Seiberg-Witten方程式とその応用

笹平　裕史　(九州大学大学院数理学研究院)*

1. Seiberg-Witten方程式

１９８０年代にDonaldson [4] により, ゲージ理論におけるインスタントン方程式の４次元トポロジーへの応用が見出されて以来, ゲージ理論は４次元, ３次元微分トポロジーにおいて最も強力な手法となり様々な研究がされてきた. １９９４年にはWitten [43] によってSeiberg-Witten 方程式が発見され, それ以降, Seiberg-Witten 方程式が主に用いられるようになった. Seiberg-Witten 方程式の解のモジュライ空間は (４次元多様体が閉多様体の場合) コンパクトになるという著しい性質があり, インスタントン方程式よりも技術的に扱いやすいことが多い. ここでは, Seiberg-Witten 方程式の応用を筆者の研究に近い範囲で解説する. 最近の話題にも触れる.

３次元多様体, ４次元多様体はすべて向きがついているものとする. また, 断りがない限り連結であるとする.

X を４次元微分多様体, g を X の Riemann 計量とする. Hodge-*作用素

$$*: \Omega^2(X) \to \Omega^2(X)$$

は $*^2 = 1$ を満たす. $\Omega^2(X)$ は X 上の２次微分形式の空間である. よって, 分解

$$\Omega^2(X) = \Omega^+(X) \oplus \Omega^-(X)$$

がある. $\Omega^{\pm}(X)$ は $*$ の固有値 ± 1 の固有空間である. $\omega \in \Omega^2(X)$ をこの分解によって, $\omega = \omega^+ + \omega^-$ とかいたとき, ω^+ は自己双対部分, ω^- を反自己双対部分と呼ぶことにする.

４次元多様体は常に spin-c 構造を持つことが知られている. $\mathfrak{s}$ を X の spin-c 構造とする. $\mathfrak{s}$ からスピノール束

$$S^+ \overset{\mathbb{C}^2}{\to} X, \ S^- \overset{\mathbb{C}^2}{\to} X$$

を得る. 行列式束 $L = \det S^+$ の $U(1)$ 接続 A を取ると, Dirac 作用素

$$D_A : \Gamma(S^+) \to \Gamma(S^-)$$

を得る. D_A は楕円型の一階偏微分作用素である. $\eta \in \Omega^+(X)$ を一つ取る. η で摂動された Seiberg-Witten 方程式は次のようにかかれる.

$$\begin{aligned} &D_A\phi = 0, \\ &F_A^+ + q(\phi) = \eta. \end{aligned} \tag{1}$$

ここで, $F_A^+ = \frac{1}{2}(F_A + *F_A)$ は, 曲率 F_A の自己双対部分, $q(\phi)$ は ϕ に関する２次形式である. これは, $(A, \phi) \in \mathcal{A} \times \Gamma(S^+)$ に対する方程式である. $\mathcal{A}$ は L の $U(1)$-接続全体の空

本研究は科研費 (課題番号:16K17590) の助成を受けたものである。
2010 Mathematics Subject Classification: 57R57, 57R58
キーワード：Seiberg-Witten equations, Floer theory
* 〒819-0395 福岡県福岡市西区元岡 744 九州大学大学院 数理学研究院
e-mail: hsasahira@math.kyushu-u.ac.jp

間, $\Gamma(S^+)$ は S^+ の切断の空間である．ゲージ群 $\mathcal{G}=\mathrm{Map}(X,U(1))$ がこの方程式の解に次で作用している．

$$u(A,\phi)=(A-2u^{-1}du,u\phi). \tag{2}$$

Seiberg-Witten モジュライ空間を

$$\mathcal{M}(X,g,\mathfrak{s},\eta)=\{\text{ 方程式 (1) の解 }(A,\phi)\}/\mathcal{G}$$

と定義する．$\mathcal{M}(X,g,\mathfrak{s},\eta)$ には, 適切なソボレフノルム L^2_k により, 位相が入っていることにする．Seiberg-Witten モジュライ空間の顕著な性質として, 次が知られている．

定理 1.1. *X を閉 4 次元微分多様体とする．このとき, $\mathcal{M}(X,g,\mathfrak{s},\eta)$ コンパクトである．*

$(A,\phi)\in\mathcal{A}\times\Gamma(S^+)$ が $\phi\neq 0$ を満たすとき, (A,ϕ) は既約であるという．$\mathcal{G}$ の $\mathcal{A}\times(\Gamma(S^+)\backslash\{0\})$ 上の作用は自由であり, $\mathcal{B}^{irr}_{\mathfrak{s}}=\{\mathcal{A}\times(\Gamma(S^+)\backslash\{0\})\}/\mathcal{G}$ は (無限次元) Hilbert 多様体になっている．$\mathcal{B}^{irr}_{\mathfrak{s}}$ は既約な (A,ϕ) のゲージ同値類の空間である．$\mathcal{H}^i(X)$ を調和 i 形式の空間とする．$b^+(X)$ を自己双対調和 2 形式の空間 $\mathcal{H}^+(X)=\mathcal{H}^2(X)\cap\Omega^+(X)$ の次元とする．

定理 1.2. *X を閉 4 次元微分多様体とする．*
(1) $b^+(X)>0$ と仮定する．generic な $\eta\in\Omega^+(X)$ に対して, $\mathcal{M}(X,g,\mathfrak{s},\eta)$ は $\mathcal{B}^{irr}_{\mathfrak{s}}$ の有限次元部分多様体で

$$\dim\mathcal{M}(X,g,\mathfrak{s},\eta)=\frac{c_1(L)^2-\sigma(X)}{4}-1+b_1(X)-b^+(X).$$

さらに, $\mathcal{H}^1(X)\oplus\mathcal{H}^+(X)$ の向き $\mathcal{O}$ を選ぶと, $\mathcal{M}(X,g,\mathfrak{s},\eta)$ に向きが定まる．
(2) $b^+(X)>1$ とする．このとき, generic な Riemann 計量の族 $\{g_s\}_{s\in[0,1]}$ と自己双対 2 次形式 $\{\eta_s\}_{s\in[0,1]}$ に対して, $\coprod_{s\in[0,1]}\mathcal{M}(X,g_s,\mathfrak{s},\eta_s)$ は $\mathcal{B}^{irr}_{\mathfrak{s}}\times[0,1]$ の部分多様体であり, 境界は

$$-\mathcal{M}(X,g_0,\mathfrak{s},\eta_0)\coprod\mathcal{M}(X,g_1,\mathfrak{s},\eta_1).$$

