamma = \langle S \rangle$ であることからグラフは連結となる. ここで Γ 上の $\mathbb{R}$ 値関数 f に対して,

$$Pf(x) = \frac{1}{|S|} \sum_{y \sim x} f(y) \quad x \in \Gamma,$$

と定義する. 群 Γ 上の関数 f が調和 (harmonic) であるとは

$$Pf(x) = f(x) \quad x \in \Gamma, \tag{1}$$

が成り立つときをいう. (ラプラシアンを $\Delta = I - P$ と定義すれば $\Delta f = 0$ である.)

Definition 1.1. ペア (Γ, S) が Liouville 性を持つとは, その上のすべての有界調和関数 (つまり $Pf = f$ かつ $\|f\|_\infty < \infty$) が定数関数のみであるときをいう.

ここでは群の Liouville 性に関わる基本的な問いで, 次の異なる 2 つの方向を考えていく:

- (1) どのような (Γ, S) が Liouville 性を持つか.
- (2) もし (Γ, S) が Liouville 性を持たないとき, どのように (すべての) 有界調和関数を見出すことが出来るか.

* 〒980-8578 仙台市青葉区荒巻字青葉6番3号 東北大学大学院理学研究科
e-mail: rtanaka@m.tohoku.ac.jp

この2つの問いについて、いくつかの重要な具体例を通して説明していく。また距離埋め込みと関わる部分について触れる。一方で、具体的に与えられた群の解析はしばしば困難である。そのようなとき、それに近い性質を持ちそうな、かつ解析できそうな群を自分たちの手で作ってそれを調べる、という方向が有効なことがある。最後に、我々が定義してその性質をいろいろ調べている離散アファイン群 (DA) について紹介する。

2. The first criterion

以下必要ならば $P_{\text{lazy}} = (I + P)/2$ で置き換えて、 $P_{\text{lazy}}\delta_x(x) \geq 1/2$ が成り立つようにしておく (δ_x は x でのみ1で他では0を取る Γ 上の関数である)。このように置き換えても、 $P_{\text{lazy}}f = f \Leftrightarrow Pf = f$ であることに注意する。ここで P_{lazy} は lazy ランダムウォークを考えることに相当し、非周期的になり (少しだけ) 扱いやすい。

ケーリーグラフ (Γ, S) 上の lazy ランダムウォーク $\{X_t\}_{t=0}^\infty$ を考える。スタート点を $X_0 = x$ としたとき、 X_t の分布を ν_x^t とかく。

Fact 2.1. すべての $x, y \in \Gamma$ に対して、 $d_{\text{TV}}(\nu_x^t, \nu_y^t) \rightarrow 0$ のとき、 (Γ, S) は Liouville 性を持つ。また逆も成り立つ。

ここで Γ 上の確率測度 μ, ν に対して、 $d_{\text{TV}}(\mu, \nu)$ は total variation 距離を表す。今 Γ が離散的であることにより測度を関数と考えると、確率測度であることから、 $d_{\text{TV}}(\mu, \nu) = (1/2)\|\mu - \nu\|_1$ である。この確率測度の間の距離は次のようにも表せる：

$$d_{\text{TV}}(\mu, \nu) = \inf\{\mathbb{P}(X \neq Y) : (X, Y) \text{ is a coupling of } (\mu, \nu)\}.$$

(つまり d_{TV} は自明なコスト関数 $c(x, y) = 1_{x \neq y}$ を取ったときの Kantorovich 距離である。)

Fact 2.1 の証明。有界調和関数 f があったとき、(1) から $f(x) = \mathbb{E}_x f(X_t)$ がすべての $t \geq 0$ で成り立つ。ここで (ν_x^t, ν_y^t) の任意の coupling (X_t, Y_t) を取ったとき、

$$|f(x) - f(y)| = |\mathbb{E}_x f(X_t) - \mathbb{E}_y f(Y_t)| \leq \mathbb{E}_{x,y} |f(X_t) - f(Y_t)| \leq 2\|f\|_\infty \mathbb{P}_{x,y}(X_t \neq Y_t)$$

