Toward Complex analysis on Teichmüller space

宮地 秀樹 (大阪大学大学院理学研究科)*

2018 年 3 月

Contents

1. 導入

1.1. 問題

現在取り組んでいる研究のテーマは,「Teichmüller 空間論における複素解析学的側面と位相幾何学的側面の統一化」である.現在は,Teichmüller 空間上の正則関数の位相幾何学的側面からの取り扱いについての定式化を考えている.この章では研究の背景も含めてこの問題について説明する.言葉の定義は後の章で与える.なお,ここでの議論は便宜上閉曲面の Teichmüller 空間で考えているが,解析的有限型の Teichmüller 空間に対しても同様の議論が可能である.

1.1.1. Teichmüller 空間

以下,$g \geq 2$ として考える.種数 g の向きづけられた閉曲面を Σ_g とする.種数 g の閉 Riemann 面 X と向きを保つ同相写像 $f\colon \Sigma_g \to X$ の対 (X, f) を**標識付き Riemann 面**と呼ぶ.2 つの標識付き Riemann 面 (X_1, f_1) と (X_2, f_2) に対して $h \circ f_1$ と f_2 がホモトピックになるような双正則写像 $h\colon X_1 \to X_2$ が存在する時,(X_1, f_1) と (X_2, f_2) は **Teichmüller 同値**であるという.種数 g の **Teichmüller 空間** $\mathcal{T}_g$ は標識付き Riemann 面の

本研究は JSPS 科研費 16K05202(研究代表者), 16H03933(研究分担者), 17H02843(研究分担者)の助成を受けたものです.

* 〒 560-0043 大阪府豊中市待兼山町 1-1
web: http://www.math.sci.osaka-u.ac.jp/~miyachi/

Teichmüller 同型類である．Riemann 面の擬等角変形から自然に定義される Teichmüller 距離により距離位相が定義される．この位相の下で $\mathcal{T}_g$ は $\mathbb{R}^{6g-6}$ と同相である．そして，写像類群 Mod_g（Teichmüller 空間に作用する群としては Teichmüller modular 群と呼ばれる）による固有不連続な作用が自然に定義され，その商空間は Riemann のモジュライ空間となる（[10]）．

1.1.2. 複素解析的側面

擬等角写像に関する Ahlfors-Bers 理論により Teichmüller 空間には複素構造が入る．この複素構造による無限小構造は小平-Spencer 理論から定まる無限小構造と一致する（[10]）．Teichmüller 空間は Stein 多様体であり，さらに超凸（hyperconvex）である（[16], [36], [29]）．この複素構造に関して写像類群 Mod_g の作用は複素解析的である．

Teichmüller 空間の点（基点）$x_0 = (M_0, f_0) \in \mathcal{T}_g$ を固定する時，Riemann 面 M_0 上の擬 Fuchs 群をモノドロミー群にもつ射影構造に対して，それから定まる単射な展開写像の Schwarz 微分を対応させることにより，$\mathcal{T}_g$ には **Bers 埋め込み**と呼ばれる M_0 上の正則 2 次微分の空間 $\mathcal{Q}_{x_0} \cong \mathbb{C}^{3g-3}$ への複素解析な埋め込みが定義される（[1]）．このとき $\mathcal{T}_g$ は $\mathbb{C}^{3g-3}$ 内の有界領域と双正則同型となる．Bers 埋め込みの像は擬凸領域であるが，さらに多項式凸であることも知られている（[32]）．

Bers 埋め込みによる像の閉包 $\overline{\mathcal{T}}_g^{B,x_0}$ を Teichmüller 空間の **Bers のコンパクト化**と呼び，その境界 $\partial_B^{x_0}\mathcal{T}_g$ を **Bers 境界**と呼ぶ（[2]）．Bers のコンパクト化は Teichmüller 空間の「複素解析学的な」コンパクト化（の一つ）と考えられる．