$\mathcal{H}^1(X)\oplus\mathcal{H}^+(X)$ の向き $\mathcal{O}$ を一つ固定する．$b^+(X)>1$ とする．定理 1.1 と 定理 1.2 から, ホモロジー類 $[\mathcal{M}(X,g,\mathfrak{s},\eta)]\in H_d(\mathfrak{B}^{irr}_{\mathfrak{s}};\mathbb{Z})$ と同境類 $[\mathcal{M}(X,g,\mathfrak{s},\eta)]\in\Omega^{SO}_d(\mathfrak{B}^{irr}_{\mathfrak{s}})$ は g,η に依存しない, $(X,\mathfrak{s})$ の微分同相不変量である．d は $\mathcal{M}(X,g,\mathfrak{s},\eta)$ の次元．

2. Seiberg-Witten 不変量

$X\times\mathcal{B}^{irr}_{\mathfrak{s}}$ 上の複素直線束 $\mathbb{L}$ を

$$\mathbb{L}=\det S^+\times_{\mathcal{G}}\{\mathcal{A}\times(\Gamma(S^+)\setminus\{0\})\}$$

で定義する．さらに,

$$\mu:H_{*\leq 1}(X;\mathbb{Z})\to H^*(\mathcal{B}^{irr};\mathbb{Z})$$

を

$$\mu(\alpha)=c_1(\mathbb{L})/\alpha$$

定義する．

命題 2.1.

$$H^*(\mathfrak{B}_{\mathfrak{s}}^{irr};\mathbb{Z}) \cong \Lambda H_1(X;\mathbb{Z}) \oplus \mathbb{Z}[U].$$

ここで, $U=\mu(1)$, $1 \in H_0(X;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$. また, 右辺の $\Lambda H_1(X;\mathbb{Z})$ は $\mu(\alpha)$ $(\alpha \in H_1(X;\mathbb{Z}))$ で生成される外積代数に対応する.

定義 2.2. $\mathcal{H}^1(X) \oplus \mathcal{H}^+(X)$ の向きを一つ固定する. (モジュライ空間 $\mathcal{M}(X,g,\mathfrak{s},\eta)$ に向きが定まる.) $b^+(X)>1$ と仮定する. *generic* な η を選んで, $\mathcal{M}(X,g,\mathfrak{s},\eta)$ は多様体であるとする. このとき, *Seiberg-Witten* 不変量を次で定義する.

$$SW_X : Spin^c(X) \times \left(\bigoplus_{d\geq 0} H_0(X;\mathbb{Z})^{\otimes d} \right) \oplus \Lambda H_1(X;\mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}$$

$$SW_X(\mathfrak{s};pt,\dots,pt;\alpha_1\cdots,\alpha_r) = \int_{\mathcal{M}(X,g,\mathfrak{s},\eta)} \mu(pt)\cup\cdots\cup\mu(pt)\cup\mu(\alpha_1)\cdots\cup\mu(\alpha_r).$$

$\mathcal{M}(X,g,\mathfrak{s},\eta)$ の次元と $\mu(pt)\cup\cdots\cup\mu(pt)\cup\mu(\alpha_1)\cup\cdots\cup\mu(\alpha_r)$ の次数があってないときは, 0 とする. 定理 *1.2* の下で述べたように, $\mathcal{M}(g,\mathfrak{s},g,\eta)$ が定めるホモロジー類は g,η に依存しないので, SW_X は X の微分同相不変量となる.

定理 2.3 (Taubes)**.** X を閉 4 次元シンプレクティック多様体で $b^+>1$. $\mathfrak{s}$ をシンプレクティック構造と整合的な概複素構造から誘導される *spin-c* 構造とする. このとき,

$$SW_X(\mathfrak{s}) \neq 0.$$

一方, 次の消滅定理が知られている.

定理 2.4. X は連結和分解 $X=X_0\#X_1$ をもつとする. さらに, $b^+(X_0), b^+(X_1)>0$ であるとする. このとき, SW_X は恒等的に 0 である.

これらの 2 つの定理から, $b^+(X)>1$ のシンプレクティック多様体 X は連結和分解 $X=X_0\#X_1$, $b^+(X_0), b^+(X_1)>0$ を許さないことが分かる.

s_g を g のスカラー曲率とする. Weitzenböck 公式

$$D_A^*D_A = \nabla_A^*\nabla_A + F_A^+ + s_g$$

を用いると, Seiberg-Witten 方程式の解 (A,ϕ) に対して, 次が示せる.

$$\|\phi\|_{L^\infty} \leq 2\max\left\{0, -\min_{x\in X} s_g(x) + 4\|\eta\|_{L^\infty}\right\}$$

したがって, g が正スカラー曲率で, η を十分小さくとっておくと, $\phi=0$ になる. 一方, 定理 1.2 より, $\mathcal{M}(X,g,\mathfrak{s},\eta)$ が空集合でなければ, (A,ϕ) は既約つまり $\phi\neq 0$. したがって, $\mathcal{M}(X,g,\mathfrak{s},\eta)$ は空集合. よって次を得る.

定理 2.5. $b^+(X)>1$, X が正スカラー曲率を持つならば, SW_X は恒等的に 0.

系 2.6. X がシンプレクティック多様体で $b^+(X)>1$ ならば, X は正スカラー曲率を持たない.

その他のSeiberg-Witten方程式の４次元幾何学への応用としては, Kronheimer-MrowkaによるThom 予想の解決 [25] やその一般化 [37]. さまざまな４次元多様体のエキゾチック可微分構造の発見 (例えば [7]), LeBrun, 石田氏 [28, 17, 16] によるアインシュタイン計量を許容しない４次元多様体の構成, 山辺不変量, Ricci流への応用などがある. また, 他の重要な応用として４次元多様体の交差形式への応用がある. これについては次の節で述べる.

3. ４次元多様体の交差形式

４次元多様体の分類問題において大変重要な不変量が交差形式である. X を連結な向きの付いた閉４次元位相多様体とする.

$$Q_X : H^2(X;\mathbb{Z})/Tor \otimes H^2(X;\mathbb{Z})/Tor \to \mathbb{Z},\ Q_X(\alpha,\beta) = \langle \alpha \cup \beta, [X] \rangle$$

$[X] \in H_4(X;\mathbb{Z})$ は基本類である. Q_X は対称, ユニモジュラー２次形式であることが知られている. ユニモジュラー２次形式とは, 対応する行列の行列式の値が ± 1 となることである. また, ２次形式 $Q : \mathbb{Z}^r \otimes \mathbb{Z}^r \to \mathbb{Z}$ が, $Q(\alpha,\alpha) \equiv 0 \mod 2$ $(\forall \alpha \in \mathbb{Z}^r)$ を満たすとき, Q はeven typeであるといい, そうでないときodd typeであるという. Freedmanが次を証明した.