であり (最後の2つの項では coupling 測度を取っている)、すべての coupling について infimum を取ると、

$$|f(x) - f(y)| \leq 2\|f\|_\infty d_{\text{TV}}(\nu_x^t, \nu_y^t)$$

となり、ここから最初の主張が従う。逆の主張の証明は、 (Γ, S) がケーリーグラフであることを用いて、Markov 連鎖の invariant σ -field と tail σ -field が測度0を除いて一致することから従う (が、ここでは省略することにする)。□

最初の主張は、より一般のグラフでも成り立つ事実である。逆の主張の証明にケーリーグラフであることを用いている。これはケーリーグラフ Γ においては、異なるスタート点を持つ2つのランダムウォークを1に近い確率で couple させることができるか、という問いに対して、非定数有界調和関数の存在が唯一の障害になっていることを言っている。

また次の意味で、Liouville 性は従順性を導く。

Fact 2.2. ある S について (Γ, S) が Liouville 性を持つならば、 Γ は従順群である。(ただし逆は成り立たない。)

Proof. 従順性についての Kesten's criterion を用いれば、次章の定理を用いてスペクトル半径の評価から証明することもできるが、ここでは量的評価が関わらない“ソフト”な証明を紹介する。 Γ が従順群であることの定義は、 Γ の上に不変平均 m があることである：つまり線型汎関数 $m : \ell^\infty(\Gamma) \rightarrow \mathbb{R}$ で、 $f \geq 0$ について $m(f) \geq 0$ 、かつ $m(1) = 1$ 、そして $g.m = m$ (ここで $g.m = m \circ g^{-1}$) がすべての $g \in \Gamma$ で成り立つものが存在する。 (Γ, S) は Liouville 性を持つとする。ここで μ を S 上の一様分布としたとき、 $m_n := (1/n) \sum_{k=1}^n \mu^{*k}$ とおき、 $\{m_n\}$ の弱スターの極限点の 1 つ m_* で $\mu * m_* = m_*$ を満たすものが存在する。任意の $\varphi \in \ell^\infty(\Gamma)$ について $f(g) = g.m_*(\varphi)$ は有界調和関数である。 (Γ, S) が Liouville 性を持つことから f は定数関数であり、 $g.m_*(\varphi) = m_*(\varphi)$ がすべての $g \in \Gamma$ について成り立つ。これがすべての $\varphi \in \ell^\infty(\Gamma)$ で成り立つことから、 m_* が Γ 上の不変平均であることが従う。 $\square$

3. The Avez-Kaimanovich-Vershik-Derriennic criterion

ここでより使いやすく、より非自明な Liouville 性の必要十分条件を述べる。 (Γ, S) のケーリーグラフのグラフ距離を d_S とかく。

Theorem 3.1 (Avez[Ave74], Kaimanovich-Vershik[KV83], Derriennic[Der80]). 以下は同値である：

$$\frac{1}{t} \mathbb{E} d_S(X_0, X_t) \rightarrow 0 \Leftrightarrow (\Gamma, S) \text{ は Liouville 性をもつ.}$$

左辺の条件はランダムウォークの単位時間あたりの平均移動距離が劣線型的であることを言っている。この条件は、その意味で、 (Γ, S) の拡がり具合を測っていると言えるが、これが (Γ, S) の Liouville 性と同値であるという主張である。条件にケーリーグラフの距離 d_S が関わっていることに注意する。Liouville 性の定義も S に依存していたことを思い出す。実は Liouville 性が S に依らない条件で特徴付けられるかどうかは、未解決問題である(後ほどこの問題に関わる結果も述べる)。

以下に述べる例において、そこで述べる主張はすべて有限生成系 S の取り方によらないことがわかっているので、いちいちそのことを断らないことにする。

Example 3.2. $\mathbb{Z}^d$ では $\mathbb{E} d_S(X_0, X_t) \asymp \sqrt{t}$ である (中心極限定理から分かる)。より一般に Γ がべき零群ならば $\mathbb{E} d_S(X_0, X_t) \asymp \sqrt{t}$ である。

Example 3.3. ランプの集合が $\mathbb{Z}$ である $\mathbb{Z}$ 上の Lamplighter 群 $\mathbb{Z} \wr \mathbb{Z} = \bigoplus_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z} \rtimes \mathbb{Z}$ では $\mathbb{E} d_S(X_0, X_t) \asymp t^{3/4}$ である。