1.1.3. 位相幾何学的側面

Teichmüller 空間は標識付き Riemann 面の同値類であるので，その無限遠（理想境界）は標識付き Riemann 面の退化現象から現れる対象により描写される．ここでは位相幾何学的な退化現象を Thurston 理論を用いて描写する．標識付き Riemann 面を考える利点は，基礎曲面 Σ_g の全てのホモトピー不変な位相幾何学的情報が標識を通すことにより全ての Riemann 面に伝達されることである．基礎曲面 Σ_g 上の非自明な単純閉曲線のホモトピー類の全体を $\mathcal{S}$ とする．この時，全ての標識的 Riemann 面の上に，標識を通して $\mathcal{S}$ の元に対応する単純閉曲線のホモトピー類が同時に定義される．

Riemann 面上には自然に双曲構造があり，単純閉曲線のホモトピー類の中に閉測地線が一意的に存在する．閉測地線の長さは等角不変量である．Teichmüller 空間の点を閉測地線の長さを用いて $\mathcal{S}$ 上の関数とみなし，その射影化を考えることにより Teichmüller 空間のコンパクト化が定義される．これを **Thurston のコンパクト化**という（[6]）．

重み付き単純閉曲線の空間は $\mathcal{WS} = \{t\alpha \mid t \geq 0, \alpha \in \mathcal{S}\}$ 交点数関数を用いることにより $\mathcal{S}$ 上の関数とみなすことができる．$\mathcal{S}$ 上の関数の全体に各点収束の位相を入れ，その関数空間の中での $\mathcal{WS}$ の閉包 $\mathcal{ML}$ を測度付き測地線層の空間という．その射影化 $\mathcal{PML}$ を射影的測度付き測地線層の空間と呼ぶ．Thurston のコンパクト化の理想境界は $\mathcal{PML}$ であり，定義から $\mathcal{PML}$ は $\mathcal{S}$ のような位相幾何学的な対象を含む．このため，このコンパクト化は「位相幾何学的」なコンパクト化と考えることができる．

1.1.4. 複素解析的側面と位相幾何学的側面の関係

ここで問題は Teichmüller 空間論における複素解析学的側面と位相幾何学的側面上記のように，Teichmüller 空間は（少なくとも）「複素解析学」と「位相幾何学」の 2 つの立場からコンパクト化が定義される．これらのコンパクト化は全く異なるものであるが，ある部分においては関係している．

複素解析的埋め込みである Bers 埋め込みの像の各点には擬 Fuchs 群が対応し，Bers 境界の各点は擬 Fuchs 群が退化した対象が現れる．これらは b-群と呼ばれる Klein 群である（[2]）．一般に Bers のコンパクト化は基点の取り方に依存する．実際，Teichmüller 空間上の恒等写像は基点の異なる Bers のコンパクト化の間の同相写像に拡張しない

（[13]）．しかし，Bers 境界 $\partial_B^{x_0}\mathcal{T}_g$ 内の，放物元を含む b-群の全体を APT^{x_0} と書くとき，Bers 境界内の部分集合 $\partial_B^{x_0,m}\mathcal{T}_g=\partial_B^{x_0}\mathcal{T}_g\setminus\mathrm{APT}^{x_0}$ は次の意味で基点の取り方によらない．

閉曲面 Σ_g 上の単純閉曲線から定義される曲線複体（curve complex）$\mathcal{C}_g$ は Gromov 双曲的であり，その Gromov 境界 $\partial\mathcal{C}_g$ は Σ_g を充満（filling up）する極小（minimal）な測地線の全体と同一視される（[20], [14], [9]）．つまり，Thurston のコンパクト化の境界 $\mathcal{PML}$ の中の，その台が Σ_g を充満する極小な測地線の全体を $\mathcal{MPML}$ と記すとき，横断測度を忘れることで自然に定義される連続閉写像である射影

$$\Pi\colon\mathcal{MPML}\to\partial\mathcal{C}_g \tag{1}$$

が定まる（[14], [9]）．一方，Thurston の 2 重極限定理（[34], [30]）および終層（ending lamination）予想の解決（[21], [4]）により，写像 (1) を通して得られる端不変量（終層）から定まる自然な同相写像