定理 3.1 (Freedman [8]). *$Q : \mathbb{Z}^r \otimes \mathbb{Z}^r \to \mathbb{Z}$ を ユニモジュラー２次形式とする.*

1. *Q が even typeであるとき, 単連結, 有向, 閉４次元位相多様体 X が存在し, $Q_X \cong Q$ となる. このような X は同相を除いてただ一つである.*

2. *Q が odd type であるとき, 単連結, 有向, 閉４次元位相多様体 X_0, X_1 が存在し, $Q_{X_0} \cong Q \cong Q_{X_1}$ となる. このような位相多様体は同相を除いてただ２つのみである. 更に, X_0, X_1 の少なくとも１つは微分構造を持たない.*

系 3.2. *X_0, X_1 を単連結, 有向, 閉４次元微分多様体で $Q_{X_0} \cong Q_{X_1}$ であるならば, X_0 と X_1 は同相である.*

このようにユニモジュラーな２次形式は単連結な閉４次元位相多様体の交差形式として実現される. 微分多様体の交差形式として実現されるかという問題がある.

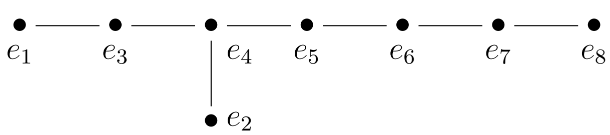
定理 3.3 (Rohlin). *X がスピン, 閉４次元微分多様体ならば,*

$$\sigma(X) \equiv 0 \mod 16$$

である. ここで, $\sigma(X)$ は Q_X の符号数. つまり, Q_X の正の固有値の数と負の固有値の数の差である.

X が単連結という仮定のもと, X がスピンであるということと, Q_X が even type であることは同値である. 代数的に, $Q : \mathbb{Z}^r \otimes \mathbb{Z}^r \to \mathbb{Z}$ がユニモジュラー２次形式で even typeであるとすると $\sigma(Q) \equiv 0 \mod 8$ である.

例 3.4. *E_8 を下の図とする.*



この図により, $\mathbb{Z}^8$ 上の 2 次形式 E_8 が定まる. つまり, $\mathbb{Z}^8$ を e_j たちで生成される群とし, $E_8(e_i, e_i) = 2$, e_i, e_j $(i \neq j)$ が線で結ばれているとき, $E_8(e_i, e_j) = -1$, そうでないとき $E_8(e_i, e_j) = 0$ とする. $\sigma(E_8) = 8$ である. よって, $(2n-1)(\pm E_8)$ は単連結, 閉 4 次元位相多様体の交差形式として実現されるが, 単連結, 閉 4 次元微分多様体の交差形式としては実現されない.

定理 3.5 (Donaldson [4])**.** *X を閉 4 次元微分多様体とし, Q_X が負定値であるとする. このとき, Q_X は $\mathbb{Z}$ 上で対角化可能である.*

$$Q_X \cong \mathrm{diag}(-1, \ldots, -1).$$

正定値の場合も同様である.

これは, もともとインスタントン方程式の解のモジュライ空間を用いて証明された. Seiberg-Witten 方程式を用いた別証明もある.

例 3.6. $n(\pm E_8)$ は閉 4 次元微分多様体の交差形式としては実現されない.

Donaldson の結果と Freedman の結果を組み合わせると次が示せる.

定理 3.7. *$\mathbb{R}^4$ はエキゾチックな微分構造をもつ. つまり, ある微分多様体 R が存在して, R と $\mathbb{R}^4$ と同相であるが, 微分同相でない.*

例えば [15] をみよ. $n \neq 4$ のとき, $\mathbb{R}^n$ はただひとつの微分構造しか持たないことが知られていた. さらに, Taubes [41] はコンパクトでない多様体上のゲージ理論を用いて, $\mathbb{R}^4$ は非可算無限個の異なる微分構造を持つことを証明した. この証明は, インスタントン方程式を用いたものである. 筆者が知る限り, Seiberg-Witten 方程式による証明はない.

次にユニモジュラー 2 次形式 $Q : \mathbb{Z}^r \otimes \mathbb{Z}^r \to \mathbb{Z}$ が不定符号であるとする. もし, Q が odd type ならば, $\mathbb{Z}$ 上

$$Q \cong \mathrm{diag}(1, \ldots, 1, -1, \ldots, -1)$$

と対角化可能である. これは代数的な事実である. この場合は, $\mathbb{CP}^2$, $-\mathbb{CP}^2$ の幾つか連結和の交差形式として Q は実現される. ゆるい条件 ($H_1(X; \mathbb{Z})$ が 2-torsion をもたない) という条件のもと, Q_X が even type であることと, X がスピンであることは同値である. また, 一般に X がスピンならば, Q_X は even type である. スピン 4 次元微分多様体の交差形式に関しては, 松本幸夫氏による次の予想がある.

予想 3.8 (Y. Matsumoto [36])**.** *X がスピン閉 4 次元微分多様体ならば*

$$\frac{11}{8}|\sigma(X)| \leq b_2(X)$$

が成立する.

もし, Q_X が正定値, または負定値ならば, Donaldson の定理から $b_2(X) = \sigma(X) = 0$ である. よって, この場合は予想は正しい. Q_X が不定符号の場合は, 古田幹雄氏により Seiberg-Witten 方程式を用いて, 次が示されている.

定理 3.9 (Furuta [11])**.** *X を閉スピン 4 次元微分多様体であり, Q_X が不定符号ならば*

$$\frac{10}{8}|\sigma(X)| + 2 \leq b_2(X).$$

これは精密化されているが ([13]), 予想 3.8 はまだ解かれていない.

4. Seiberg-Witten方程式の有限次元近似

Seiberg-Witten方程式は良い有限次元近似を持つことが示され, トポロジーへ応用があることが古田氏によって示されている. 定理3.9 がその一つである. さらに, Bauerと古田氏 [1] は 有限次元近似を用いてSeiberg-Witten不変量の精密化を, Seiberg-Witten方程式が定める写像の安定ホモトピー類として構成した. この節ではSeiberg-Witten方程式の有限次元近似について述べる.

簡単のため, $b_1(X)=0$と仮定する. $A_0 \in \mathcal{A}$を一つ固定する. $\mathcal{A}$は$i\Omega^1(X)$と同一視できる. $\mathcal{A} \cong i\Omega^1(X), A_0+ia \leftrightarrow ia$. Seiberg-Witten方程式は写像

$$SW : i\,\mathrm{im}\,d^* \oplus \Gamma(S^+) \to i\Omega^+(X) \oplus \Gamma(S^+),\ (ia,\phi) \mapsto (F^+_{A_0+ia}+q(\phi), D_{A_0+a}\phi)$$

を与える. ただし, $d^*:\Omega^2(X) \to \Omega^1(X)$は外微分$d$の形式的共役である. $\Gamma(S^\pm)$に, $U(1)$が複素数の掛け算で作用する. $\mathrm{im}\,d^*, \Omega^+(X)$への作用は自明とする. この作用に関して$SW$は$U(1)$同変であり,

$$SW^{-1}(0)/U(1) = \mathcal{M}(X,g,\mathfrak{s},\eta=0).$$

となる. この写像は次の分解を持つ

$$SW = L + C,\ L=(d^+, D_{A_0}),\ C = SW - L.$$

LはSW写像の線形部分で, Fredholm作用素である. $d^+:\Omega^1(X) \to \Omega^+(X)$は外微分$d$と自己双対部分への射影の合成. QはSW写像の非線形項である. Cはコンパクト写像である. LはFredholm作用素であるから, 有限次元部分空間

$$U \subset i\Omega^+(X) \oplus \Gamma(S^-)$$

が存在して

$$\mathrm{im}\,L + U = i\Omega^+(X) \oplus \Gamma(S^-).$$

UのLによる逆像をU'とかく.