Example 3.4. Lamplighter 群 $\mathbb{Z}_2 \wr \mathbb{Z}^d = \bigoplus_{\mathbb{Z}^d} (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \rtimes \mathbb{Z}^d$ では次が成り立つ：

$$\mathbb{E} d_S(X_0, X_t) \asymp \begin{cases} \sqrt{t} & (d = 1), \\ t / \log t & (d = 2), \\ t & (d \geq 3). \end{cases}$$

このことから、 $\mathbb{Z}_2 \wr \mathbb{Z}^d$ が Liouville 性を持つのは $d \leq 2$ のときに限ることが分かる。

一方、 $\mathbb{Z}_2 \wr \mathbb{Z}^d$ はすべての $d \geq 1$ に対して従順群である。つまり $d \geq 3$ のとき、これらは従順群だが Liouville 性を持たない群の例になっている。Lamplighter 群 $\mathbb{Z}_2 \wr \mathbb{Z}^d$ の $d \geq 3$ におけるすべての有界調和関数を決定すること (Poisson 境界を決定すること)

は, Kaimanovich-Vershik の論文 [KV83] 以来未解決であったが, Erschler の結果 ($d \geq 5$) [Ers11] などを経て, Lyons-Peres により $d \geq 3$ において解決された [LP15]:

Theorem 3.5 (Lyons-Peres [LP15]). $\mathbb{Z}_2 \wr \mathbb{Z}^d$ ($d \geq 3$) において Poisson 境界は $\prod_{\mathbb{Z}^d} \mathbb{Z}_2$ とその上に誘導される調和測度 ν のなす測度空間 $(\prod_{\mathbb{Z}^d} \mathbb{Z}_2, \nu)$ で実現される.

4. Hilbert 空間への埋め込み

4.1. 同変調和写像

ランダムウォークの平均移動距離が $\mathbb{E}d_S(X_0, X_t) = o(t)$ であることが, (Γ, S) が Liouville 性を持つことの必要十分条件を与えることを見た. ではここでより詳しく, $\mathbb{E}d_S(X_0, X_t)$ のオーダーはどのようなものがあり得るか? という問題を考えてみる.

Theorem 4.1 (Lee-Peres [LP13]). 任意のケーリーグラフ (Γ, S) に対して, ある定数 $c > 0$ が存在して, すべての $t \geq 0$ において

$$\mathbb{E}d_S(X_0, X_t) \geq c\sqrt{t}$$

が成り立つ.

この結果は, ケーリーグラフ上のランダムウォークでは “劣拡散的” な振る舞いは現れないことを示している. 以下, この結果の少し弱い形の証明を紹介する. これらの結果の証明には, Γ から Hilbert 空間への同変調和写像を用いる (そしてそれ以外の証明は知られていない). 群 Γ から Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ への同変調和写像 $\Phi: \Gamma \rightarrow \mathcal{H}$ とは, ある等長作用 $\Gamma \curvearrowright \mathcal{H}$ があって,

$$\Phi(gx) = g\Phi(x), \quad g, x \in \Gamma, \quad \frac{1}{|S|} \sum_{s \in S} \Phi(xs) = \Phi(x), \quad x \in \Gamma,$$

を満たしていることとする.

Fact 4.2 (Erschler). もし Γ がある Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ へ非定数な同変調和写像を持つとすると,

$$\mathbb{E}d_S(X_0, X_t)^2 \geq \frac{1}{|S|}t$$

がすべての $t \geq 0$ で成り立つ.

Proof. 非定数同変調和写像 $\Phi: \Gamma \rightarrow \mathcal{H}$ を正規化して

$$\frac{1}{|S|} \sum_{s \in S} \|\Phi(\text{id}) - \Phi(s)\|^2 = 1 \tag{2}$$

が成り立つとしておく. ここでランダムウォーク $\{X_t\}_{t=0}^\infty$ に対して, $\{\Phi(X_t)\}_{t=0}^\infty$ は Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ に値をとるマルチンゲールである, つまり $\mathbb{E}(\Phi(X_{t+1}) \mid X_t) = \Phi(X_t)$ almost surely がすべての $t \geq 0$ で成り立つ. このことから

$$\mathbb{E}\|\Phi(X_t) - \Phi(X_0)\|^2 = \sum_{s=0}^{t-1} \mathbb{E}\|\Phi(X_{s+1}) - \Phi(X_s)\|^2 = t$$