$$\Phi\colon\partial\mathcal{C}_g\to\partial_B^{x_0,m}\mathcal{T}_g \tag{2}$$

が定義される（例えば [31]，[18] を見よ．）．

1.2. 現在の研究について

Stein 多様体上の複素構造は多様体上に定義される正則関数の空間の構造により本質的に理解される（[11]）．上記に見るように，Teichmüller 空間の理想境界には位相幾何学的側面が見られる．現在は，写像 (2) を通して正則関数の境界値を位相幾何学的側面から研究するための土台作りをしている．

上に記したように，Krushkal により，Bers 埋め込みの像は $\mathcal{Q}_{x_0}\cong\mathbb{C}^{3g-3}$ 内の有界超凸領域であることが示されている．従って，Demailly の結果（[5]）から，**多重複素 Green 関数** $g_{\mathcal{T}_g}(x,y)$ が一意的に定義される．つまり，

$$g_{\mathcal{T}_g}(x,y)=\sup\{u(y)\mid u\in\mathrm{PSH}(\mathcal{T}_g),\,u\le 0,\,u(w)=\log|x-w|+O(1)\}$$

である（[15]）．ただし $\mathrm{PSH}(\mathcal{T}_g)$ は Teichmüller 空間上の多重劣調和関数の全体を表す．ここで，$u_x=g_{\mathcal{T}_g}(x,\cdot)$ とするとき，任意の $V\in\mathrm{PSH}(\mathcal{T}_g)\cap C^0(\overline{\mathcal{T}}_g^{B,x_0})$ に対して

$$V(x)=\int_{\partial_B^{x_0}\mathcal{T}_g}V(\varphi)d\mu_x^{x_0}(\varphi)+\frac{1}{(2\pi)^{3g-3}}\int_{\mathcal{T}_g}|u_x|dd^cV\wedge(dd^cu_x)^{3g-4} \tag{3}$$

を満たすような，Bers 境界 $\partial\mathcal{T}_g^{B,x_0}$ に台を持つ**多重複素調和測度** $\{\mu_x^{x_0}\}_{x\in\mathcal{T}_g}$ が定義される．特に $f\in\mathcal{O}(\mathcal{T}_g)\cap C^0(\overline{\mathcal{T}}_g^{B,x_0})$ に対して，積分表示

$$f(x)=\int_{\partial_B^{x_0}\mathcal{T}_g}f(\varphi)d\mu_x^{x_0}(\varphi)\quad(x\in\mathcal{T}_g) \tag{4}$$

を得る．ただし $\mathcal{O}(\mathcal{T}_g)$ は $\mathcal{T}_g$ 上の正則関数の全体を表す．

1.2.1. 主定理（その１）

次が成立する（[27]）．

定理 1.1 (Levi 形式)**.** $y_0=(N_0,g_0)\in\mathcal{T}_g$ および $x_0\in\mathcal{T}_g\setminus\{y_0\}$ を固定する．そして y_0 から x_0 への *Teichmüller* 写像の始微分 Q_{x_0} が一般的であると仮定する．ここで $v\in T_{x_0}\mathcal{T}_g$ および $f(0)=x_0$, $f_*(\partial/\partial\lambda)=v$ を満たす正則円板 $f\colon\{|\lambda|<\delta\}\to\mathcal{T}_g$ に対して，y_0 から $f(\lambda)$ への *Teichmüller* 写像の始微分 $Q_{f(\lambda)}$ が，

$$Q_{f(\lambda)}=Q_{x_0}+\lambda\psi_1[v]+\overline{\lambda}\psi_2[v]+o(|\lambda|)\quad(\lambda\to 0)$$