$$U' = L^{-1}(U) \subset i\,\mathrm{im}\,d^* \oplus \Gamma(S^+).$$

LのFredholmであることから, U'も有限次元であることが分かる. 有限次元ベクトル空間の間の写像

$$f_U = p_U \circ SW|_{U'} : U' \to U$$

を考える. ここで, p_UはUへの (適切な内積に関する) 射影である. $\mathcal{M}(X,g,\mathfrak{s},\eta=0)$はコンパクトであるから (定理 1.1), ある大きい$R>0$が存在して

$$SW^{-1}(0) \subset B(i\,\mathrm{im}\,d^* \oplus \Gamma(S^+), R/2) \tag{3}$$

となる. ここで, 右辺は半径$\frac{R}{2}$の閉円板である.

命題 4.1. 十分小さい$\epsilon>0$が存在して, Uが十分大きいとき, $x \in S(U',\epsilon)$に対して

$$\|f_U(x)\| \geq \epsilon.$$

ここで, $S(U,R)$は半径Rの球面である.

Proof. もし, 主張が正しくないとすると, ある列 $U_n \subset \Omega^+(X) \oplus \Gamma(S^-)$, $x_n \in S(U'_n, R)$ が存在して, $f_{U_n}(x_n) \to 0$. $S(U'_n, R)$ は U'_n の中の半径 R の球面. L が Fredholm 作用素であること, C がコンパクト写像であることを使うと, ある部分列が存在して, x_n は $x \in SW^{-1}(0)$ に収束する. $\|x_n\| = R$ であるから, $\|x\| = R$ となる. これは (3) に反する. □

この命題から有限次元球面の間の $U(1)$-同変写像を得る.

$$f_U^+ : (U')^+ = B(U', R)/S(U', R) \to U^+ = B(U, \epsilon)/S(U, \epsilon).$$

f_U^+ の (適当な意味での) 安定ホモトピーは U によらず, f_U^+ の安定ホモトピー類は X の不変量となっている. その不変量を

$$\Psi_{X,\mathfrak{s}} \in \varinjlim_{U} [(U')^+, U^+]_0^{U(1)}$$

とかく. $[(U')^+, U^+]_0^{U(1)}$ は基点を保つ $U(1)$ 同変写像のホモトピー類の集合である. $\Psi_{X,\mathfrak{s}}$ を安定ホモトピー Seiberg-Witten 不変量と呼ぶことにする. 通常の SW 不変量 (定義 2.2) は f_U^+ の適切な意味での f_U^+ の写像度として再現される.

$b_1(X) > 0$ のときは, $\mathrm{Pic}(X) = H^1(X; \mathbb{R})/H^1(X; \mathbb{Z})$ 上のベクトル束の間の写像として f_U が定義され, $\Psi_{X,\mathfrak{s}} = [f_U^+]$ は $\mathrm{Pic}(X)$ 上のベクトル束の一点コンパクト化の間の写像の $U(1)$ 同変安定ホモトピー類として定義される.

安定ホモトピー Seiberg-Witten 不変量の次の非消滅定理がある.

定理 4.2 (Bauer [2])**.** X_j を閉 4 次元シンプレクティック多様体で, $b_1 = 0, b^+ \equiv 3 \mod 4$ とする. $\mathfrak{s}_j$ を X_j のシンプレクティック構造と整合的な概複素構造から誘導される *spin-c* 構造とする. このとき,

$$\Psi_{X_1 \# X_2, \mathfrak{s}_1 \# \mathfrak{s}_2},\ \Psi_{X_1 \# X_2 \# X_2, \mathfrak{s}_1 \# \mathfrak{s}_2 \# \mathfrak{s}_3} \neq 0.$$

さらに, $b^+(X_1) + b^+(X_2) + b^+(X_3) + b^+(X_4) \equiv 3 \mod 8$ なら

$$\Psi_{X_1 \# \# X_4, \mathfrak{s}_1 \# \cdots \# \mathfrak{s}_4} \neq 0.$$

$b^+ > 0$ の 4 次元多様体の連結和に対して, Seiberg-Witten 不変量は自明であった (定理 2.4). この非消滅定理は安定ホモトピー Seiberg-Witten 不変量が Seiberg-Witten 不変量よりも真に強力な不変量であることを示している.

一方, 安定ホモトピー SW 不変量は計算が難しく, 特に $b_1 > 0$ の場合, $\Psi_{X,\mathfrak{s}}$ が定義されている安定ホモトピー群が非常に具体的計算が難しい. そこで筆者は f_U に Pontryagin-Thom 構成の変種を適用することにより, (情報量は落ちるかもしれないが) より計算がし易い, 次の不変量を定義した.

$$SW_X^{spin}(\mathfrak{s}) = [\mathcal{M}(X, g, \mathfrak{s}, \eta)] \in \Omega_d^{spin}$$

定義の概略は, f_U を用いてモジュライ空間 $\mathcal{M}(X, g, \mathfrak{s}, \eta)$ にスピン構造を定義し, そのスピン同境類が不変量 $SW_X^{spin}(\mathfrak{s})$ である. この構成を行うには spin-c 構造 $\mathfrak{s}$ が次の条件が満たす必要がある.

$$\frac{c_1(\mathfrak{s})^2 - \sigma(X)}{8} \equiv 0 \mod 2,$$
$$\frac{1}{2} \langle c_1(\mathfrak{s}) \cup \alpha \cup \beta, [X] \rangle \equiv 0 \mod 2\ (\forall \alpha, \beta \in H^1(X; \mathbb{Z})).$$

定理 4.3 ([38, 18])**.** X_j を閉 4 次元シンプレクティック多様体で $b^+(X_j) - b_1(X_j) \equiv 3 \mod 4$ であるとする．$\mathfrak{s}_j$ をシンプレクティック構造と整合的な概複素構造が誘導する *spin-c* 構造とする．このとき，

$$SW^{spin}_{X_1\#X_2,\mathfrak{s}_1\#\mathfrak{s}_2} \neq 0 \in \Omega^{spin}_1 = \mathbb{Z}_2,\ SW^{spin}_{X_1\#X_2\#X_3,\mathfrak{s}_1\#\mathfrak{s}_2\#\mathfrak{s}_3} \neq 0 \in \Omega^{spin}_2 = \mathbb{Z}_2.$$