が成り立つ (2 番目の等式に (2) と Φ が同変であることを用いている). また (2) から Φ は $\sqrt{|S|}$ -Lipschitz である (ここに語距離 d_S が整数値のみを取ることを使っている). これより $|S|\mathbb{E}d_S(X_0, X_t)^2 \geq t$ がわかり, 主張が従う. $\square$

Remark 4.3. Γ が従順群のとき, Γ は Hilbert 空間への非定数同変調和写像を持つ (このとき Hilbert 空間とその上の等長作用として正則表現を取ることが出来る)(Mok, Korevaar-Schoen). また Γ はある Hilbert 空間に非定数同変調和写像を持つのは, Γ が Property (T) を持たないときであり, またそのときに限る (証明は [Kle10, LP13, Oza17] を参照). 有限生成無限群 Γ が Property (T) を持つならば, Γ は非従順なので, そこから $\mathbb{E}d_S(X_0, X_t) \asymp t$ であることが分かる.

4.2. Hilbert 圧縮定数

ではさらに詳しく, もし $\mathbb{E}d_S(X_0, X_t) \asymp t^\beta$ が成り立つならば, β としてどのような値が現れうるか, という問題はどうか (この指数 β は常に存在するわけではない). 上の Lee-Peres の定理 (Theorem 4.1) はアプリアリな制限 $\beta \in [1/2, 1]$ を主張する. (例えば Example 3.3 の $\mathbb{Z} \wr \mathbb{Z}$ では $\beta = 3/4$ である.) Amir-Virág により任意の $\beta \in [3/4, 1]$ に対して, その値を指数として実現する群があることを証明された [AV15] のち, Brioussell-Zheng により任意の $\beta \in [1/2, 1]$ に対して, その値を指数として実現する群があることが証明された [BZ15].

この (“スピード指数”) β の値は Hilbert 空間へどれだけ良い埋め込みが存在するかという問題と関わる. ここで β^* を次を満たす $\beta \geq 0$ の supremum として定義する: ある対称な有限生成系 S とある定数 $c > 0$ が存在して, 任意の $t \geq 0$ に対して $\mathbb{E}d_S(X_0, X_t) \geq ct^\beta$ が成り立つ. また, α^* を次を満たす $\alpha \geq 0$ の supremum として定義する: Lipschitz 写像 $f: \Gamma \rightarrow L_2$ とある定数 $c > 0$ が存在して, 任意の $x, y \in \Gamma$ に対して $\|f(x) - f(y)\|_2 \geq cd_S(x, y)^\alpha$ が成り立つ (α^* の定義は S の取り方によらない). この α^* を Hilbert 圧縮定数とよぶ.

Theorem 4.4 (Austin-Naor-Peres [ANP09], Naor-Peres [NP08, NP11]). 群 Γ が従順群であるとき, 次が成り立つ:

$$\alpha^* \leq \frac{1}{2\beta^*}.$$

これにより $\alpha^* > 1/2$ ならば $\beta^* < 1$ となり Theorem 3.1 から, 特に (Γ, S) は (どの S に対しても) Liouville 性を持つ. ここで $\alpha^* > 1/2$ という条件は擬等長不変であることに注意する. これは Liouville 性に対する十分条件で S の取り方によらないだけでなく, 擬等長不変でもあるものである. つまり $\alpha^* > 1/2$ を満たす群では, Liouville 性は群の性質になっているだけでなく, 擬等長不変な性質にもなっている.

Remark 4.5. Hilbert 圧縮定数 α^* の定義において埋め込み先を L_2 から L_p にすることで, L_p 圧縮定数 α_p^* を同様に定義することが出来る ($1 \leq p < \infty$). 群 Γ が従順群であるとき, $\alpha_p^* \leq 1/(p\beta^*)$ が成り立つ [NP11].

Remark 4.6. 群 G が従順群とは限らない場合, “同変” L_p 圧縮定数 $\alpha_p^\sharp$ (同変な埋め込み に制限して値を定義する) を考えると, 任意の有限生成群において $\alpha_p^\sharp \leq 1/(p\beta^*)$ が成り立つ [NP08].