を満たすとする．このとき，関数 $\mathcal{T}_g \ni x \mapsto \log\tanh d_T(y_0, x)$ の x_0 に対して

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\log\tanh d_T(y_0,\,\cdot\,))[v,\overline{v}] &= \left.\frac{\partial^2}{\partial\lambda\partial\overline{\lambda}}\log\tanh d_T(y_0, f(\lambda))\right|_{\lambda=0} \\ &= \int_{N_0}\frac{|\psi_1[v]|^2-|\psi_2[v]|^2}{4|Q_{x_0}|}\end{aligned}$$

が成立する．

実際，ここでは触れないがLevi形式はThurstonのシンプレクテック形式を用いて表現することが可能である．上記の計算により次のKrushkalの公式の別証明が得られる．

定理 1.2 (Krushkalの公式（[17]）)**.** *$y_0 \in \mathcal{T}_g$ を極に持つ Teichmüller 空間上の多重調和 Green 関数は*

$$g_{\mathcal{T}_g}(y_0, x) = \log\tanh d_T(y_0, x) \quad (x \in \mathcal{T}_g)$$

を満たす．

1.2.2. 多重複素調和測度

Demailly [5] に従って Teichmüller 空間 $\mathcal{T}_g$ 上の距離 $\delta_{\mathcal{T}_g}$ を

$$\delta_{\mathcal{T}_g}(x,y) = \limsup_{z\to\partial_B^{x_0}\mathcal{T}_g}\left|\frac{g_{\mathcal{T}_g}(x,z)}{g_{\mathcal{T}_g}(y,z)}\right|$$

と定義する．定理1.2と Demailly の結果（[5, Théorème 5.3]）により次を得る．

系 1.1 (Demaillyの距離)**.** *$\delta_{\mathcal{T}_g}(x,y) = 2d_T(x,y)$ である．従って，任意の $x, y \in \mathcal{T}_g$ に対して*

$$e^{-(6g-6)d_T(x,y)}\mu_x^{x_0} \le \mu_y^{x_0} \le e^{(6g-6)d_T(x,y)}\mu_x^{x_0}$$

が成立する．

ただし $\mu_x^{x_0}$ と $\mu_y^{x_0}$ が互いに絶対連続であることは既にDemaillyにより一般の有界超凸領域に対して示されている．また，上記の距離 $\delta_{\mathcal{T}_g}(x,y)$ が小林距離と関係する不変距離であるかどうかは一般にはわからない（[5, Théorème 7.4]）．

次のことは比較的簡単に確認できる．

命題 1.1 (カスプの多重複素調和測度)**.** *任意の $x \in \mathcal{T}_g$ に対して，$\mu_x^{x_0}(\mathrm{APT}^{x_0}) = 0$ である．*

従って，写像 (2) を用いることにより積分表示 (4) は

$$f(x) = \int_{\partial_B^{x_0,m}\mathcal{T}_g} f(\varphi)d\mu_x^{x_0}(\varphi) = \int_{\partial\mathcal{C}_g} f(\Phi(\mathfrak{a}))d\Phi_*(\mu_x^{x_0})(\mathfrak{a}) \tag{5}$$

（$f \in \mathcal{O}(\mathcal{T}_g)\cap C^0(\overline{\mathcal{T}}_g^{B,x_0})$）となる．故に，写像 (2) を通すことにより正則関数の位相幾何学的な側面が見えて来ると期待する．

1.2.3. Poisson 核

$\varphi \in \partial_B^{x_0,m}\mathcal{T}_g = \partial_B^{x_0}\mathcal{T}_g \setminus \mathrm{APT}^{x_0}$ について，φ に対応する（標識付き）Klein 群の終層が一意エルゴード的な測度付き測地線層 F_φ の台となっているような全退化群であるとき，φ を（簡単に）**一意エルゴード的な全退化群**と呼ぶ．$\partial_B^{x_0,ue}\mathcal{T}_g \subset \partial_B^{x_0,m}\mathcal{T}_g$ を一意エルゴード的な全退化群のなす集合とする．