この定理は，定理 4.2 の前半部分を $b_1 > 0$ へ拡張している．$SW^{spin}_{X_1\#\cdots\#X_4,\mathfrak{s}_1\#\cdots\#\mathfrak{s}_4}$ は $\Omega^{spin}_3 = 0$ の元で，自明になるので，定理 4.2 の後半部分は拡張されていない．

定理 4.3 の応用として，石田政司氏と次のことを示した．[19]

- X をスピンでない，単連結，閉 4 次元シンプレクティック多様体で $b^+ \equiv 3 \mod 4$. g, h を奇数とする．このとき，
$$X\#\Sigma_g \times \Sigma_h$$
に同相であるが微分同相でない 4 次元多様体が存在する．ここで，Σ_g は種数 g の閉曲面である．

- X を単連結，閉 4 次元シンプレクティック多様体とする．g, h を奇数とする．このとき l_1, l_2 が十分大きければ
$$X\#\Sigma_g \times \Sigma_h\#l_1(S^1 \times S^3)\#l_2(-\mathbb{CP}^2)$$
はアインシュタイン計量を持たない．

- 山辺不変量や Perelman によって導入された不変量の変種の計算

5. Seiberg-Witten-Floer 理論

5.1. Seiberg-Witten-Floer 安定ホモトピー型

閉 4 次元多様体上の Seiberg-Witten 理論を境界付き 4 次元多様体へ拡張するためには，Seiberg-Witten-Floer 理論が必要になる．Y を閉 3 次元多様体，$\mathfrak{s}$ を Y 上の spin-c 構造とし，$Y \times \mathbb{R}$ 上の Seiberg-Witten 方程式を考える．$Y \times \mathbb{R}$ 上の Seiberg-Witten 方程式の解は，無限次元多様体上の Chern-Simons-Dirac 汎関数

$$CSD : \mathcal{B}_{\mathfrak{s}} \to \mathbb{R}\ (\text{または}\, \mathbb{R}/\mathbb{Z})$$

の gradient trajectory に対応する．つまり，$x : \mathbb{R} \to \mathcal{B}_{\mathfrak{s}}$ に対する方程式

$$\frac{dx}{dt}(t) = -\nabla CSD(x(t))$$

が $Y \times \mathbb{R}$ 上の Seiberg-Witten 方程式になっている．Kronheimer-Mrowka [26] は CSD の Morse ホモロジーとして，Seiberg-Witten-Floer ホモロジーを定義し，Seiberg-Witten 不変量を境界付き多様体へ拡張することに成功している．Seiberg-Witten-Floer ホモロジーは Seiberg-Witten 不変量の計算やトポロジーへの応用をもつ (例えば [27]).

$b_1(Y) = 0$ のとき，Manolescu [32] は $Y \times \mathbb{R}$ 上の方程式の有限次元近似と Conley の理論を組み合わせることにより，Seiberg-Witten-Floer 安定ホモトピー型 $SWF(Y, \mathfrak{s})$ を定義した．粗くいうと，$SWF(Y, \mathfrak{s})$ は $U(1)$-作用を持つ基点付き位相空間 (で CW 複体にホ

モトピー同値) である. $U(1)$ 同変ホモロジー $H_*^{U(1)}(SWF(Y,\mathfrak{s}))$ が Kronheimer-Mrowka の Floer ホモロジーに同型であることが示されている [29]. この意味で, $SWF(Y,\mathfrak{s})$ は Floer ホモロジーを精密化したものである. さらに, X が Y を境界してもつコンパクト 4 次元多様体のとき, 安定ホモトピー SW 不変量

$$\Psi_{X,\mathfrak{s}} \in \varinjlim_{U} [(U')^+, U \wedge SWF(Y,\mathfrak{s})]_0^{U(1)}$$

を定義される.

$b_1(Y) > 0$ の場合, Seiberg-Witten-Floer 安定ホモトピー型の構成には, $b_1(Y) = 0$ の場合にはない困難が現れる. $b_1(Y) = 1$ の場合は, Kronheimer-Manolescu [24], 一般の $b_1(Y) > 0$ の場合には Lin-Khandhawit-筆者 [22] によって構成された.

Seiberg-Witten-Floer 安定ホモトピー型の構成の概略を述べる. そのために, Conley の理論を簡単に説明する. 有限次元多様体 Z 上に滑らかな flow

$$\varphi : Z \times \mathbb{R} \to Z$$

が与えられたとする. $A \subset Z$ に対して, $\mathrm{Inv}\, A = \{z \in Z | \varphi(z, \mathbb{R}) \subset A\}$ とかく. $S \subset Z$ に対して, あるコンパクト集合 $A \subset Z$ が存在し

$$S = \mathrm{Inv}\, A \subset \mathrm{Int}\, A$$

となっているとき, S を isolated invariant set とよぶ. $\mathrm{Int}\, A$ は A の内部. Conley は isolated invariant set S に対して, 次の条件をみたすコンパクト集合 N, L, $L \subset N \subset A$ が存在することを示した.

1. $S = \mathrm{Inv}(N \setminus L)$
2. L は N の出口集合. つまり, $z \in N$, $t > 0$, $\varphi(z,t) \notin N$ ならば, ある $t' \in [0,t)$ が存在して, $\varphi(z,t') \in L$.
3. L は N に関して, positively invariant set である. つまり, $z \in L$, $t > 0$, $\varphi(z,[0,t]) \subset N$ ならば, $\varphi(z,[0,t]) \subset L$ である.

上の条件を満たす (N,L) は一つではないが, 商 N/L の基点付きホモトピー型は up to canonical homotopy equivalences で一つに定まる. $I(S) = N/L$ (の基点付きホモトピー型) を S の Conley index とよぶ.

例 5.1. φ が Z 上の *Morse* 関数の *gradient flow* だとして, S が *Morse index* k の臨界点であったとする. このとき, $I(S) = S^k$ である. この例から, *Conley index* は *Morse index* の精密化ということができる.

Y を閉 3 次元多様体で $b_1(Y) = 0$, g, $\mathfrak{s}$ を Y 上の Riemann 計量, spin-c 構造とする. $Y \times \mathbb{R}$ 上の Seiberg-Witten 方程式は, $x = (a,\phi) : \mathbb{R} \to V := i \ker d^* \oplus \Gamma(S)$ に対する方程式

$$\frac{\partial x}{\partial t}(t) = -(l + c)x(t)$$

とかける. $l = (*d, D_{A_0})$, c は非線形な写像である. l は self-adjoin な作用で, c はよいコンパクト性を持っている. 形式的には, 上の方程式が V 上の flow を定めている. (しか

し, V は無限次元であるので 上の方程式が実際に解を持つかどうかは分からない.) 上の方程式を有限次元近似し, 有限次元上の flow を得て Conley の理論を適用することで Seiberg-Witten-Floer 安定ホモトピー型を得る.