Example 4.7. $\mathbb{Z} \wr \mathbb{Z}$ は $\alpha^* = 2/3$ である [ANP09]. 上からの評価に $\beta^* = 3/4$ を用いる. 下からの評価は埋め込みを構成することで得られる. 論文 [NP11] も参照.

Example 4.8.

$$\alpha^*(\mathbb{Z}_2 \wr \mathbb{Z}^d) = \begin{cases} 1 & (d = 1) \\ 1/2 & (d \geq 2). \end{cases}$$

[NP08, NP11]. また $d = 2$ ではすべての $1 \leq p < \infty$ において $\alpha_p^*(\mathbb{Z}_2 \wr \mathbb{Z}^2) = \max\{1/p, 1/2\}$ である [NP11].

Example 4.9. 次章で定義する離散アファイン群 DA では, 全ての $1 \leq p < \infty$ において $\alpha_p^*(\text{DA}) = \max\{1/p, 1/2\}$ である [BTZ17]. また DA は従順群であり Liouville 性を持たない.

5. 離散アファイン群

ツリーの自己同型から様々な群を構成することが出来る. 以下, 我々が定義した離散アファイン群を紹介していく. そのためにまず, 知られている群でどのようなものがツリーの自己同型群として得られるかを見ていくことにする.

5.1. 基点付き 2 進ツリーの自己同型群

基点付き 2 進ツリー (a rooted binary tree) $\mathbb{T}_2^*$ を考える (基点は次数が 2 の頂点とする). このツリー $\mathbb{T}_2^*$ の自己同型 $\sigma : \mathbb{T}_2^* \rightarrow \mathbb{T}_2^*$ とは頂点の集合上の全単射でグラフの隣接関係を保つものである. 基点の次数は 2 で他の頂点の次数はすべて 3 であることから, σ は基点を固定する. 例えば, 基点を固定し, 深さ 1 以下の頂点からなる 2 つの部分ツリーを “入れ替える” (それぞれの部分ツリーの内部は動かさない) 自己同型 σ はそのような変換である. このような自己同型全てからなる群を $\text{Aut}(\mathbb{T}_2^*)$ とかく. この群 $\text{Aut}(\mathbb{T}_2^*)$ は連続濃度を持つ群である. 今からこの群の有限生成部分群を見ていく.

5.1.1. 無限巡回群 $\mathbb{Z}$

基点付き 2 進ツリー $\mathbb{T}_2^*$ の基点以外の頂点には 0 と 1 からなる有限の長さの列 x (例えば 001) でラベル付けすることが出来る. 例えば 001 と 0010 (あるいは 0011) は隣接しているようにラベル付けされる. 基点を $\emptyset$ (空語) とかくことにする. ここで, ツリー自身の帰納的な構造を用いて, ある自己同型 $\sigma_0 : \mathbb{T}_2^* \rightarrow \mathbb{T}_2^*$ を以下のように定義する: まず $\sigma_0(\emptyset) = \emptyset$ として,

$$\sigma_0(0.x) = 1.x, \quad \sigma_0(1.x) = 0.\sigma_0(x).$$

列 x の長さに関して σ_0 は帰納的に定義されている. この時 σ_0 は無限巡回群 $\mathbb{Z}$ を生成する: $\langle \sigma_0 \rangle \cong \mathbb{Z}$. これは, σ_0 の定義が実数の 2 進展開における “+1” に対応していることから分かる. この σ_0 を “adding machine” と呼ぶことにする.

5.1.2. Lamplighter 群 $\mathbb{Z}_2 \wr \mathbb{Z}$

基点付き 2 進ツリー $\mathbb{T}_2^*$ の自己同型 σ_a と σ_b を以下のように帰納的に定義する: $\sigma_a(\emptyset) = \emptyset, \sigma_b(\emptyset) = \emptyset$ として,

$$\sigma_a(0.x) = 1.\sigma_b(x), \quad \sigma_a(1.x) = 0.\sigma_a(x),$$

$$\sigma_b(0.x) = 0.\sigma_b(x), \quad \sigma_b(1.x) = 1.\sigma_a(x).$$

この 2 つの自己同型から生成される群 $\langle \sigma_a, \sigma_b \rangle$ は $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \wr \mathbb{Z} := \bigoplus_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}) \rtimes \mathbb{Z}$ と同型になる (半直積は $\mathbb{Z}$ の $\bigoplus_{\mathbb{Z}} (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ への “シフト” から定まる作用で取る). この同型は, $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ と $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})[[t]]$ との全単射 $\Phi : a_0 a_1 \cdots \mapsto \sum_{i \geq 0} a_i t^i$ を用いて,

$$\Phi(\sigma_b^{-1} \sigma_a(x)) = 1 + \Phi(x), \quad \Phi(\sigma_b(x)) = (1 + t)\Phi(x)$$

を確かめることで得られる (Grigorchuk-Zuk による [GZ01]¹).