定理 1.3. 上記の記号のもとで，任意の $x, y \in \mathcal{T}_g$ に対して，

$$d\mu_y^{x_0}(\varphi) = \left(\frac{\mathrm{Ext}_x(F_\varphi)}{\mathrm{Ext}_y(F_\varphi)}\right)^{\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{T}_g} d\mu_x^{x_0}(\varphi) \quad (\text{a.e. } \varphi \in \partial_B^{x_0, ue}\mathcal{T}_g) \tag{6}$$

が成立する．ただし，$\mathrm{Ext}_x(F)$ は F の x における極値的長さであり，*"a.e."* はある $\mu_x^{x_0}$（従って $\{\mu_x^{x_0}\}_{x\in\mathcal{T}_g}$ 内の全ての測度）に関して考えている．

定理 1.3の証明には極値的長さの幾何学（[23], [24], [26], [25]）が用いられる．ここで，Demailly（[5, Théorème 5.4]）により**多重調和 Poisson 核**

$$\mathcal{P}^{x_0} \colon \mathcal{T}_g \times \mathcal{T}_g \times \partial_B^{x_0}\mathcal{T}_g \to \mathbb{R}_{\geq 0}$$

の存在が示されていることに注意する．つまり，$\mathcal{P}^{x_0}$ は可測関数で，ほとんど全ての $\varphi \in \partial_B^{x_0}\mathcal{T}_g$ （$\{\mu_x^{x_0}\}_{x\in\mathcal{T}_g}$）の各測度に関して）について

$$\mathcal{T}_g \times \mathcal{T}_g \ni (x, y) \mapsto \mathcal{P}^{x_0}(x, y, \varphi)$$

は連続かつ $\mathcal{P}^{x_0}(x, x, \varphi) = 1$（$x \in \mathcal{T}_g$）を満たし，

$$d\mu_y^{x_0}(\varphi) = \mathcal{P}^{x_0}(x, y, \varphi) d\mu_x^{x_0}(\varphi) \quad (x, y \in \mathcal{T}_g, \text{ a.e. } \varphi \in \partial_B^{x_0}\mathcal{T}_g)$$

が成立する．従って，上記の問題の解決には多重調和 Poisson 核の表示もしくは性質を調べる必要がある．定理 1.3から，極値的長さの比により多重調和 Poisson 核が表示されることが期待される．実際，定理 1.3により

$$\mathcal{P}^{x_0}(x, y, \varphi) = \left(\frac{\mathrm{Ext}_x(F_\varphi)}{\mathrm{Ext}_y(F_\varphi)}\right)^{\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{T}_g} \quad (x, y \in \mathcal{T}_g, \text{ a.e. } \varphi \in \partial_B^{x_0, ue}\mathcal{T}_g)$$

である．

1.3. トーラスの Teichmüller 空間における状況

トーラスの Teichmüller 空間は複素平面内の単位円板と同一視される（Bers 埋め込みとは異なる）．実際，Γ_τ を 1 と $\tau \in \mathbb{H}$ により生成される $\mathbb{C}$ 上の（生成元（標識）付き）格子とする．標識付きトーラス $\mathbb{C}/\Gamma_\tau$ と $x(\tau) = (i - \tau)/(i + \tau) \in \mathbb{D}$ に対応させることにより Teichmüller 空間を単位円板と同一視する．$\Sigma_1 = \mathbb{C}/\Gamma_i$ として $(0, 0)$ と $(-p, q)$（$p, q \in \mathbb{Z}$ は互いに素かつ $q \geq 0$）を結ぶ線分に対応する Σ_1 上の単純閉曲線を $C_{p/q}$ と書く．曲線 $C_{p/q}$ の射影類と $x(p/q) = (p - qi)/(p + qi) \in \partial\mathbb{D}$ を同一視することにより $\partial\mathbb{D}$ とトーラスの場合の $\mathcal{PMF}$ は同一視される．この同一視の下で，$[F_\theta] \in \mathcal{PMF}$ を $e^{i\theta} \in \partial\mathbb{D}$ に対応する射影的測度付き測地線層とする．