有限次元近似の仕方は次のとおりである. l は self-adjoint なので固有値は実数であり, V は l の固有空間で分解できる. $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $\lambda < \mu$ に対して V_λ^μ を固有値が $[\lambda, \mu)$ の中にある固有ベクトルで貼られる V の部分空間とする. このとき, V_λ^μ は有限次元になる. p_λ^μ を V_λ^μ への L^2-射影とする. 上の方程式の有限次元近似

$$x : \mathbb{R} \to V_\lambda^\mu,\ \frac{\partial x}{\partial t} = -(l + p_\lambda^\mu c)x(t)$$

を考えると, V_λ^μ 上の flow

$$\varphi_\lambda^\mu : V_\lambda^\mu \times \mathbb{R} \to V_\lambda^\mu$$

を得る.

Seiberg-Witten モジュライ空間のコンパクト性を利用して次を示すことができる.

命題 5.2. *$R \gg 0$ をとると, $\lambda \ll 0, \mu \gg 0$ に対して,*

$$\mathrm{Inv}\, B(V_\lambda^\mu, R) \subset \mathrm{Int}\, B(V_\lambda^\mu, R)$$

となる. つまり, $\mathrm{Inv}\, B(V_\lambda^\mu, R)$ は isolated invariant set である.

よって, Conley index $I_\lambda^\mu = I(B(V_\lambda^\mu, R))$ を得る. このままだと, λ, μ や Riemann 計量に依存し, 3 次元多様体の不変量になっていない. 適当な意味で desuspension

$$SWF(Y, \mathfrak{s}) = \Sigma^{-(V_\lambda^0 \oplus \mathbb{C}^{n(Y,g,\mathfrak{s})})} I_\lambda^\mu \tag{4}$$

をとると, λ, μ, g に依存しない $(Y, \mathfrak{s})$ の不変量を得る. $n(Y, g, \mathfrak{s}) \in \mathbb{Q}$ はある有理数で, $\mathbb{C}^{n(Y,g,\mathfrak{s})}$ は, 次元が $n(Y, g, \mathfrak{s})$ の形式的な複素ベクトル空間である. (4) を正当化するためには, 適切な安定ホモトピー圏を導入する必要があるが, ここではその説明は割愛する.

$b_1(Y) > 0$ の困難は以下のようなものである. ゲージ群 $\mathcal{G} = \mathrm{Map}(Y, U(1))$ は次の分解をもつ $\mathcal{G} = \mathcal{G}_{id} \times H^1(Y; \mathbb{Z})$. $\mathcal{G}_{id}$ は単位元成分で $\mathcal{G}_{id} = \{e^{if} | f : Y \to \mathbb{R}\}$. $b_1(Y) > 0$ だと $H^1(Y; \mathbb{Z})$ が無限次元空間 $V = i \ker d^* \oplus \Gamma(S)$ に作用している. 問題は, $H^1(Y; \mathbb{Z})$ が有限次元近似 V_λ^μ を保たないということである. もし, $H^1(Y; \mathbb{Z})$ 作用が V_λ^μ を保ち, 商空間 $V_\lambda^\mu / H^1(Y; \mathbb{Z})$ を得られたならば, $V_\lambda^\mu / H^1(Y; \mathbb{Z})$ 上の flow に対して Conley の理論を適用することによって, $SWF(Y, \mathfrak{s})$ が定義されるはずだが, その方法はうまくいかない. 一つの方法は以下のとおりである. 有限次元近似を取る前に商 $Q = V / H^1(Y; \mathbb{Z})$ を考えると, Q は $Pic(Y) = H^1(Y; \mathbb{R}) / H^1(Y; \mathbb{Z})$ 上の Hilbert 束になる. そこで, Q の十分大きい有限次元部分束 $F \to Pic(Y)$ を選び, CSD が誘導する F 上の flow に対して Conley の理論を適用することによって, $SWF(Y, \mathfrak{s})$ を定義するというのがその方法である. Conley の理論を適用できる状況にするためには, F が適切な条件を満たす必要があり, 実際そのような部分束が存在するかは非自明な問題である. 現在, その適切な条件をみたすような部分束の構成を研究しているところである.

もう一つの方法は, $H^1(Y; \mathbb{Z})$ 作用の商をとらずに, V_λ^μ 上の flow に Conley の理論を適用することである. V_λ^μ 上で考えると, $H^1(Y; \mathbb{Z})$ の作用の商を取っていない分, $Y \times \mathbb{R}$ 上の Seiberg-Witten 方程式の解のコンパクト性が悪くなり, 命題 5.2 に対応する命題が得られない. しかし, Khandhawit, Lin, 筆者 [22] はこの困難を解決して, Seiberg-Witten-Floer 安定ホモトピー型を一般の 3 次元多様体に対して定義した.

5.2. Seiberg-Witten-Fleor 安定ホモトピー型の応用

Seiberg-Witten-Floer 安定ホモトピー型の応用を幾つか挙げる.

$SWF(Y,\mathfrak{s})$ から, Froyshov 不変量 [9] という不変量を取り出すことができる. (もともとは Seiberg-Witten-Floer ホモロジーを用いて定義された.) Y をホモロジー 3 球面とする. spin-c 構造は (同型を除いて) ただひとつである. $\mathfrak{s}$ を記号から省略する. 引き続き, I^μ_λ を $B(V^\mu_\lambda, R)$ の Conley index とする. $U(1)$-不動点集合 $(V^\mu_\lambda)^{U(1)} = V^\mu_\lambda \cap i\ker d^*$ 上では, φ^μ_λ は線形写像 l で生成される flow になっている. このことから, 例 5.1 により,

$$(I^\mu_\lambda)^{U(1)} \sim V^0_\lambda(\mathbb{R})^+ = V^0_\lambda(\mathbb{R}) \cup \{\infty\}.$$

ここで, $V^\mu_\lambda(\mathbb{R}) = V^\mu_\lambda \cap i\ker d^*$ とかいた. したがって, $i : (I^\mu_\lambda)^{U(1)} \hookrightarrow I^\mu_\lambda$ を包含写像とすると,

$$\tilde{H}^{*+\dim V^0_\lambda(\mathbb{R})}_{U(1)}(I^\mu_\lambda;\mathbb{Z}) \xrightarrow{i^*} \tilde{H}^{*+\dim V^0_\lambda(\mathbb{R})}_{U(1)}(V^0_\lambda(\mathbb{R})^+;\mathbb{Z}) = \tilde{H}^*_{U(1)}(S^0;\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[U].$$

よって,

$$\operatorname{im} i^* = (U^{h'(Y,\lambda,\mu,g)}) \subset \mathbb{Z}[U]$$

となる $h'(Y,\lambda,\mu,g) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ が存在する.

$$h(Y) := h'(Y,\lambda,\mu,g) - \dim V^\mu_\lambda(\mathbb{C}) - n(Y,g) \in \mathbb{Z}$$

とおくと, $h(Y)$ は Y の不変量になる. $n(Y,g) \in \mathbb{Z}$ は (4) に現れた数である. ホモロジー 3 球面では, $n(Y,g)$ は整数になる. また, $V^\mu_\lambda(\mathbb{C}) = V^\mu_\lambda \cap \Gamma(S^+)$ とかいた.