5.2. アファイン群

これまで基点付き2進ツリーを考えてきたが, ここでは基点が“無限遠”にある場合を扱う. 今簡単のため3-正則ツリー $\mathbb{T}_3$ を考える. (一般に任意の整数 $d \geq 3$ に対して, d -正則ツリー $\mathbb{T}_d$ を考えても同様な構成が可能である.) ツリーの内部のある点 o とエンド ω (これは境界 $\partial\mathbb{T}_3$ のある点である) を決める. ツリー $\mathbb{T}_3$ の全ての自己同型からなる群を $\text{Aut}(\mathbb{T}_3)$ とかき, その中でエンド ω を固定する部分群を $\text{Aut}_\omega(\mathbb{T}_3)$ とかく. (これらは各点収束位相について局所コンパクト位相群になる.) エンド ω を固定する自己同型群はツリーにおける“放物型”部分群を考えていることに相当する.

5.3. 可解 Baumslag-Solitar 群

ツリー $\mathbb{T}_3$ を無限遠点 ω を基点とした系統樹と見たとき点 o の末裔からなる部分ツリーは基点付き2進ツリーのコピーである. 点 o の同じレベルにある点すべてに基点付き2進ツリーのコピーが存在する (“同じレベル”の正確な意味は ω と o についての Busemann 関数のレベル集合である). これらすべての基点付き2進ツリーに adding machine σ_0 を同時に作用させる自己同型を σ_* とかく. ここで $\sigma_* \in \text{Aut}_\omega(\mathbb{T}_3)$ である. またツリーの無限測地線 l で o を通り ω と (別のエンド) 0^∞ を結ぶものを取る. この l に沿って “シフト” となるような自己同型を α と書く (正確には Busemann 関数の値を $+1$ する方向にシフトされるような自己同型である). ここで $\alpha \in \text{Aut}_\omega(\mathbb{T}_3)$ である. これらで生成される群 $\langle \alpha, \sigma_* \rangle$ は次の可解 Baumslag-Solitar 群と同型である:

$$\text{BS}_2 = \langle a, b \mid aba^{-1} = b^2 \rangle.$$

これはこの群 BS_2 が2進整数環 $\mathbb{Z}[1/2]$ のアファイン変換からなる群 $\text{Aff}(\mathbb{Z}[1/2])$ と同型であることを使うと見やすい. 実際2進体 $\mathbb{Q}_2$ と $\partial\mathbb{T}_3 \setminus \{\omega\}$ の間の自然な同一視において, σ_* は $\mathbb{Q}_2$ における “ $+1$ ” に対応し, α は “ $\times 2$ ” に対応している. 上記に出てきた群たちの包含関係は以下のようにになっている:

$$\text{Aut}_\omega(\mathbb{T}_3) \supsetneq \text{Aff}(\mathbb{Q}_2) \supset \text{Aff}(\mathbb{Z}[1/2]) \cong \text{BS}_2.$$

ここで最初の包含関係はイコールではないことに注意する. これは上半平面 $\mathbb{H}^2$ の正則変換で ∞ を固定するもののなす群を $\text{Aut}_\infty(\mathbb{H}^2)$ とかいたとき,

$$\text{Aut}_\infty(\mathbb{H}^2) \cong \text{Aff}(\mathbb{R})$$

となることと対照的である. (ここで BS_2 は $\text{Aff}(\mathbb{R})$ の部分群にもなっている. また BS_2 は Liouville 性をもつ (例えば [Kai91] を参照.) 次に定義する “離散アファイン群” は $\text{Aut}_\omega(\mathbb{T}_3)$ の部分群であって $\text{Aff}(\mathbb{Q}_2)$ の部分群になっていないような群である.