定理 5.3 ([9])**.** *X をコンパクト 4 次元多様体で $X = -Y_0 \coprod Y_1$, $b^+(X) = 0$ であるとする. Y_0, Y_1 はホモロジー 3 球面とする. このとき, characteristic class $\hat{c} \in H^2(X;\mathbb{Z})$ に対して*

$$\frac{\hat{c}^2 + b_2(X)}{8} + h(Y_0) \leq h(Y_1)$$

となる. ここで, $\hat{c}$ が characteristic class とは, 全ての $\alpha \in H^2(X;\mathbb{Z})$ に対して, $Q_X(\hat{c},\alpha) \equiv Q_X(\alpha,\alpha) \mod 2$ となることである.

Proof. $c_1(\det \hat{S}^+) = \hat{c}$ となる X 上の spin-c 構造 $\hat{\mathfrak{s}}$ をとることができる. X 上の Seiberg-Witten 方程式の有限次元近似を用いて, $U(1)$-同変写像

$$f : (\mathbb{R}^a \oplus \mathbb{C}^{b+k})^+ \wedge SWF(Y_0) \to (\mathbb{R}^a \oplus \mathbb{C}^b)^+ \wedge SWF(Y_1).$$

ここで $k = \operatorname{ind} D_{\hat{A}_0} = \frac{\hat{c}^2+\sigma(X)}{8} = \frac{\hat{c}^2+b_2(X)}{8}$. $b^+(X) = 0$ より, $d^+ : \Omega^1_{CC}(X) \to \Omega^+(X)$ は同型写像であることがわかる. $\Omega^1_{CC}(X)$ は X 上のある境界条件を満たす 1 次微分形式の空間. これを用いると, $U(1)$ 不動点集合への制限

$$f^{U(1)} : (\mathbb{R}^a)^+ \to (\mathbb{R}^a)^+$$

はホモトピー同値である. さらに次の可換図式がある:

$$\begin{tikzcd}
\tilde{H}^*_{U(1)}((\mathbb{R}^a \oplus \mathbb{C}^{b+k})^+ \wedge SWF(Y_0);\mathbb{Z}) \arrow[d, "i^*"'] & \tilde{H}^*_{U(1)}((\mathbb{R}^a \oplus \mathbb{C}^b)^+ \wedge SWF(Y_1);\mathbb{Z}) \arrow[l, "f^*"] \arrow[d, "i^*"] \\
\tilde{H}^*_{U(1)}((\mathbb{R}^a)^+;\mathbb{Z}) \arrow[d, equal] & \tilde{H}^*_{U(1)}((\mathbb{R}^a)^+;\mathbb{Z}) \arrow[l, "\cong"', "(f^{U(1)})^*"] \arrow[d, equal] \\
(\mathbb{Z}[U])[a] \arrow[r, equal] & (\mathbb{Z}[U])[a]
\end{tikzcd}$$

$(\mathbb{Z}[U])[a]$ は $\mathbb{Z}[U]$ の次数を a だけずらしたものである．この図式から, 次が分かる

$$(U^{k+h(Y_0)}) \supset (U^{h(Y_1)}).$$

よって主張を得る．

□

X を閉４次元多様体で, Q_X が負定値であるとする．$X' = X \setminus D^4 \coprod D^4$ とすると, 境界が $S^3 \coprod S^3$ の４次元多様体を得る．$h(S^3) = 0$ であることが知られている．上の定理から, 任意の characteristic class $\hat{c}$ に対して $\hat{c}^2 + b_2(X) \leq 0$ を得る．Elkies の定理 [5] と組み合わせると, Q_X は $\mathbb{Z}$ 上で対角行列 $\mathrm{diag}(-1, \ldots, -1)$ に同型であることが示され, Donaldson の定理 3.5 を得る．定理5.3 は Donaldson の定理を拡張した定理と言える．

定理3.9 も境界付きスピン４次元多様体へ拡張することができる [12], [33]．ただし, 境界の連結成分はホモロジー３球面であるとする．Froyshov 不変量の $Pin(2)$-同変 K 理論版を用いる．ここで, $Pin(2) = U(1) \coprod U(1)j \subset \mathbb{H}$．スピン構造に対応する Seiberg-Witten 方程式は $Pin(2)$ 同変になっている [11]．I^{μ}_{X} の $U(1)$-不動点への制限を考えることにより, $K_{Pin(2)}(I^{\mu}_{X})$ よりイデアル $\mathcal{I} \subset K_{Pin(2)}(pt)$ を得る．この $\mathcal{I}$ から数値的な不変量 $\kappa(Y)$ を定義できる．定理 5.3 と同様の議論により, 定理3.9 の境界付き多様体への拡張を示すことができる．今, $b^+(X) \neq 0$ であるから, $f^{U(1)}$ はホモトピー同値でない．代わりに $Pin(2)$ 不動点集合への制限 $f^{Pin(2)}$ がホモトピー同値なっていて, 定理5.3 の証明の中と同様の図式を得る．この結果は KO 理論を用いて精密化されている [31]．また, 境界が一般の３次元多様体の場合へ拡張される予定である ([23])．

Seiberg-Witten-Floer 安定ホモトピー型の別の応用は, Manolescu [34] による位相多様体の三角形分割に関する予想の否定的解決である．その予想は位相多様体は三角形分割できるだろうという予想である．１次元, ２次元, ３次元位相多様体は微分構造を持つので三角形分割可能である．４次元の場合には Freedman の E_8 多様体が反例であることが知られていた．５次元以上が未解決であったが, Manolescu は $H^*_{Pin(2)}(SWF(Y); \mathbb{Z}_2)$ から得られる Froyshov 型不変量 $\alpha(Y), \beta(Y), \gamma(Y)$ を定義し, $\beta(Y)$ の性質と松本堯生氏 [35], Galewsiki-Stern [14] の仕事を組み合わせる事で, 予想を否定的に解決した．５以上の各次元に三角形分割できない位相多様体が存在すること示された．

Manolescu が定義した不変量 $\alpha(Y), \beta(Y), \gamma(Y)$ を用いて, Stoffregen [39, 40] は Seifert 多様体にホモロジー同境でないようなホモロジー３球面の例を構成した．さらに, ホモロジー３球面のなすホモロジー同境群 Θ_3 が無限生成であることを示している．これは, 古田氏 [10], Fintushel-Stern [6] がインスタントン方程式で証明した定理の別証明である．また, [30] には $\alpha(Y), \beta(Y), \gamma(Y)$ の構成の別のアプローチがかいてある．

6. Seiberg-Witten 理論と非可換幾何学

加藤毅氏, Hang Wang, 筆者は非可換幾何学 [3] で発展した道具やテクニックを用いて, ４次元多様体の基本群 $\pi_1 X$ の情報を取り込んだ Seiberg-Witten 理論の精密化を試みている．Seiberg-Witten 理論と非可換幾何学を組み合わせた研究は, 加藤氏 [20] の研究が始まりである．また, インスタントン方程式と非可換幾何学の組み合わせは, [21] において加藤氏, H. Wang, 筆者が議論している．現在, 非可換幾何学を用いた Seiberg-Witten 不変量の精密化や $\pi_1 X$ が自明でないときの交叉形式 Q_X の研究, Froyshov 型不変量の精密化を研究している．

参考文献

[1] S. Bauer, M. Furuta, *A stable cohomotopy refinement of Seiberg-Witten invariants. I*, Invent. Math. 155 (2004), 1–19.

[2] S. Bauer *A stable cohomotopy refinement of Seiberg-Witten invariants: II,* Invent. Math. 155 (2004) 21–40.

[3] , A. Connes, Noncommutative geometry. Academic Press, Inc., San Diego, CA, 1994.

[4] S. K. Donaldson, *An application of gauge theory to four dimensional topology*, J. Differential Geometry 18 (1983), 279–315.

[5] N. D. Elkies, *A characterization of the $\mathbb{Z}^n$ lattice*, Math. Res. Lett. 2 (1995), 321–326.

[6] R. Fintushel, R Stern, Instanton homology of Seifert fibred homology three spheres. Proc. London Math. Soc. 61 (1990), 109–137.

[7] R. Fintushel, R. Stern, *Knots, links, and 4-manifolds*, Invent. Math. 134 (1998), 363–400.

[8] M. Freedman *The topology of four-dimensional manifolds*, J. Differential Geom. 17 (1982), 357–453.

[9] K. Froyshov, *Monopole Floer homology for rational homology 3-spheres*, Duke Math. J., 155(2010), 519–576.

[10] M. Furuta, *Homology cobordism group of homology 3-spheres*, Invent. Math. 100 (1990), 339–355.

[11] M. Furuta, *Monopole equation and the $\frac{11}{8}$-conjecture*, Math. Res. Lett. 8 (2001), 279–291.

[12] M. Furuta, T. J. Li, Intersection forms of spin 4-manifolds with boundary, preprint.

[13] M. Furuta, Y. Kametani, Equivariant maps between sphere bundles over tori and KO-degree, preprint.

[14] D. E. Galewski, R. J. Stern, *Classification of simplicial triangulations of topological manifolds.* Ann. of Math 111 (1980), 1–34.

[15] R. Gompf, *Three exotic R4's and other anomalies*, J. Differential Geom. 18 (1983), 31–328.

[16] M. Ishida, *Normalized Ricci flow, surgery, and Seiberg-Witten invariants* Internat. J. Math. 25 (2014).

[17] M. Ishida, C. LeBrun, *Curvature, connected sums, and Seiberg-Witten theory*, Comm. Anal. Geom. 11 (2003), 809–836.

[18] M. Ishida, H. Sasahira, *Stable cohomotopy Seiberg-Witten invariants of connected sums of four-manifolds with positive first Betti number I: Non-vanishing theorem* Int. J. Math. 26, (2015).

[19] M. Ishida, H. Sasahira, *Stable cohomotopy Seiberg-Witten invariants of connected sums of four-manifolds with positive first Betti number II: Applications*, Comm. Anal. Geom. 25 (2017), 373–393.

[20] T. Kato, Covering monopole map and higher degree in non commutative geometry, preprint.

[21] T. Kato, H. Sasahira, H. Wang, Twisted Donaldson invariants, preprint.

[22] T. Khandhawit, J. Lin, H. Sasahira, Unfolded Seiberg-Witten Floer spectra, I: Definition and invariance, to appear in Geometry and Topology.

[23] T. Khandhawit, J. Lin, H. Sasahira, Unfolded Seiberg-Witten Floer spectra, III: in preparation.

[24] P. Kronheimer, C. Manolescu, *Periodic Floer pro-spectra from the Seiberg-Witten equations*, preprint.

[25] P. Kronheimer, T. Mrowka, *The genus of embedded surfaces in the projective plane*, Math. Res. Lett. 1 (1994), 797–808.

[26] P. Kronheimer, T. Mrowka, Monopoles and three-manifolds, New Mathematical Monographs, 10. Cambridge University Press, Cambridge, (2007).

[27] P. Kronheimer, T. Mrowka, P. Ozsvath, Z. Szabo, *Monopoles and lens space surgeries*, Annals of Mathematics, 165 (2007), 457–546.

[28] C. LeBrun, *Weyl curvature, Einstein metrics, and Seiberg-Witten theory*, Math. Res. Lett. 5 (1998), 423–438.

[29] T. Lidman, C. Manolescu, The equivalence of two Seiberg-Witten Floer homologies, to appear in Asterisque.

[30] F. Lin, A Morse-Bott approach to monopole Floer homology and the Triangulation conjecture, preprint.

[31] J. Lin, *$Pin(2)$-equivariant KO-theory and intersection forms of spin 4-manifolds*, Algebr. Geom. Topol. 15 (2015), 863–902.

[32] C. Manolescu, *Seiberg-Witten-Floer stable homotopy type of three-manifolds with $b_1 = 0$*, Geom. Topol. 7 (2003), 889–932

[33] C. Manolescu *On the intersection forms of spin four-manifolds with boundary*, Math. Ann. 359 (2014), 695–728.

[34] C. Manolescu, *Pin(2)-equivariant Seiberg-Witten Floer homology and the triangulation conjecture*, J. Amer. Math. Soc. 29 (2016), 147–176.

[35] T. Matumoto, Triangulation of manifolds. Algebraic and geometric topology (Proc. Sympos. Pure Math., Stanford Univ., Stanford, Calif., 1976), Part 2, pp. 3–6, Proc. Sympos. Pure Math., XXXII, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1978

[36] Y. Matsumoto, *On the bounding genus of homology 3-spheres*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA. Math. 29 (1982), 287–318.

[37] O. Ozsvath, Z. Szabo, *The symplectic Thom conjecture*, Ann. of Math. (2) 151 (2000), no. 1, 93–124.

[38] H. Sasahira, *Spin structures on Seiberg-Witten moduli spaces*, J. Math. Sci. Univ. Tokyo. 13, 347–363 (2006).

[39] M. Stoffregen, Pin(2)-equivariant Seiberg-Witten Floer homology of Seifert fibrations, preprint.

[40] M. Stoffregen, Manolescu invariants of connected sums, preprint.

[41] C. H. Taubes, *Gauge theory on asymptotically periodic 4-manifolds*, J. Differential Geom. 25 (1987), 363–430.

[42] C. H. Taubes, *The Seiberg-Witten invariants and symplectic forms*, Math. Res. Lett. 1 (1994), 809–822.

[43] E. Witten, *Monopoles and four-manifolds*, Math. Research Letters 1 (1994), 769-796.