5.4. 離散アファイン群 DA

ツリー $\mathbb{T}_3$ における “シフト” α と頂点 o での置換 σ により生成される群を離散アファイン群 DA とよぶ:

$$\text{DA} := \langle \alpha, \sigma \rangle.$$

¹ 彼らは同論文でこの生成系から定まるケーリーグラフ上の組み合わせたラプラシアンの特値を求めている.

この群 DA は $\text{Aut}_\omega(\mathbb{T}_3)$ の中で有限生成かつ稠密な部分群になる. 例えば, 置換とシフトの合成により, 任意の有限個の頂点の上に置換を与えることで, ある自己同型が得られる. 群 DA が稠密であることは, この事実をもとにして証明される.

より詳しく, 実は DA は次のような半直積で表される:

$$DA \cong \bigoplus_{\mathbb{T}} \mathfrak{S}_2 \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z},$$

ここで $\mathfrak{S}_2$ は 2 次の置換群であり, 半直積は $\mathbb{Z}$ の α を通しての $\mathbb{T}_3$ への作用から定まる作用で取っている. 一般に $(d+1)$ 正則ツリーで同様な構成により DA を定義する. そのとき DA は $\bigoplus_{\mathbb{T}_{d+1}} \mathfrak{S}_d \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z}$ と同型になる.

前章の例 (Example 4.9) において DA の L_p 圧縮定数がすべての $1 \leq p < \infty$ について $\alpha_p^*(DA) = \max\{1/p, 1/2\}$ であることを紹介した. これは $\mathbb{Z}_2 \wr \mathbb{Z}^2$ のものと一致しているが, 両者は擬等長ではない (別の擬等長不変量である L_1 -等周プロフィールや再帰確率の減衰度 (熱核の on-diagonal における振る舞い) はこの 2 つの群を区別する; [BTZ17] 参照). また $\mathbb{Z}_2 \wr \mathbb{Z}^2$ は Liouville 性を持つ. DA は Liouville 性を持たず, また Poisson 境界も決定することが出来る. 論文 [BTZ17] の主定理は以下である:

Theorem 5.1. 離散アファイン群 DA は Liouville 性を持たず, その Poisson 境界は $\prod_{\mathbb{T}} \mathfrak{S}_2$ とその上に誘導される調和測度 ν のなす測度空間 $(\prod_{\mathbb{T}} \mathfrak{S}_2, \nu)$ で実現される.

Remark 5.2. $\text{Aut}_\omega(\mathbb{T})$ の Haar 測度について絶対連続かつ対称な確率測度 μ でコンパクト台を持つものに対しては, Liouville 性が成り立つ (Cartwright-Kaimanovich-Woess による [CKW94]). DA は $\text{Aut}_\omega(\mathbb{T})$ 有限生成部分群であり, $(\text{Aut}_\omega(\mathbb{T}), \mu)$ にはない有界調和関数が豊富に存在することがわかる.

Theorem 5.1 の証明は Lyons-Peres の Lamplighter 群 $\mathbb{Z}_2 \wr \mathbb{Z}^d$ の結果 Theorem 3.5 における証明に近いが, 以下のような違いがある: Lamplighter 群上のランダムウォーク $X_t = (\varphi_t, m_t)$ は “lamp” の配置 φ_t と “marker” の位置 m_t に分けられる. ここで $d \geq 3$ のとき $\mathbb{Z}^d$ 上の “marker” m_t が過渡的 (transient) であることから $\varphi_t \rightarrow \varphi_\infty$ が almost surely に存在し, φ_∞ の $\prod_{\mathbb{Z}^d} \mathbb{Z}_2$ における分布 ν を考えることで, $(\prod_{\mathbb{Z}^d} \mathbb{Z}_2, \nu)$ が Poisson 境界を与えることが証明される. 離散アファイン群 DA では “lamp” の配置に当たるものがツリー上 $\mathbb{T}$ の置換の配置であり, “marker” に当たるものが, DA の $\mathbb{T}$ への作用の逆軌道 $o.w_n^{-1}$ (inverted orbit, ここで $w_n = x_1 \dots x_n$) で与えられる. 逆軌道は (特別な場合を除いて) Markov 連鎖ではない. この場合, ランダムな置換の配置に影響されて逆軌道の振る舞いが変わってくる. また逆軌道の方も置換の配置をランダムに変えていく. (Lamplighter 群ではこのようなことは起きない.) Markov 連鎖でない確率過程の再帰性と過渡性を決定する問題は一般にとってもデリケートである. そしてツリーに作用する群は, 逆軌道の振る舞いが複雑過ぎて理解出来ない場合が多い (これらの群の解析が多くの場合困難である理由の一つはここにある). しかし, DA では逆軌道の振る舞いがツリー上の最隣接な過程になり, 具体的な解析が可能である. (軌道から作るシュライアグラフの方の解析に帰着させることが出来る.) このことが DA の幾何構造を理解する鍵となり, ここで述べたいいくつかの結果をもたらしている.

最後に, non-Liouville であることが分かっている群で, その Poisson 境界が分かっている群で重要と思われるものとして [Kai17] を挙げておく.

参考文献

- [ANP09] T. Austin, A. Naor, and Y. Peres. The wreath product of $\mathbb{Z}$ with $\mathbb{Z}$ has Hilbert compression exponent $\frac{2}{3}$. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 137(1):85–90, 2009.
- [AV15] G. Amir and B. Virág. Speed exponents of random walks on groups. arXiv:1203.6226v4, 2015.
- [Ave74] A. Avez. *Croissance des groupes de type fini et fonctions harmoniques*. Lecture Notes 532. Springer, 1974.
- [BTZ17] J. Brioussell, R. Tanaka, and T. Zheng. Random walks on the discrete affine group. arXiv:1703.07741, 2017.
- [BZ15] J. Brioussell and T. Zheng. Speed of random walks, isoperimetry and compression of finitely generated groups. arXiv:1510:08040, 2015.
- [CKW94] D. I. Cartwright, V. A. Kaimanovich, and W. Woess. Random walks on the affine group of local fields and of homogeneous trees. *Ann. Inst. Fourier, Grenoble*, 44(4):1243–1288, 1994.
- [Der80] Y. Derriennic. Quelques applications du théorème ergodique sous-additif. volume 74, pages 183–201. Société Mathématique de France, 1980.
- [Ers11] A. Erschler. Poisson-Furstenberg boundary of random walks on wreath products and free metabelian groups. *Comment. Math. Helv.*, 86:113–143, 2011.
- [GZ01] R. I. Grigorchuk and A. Zuk. The lamplighter group as a group generated by a 2-state automaton, and its spectrum. *Geometriae Dedicata*, 87:209–244, 2001.
- [Kai91] V. A. Kaimanovich. Poisson boundaries of random walks on discrete solvable groups. In *Probability measures on groups, X (Oberwolfach 1990)*, pages 205–238, New York, 1991. Plenum.
- [Kai17] V. A. Kaimanovich. Thompson’s group F is not Liouville. In Maura Salvatori Tullio Ceccherini-Silberstein and Ecaterina Sava-Huss, editors, *Groups, Graphs and Random Walks*, volume 436 of *London Mathematical Society Lecture Note Series*, pages 300–342. Cambridge University Press, 2017. arXiv:1602.02971.
- [Kle10] B. Kleiner. A new proof of Gromov’s theorem on groups of polynomial growth. *J. Amer. Math. Soc.*, 23(3):815–829, 2010.
- [KV83] V. A. Kaimanovich and A. M. Vershik. Random walks on discrete groups: boundary and entropy. *The Annals of Probability*, 11(3):457–490, 1983.
- [LP13] J. R. Lee and Y. Peres. Harmonic maps on amenable groups and a diffusive lower bound for random walks. *The Annals of Probability*, 41(5):3392–3419, 2013.
- [LP15] R. Lyons and Y. Peres. Poisson boundaries of lamplighter groups: proof of the Kaimanovich-Vershik conjecture. arXiv:1508.01845, 2015.
- [NP08] A. Naor and Y. Peres. Embeddings of discrete groups and the speed of random walks. *International Mathematics Research Notices*, 2008:rnn076, 2008.
- [NP11] A. Naor and Y. Peres. L_p compression, traveling salesmen, and stable walks. *Duke Math. J.*, 157(1):53–108, 2011.
- [Oza17] N. Ozawa. A functional analysis proof of Gromov’s polynomial growth theorem. *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér.*, 4, 2017.