今は複素 1 次元で考えているので，多重複素 Green 関数や多重複素調和測度は単位円板上の（通常の）Green 関数や調和測度と一致する（[5, Examples 5.9, 5.11]）．従って $x_0 = x(i) = 0 \in \mathbb{D} \cong \mathcal{T}_1$ に対して，

$$d\mu_x^{x_0}(e^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\frac{1 - |x|^2}{|e^{i\theta} - x|^2} d\theta \quad (x \in \mathbb{D} \cong \mathcal{T}_1) \tag{7}$$

である．一方，標識付き Riemann 面 $x = x(\tau)$ における曲線 $C_{p/q}$ の極値的長さは

$$\mathrm{Ext}_x(C_{p/q}) = (p^2 + q^2)\frac{|x(p/q) - x|^2}{1 - |x|^2}$$

である．従って極値的長さの $\mathcal{MF}$ への連続拡張性（[12]）を用いると，式 (7) は

$$d\mu_x^{x_0}(e^{i\theta}) = \frac{\mathrm{Ext}_{x_0}(F_\theta)}{\mathrm{Ext}_x(F_\theta)} d\mu_{x_0}^{x_0}(e^{i\theta}) \tag{8}$$

と表示される．Minsky（[22]）によれば，同一視 $\mathbb{D} \cong \mathcal{T}_1$ は Thurston のコンパクト化 $(\mathcal{T}_1 \cup \mathcal{PMF} \cong \overline{\mathbb{D}})$ と Bers のコンパクト化の間の同相写像に拡張される．従って，式 (8) に与えられる表示は Bers のコンパクト化においても成立している．

2. 準備

§1.2.1内の定理の証明には，正則 2 次微分から定義される曲面上の特異 Euclid 構造の変形を用いる．ここでは，Teichmüller 空間の複素構造と正則 2 次微分について復習する．

2.1. Teichmüller 空間の複素構造

$x = (X, f) \in \mathcal{T}_g$ と $L^\infty(X)$ を X 上の L^∞ 関数係数の $(-1, 1)$ 形式 $\mu = \mu(z) d\bar{z}/dz$ のなす集合とする．$L^\infty(X)$ は $\|\mu\| = \mathrm{ess.sup}_{p \in X} |\mu(p)|$ をノルムとする複素 Banach 空間である．ペアリング

$$L^\infty(X) \times \mathcal{Q}_x \ni (\mu, q) \mapsto \langle \mu, q \rangle_x = \int_X \mu q = \int_X \mu(z) q(z) dxdy \tag{9}$$

を用いて，$x = (X, f) \in \mathcal{T}_g$ における $\mathcal{T}_g$ の正則接空間は

$$T_x\mathcal{T}_g = L^\infty(X)/\{\mu \in L^\infty(X) \mid \langle \mu, q \rangle_x = 0, \forall q \in \mathcal{Q}_x\}$$

と描写される．従って，$T_x\mathcal{T}_g$ と $\mathcal{Q}_x$ の間のペアリングが

$$T_x\mathcal{T}_g \times \mathcal{Q}_x \ni (v = [\mu], q) \mapsto \langle v, q \rangle_x = \int_X \mu q \tag{10}$$

が定義される．このペアリングは非退化であり，Teichmüller 空間の正則余接束は $\mathcal{Q}_g = \cup_{x \in \mathcal{T}_g} \mathcal{Q}_x$ と同一視される．特に，自然な射影 $\varpi \colon \mathcal{Q}_g \to \mathcal{T}_g$ により，Teichmüller 空間上の複素正則ベクトル束となる．

2.2. 正則 2 次微分の変形

任意の $q \in \mathcal{Q}_g \setminus \{0\}$ に対して，$\boldsymbol{\pi}(q) = (\boldsymbol{\nu}, \epsilon)$ を q の符号とする．つまり $\boldsymbol{\nu} \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ は $k \in \mathbb{N}$ における値 $\boldsymbol{\nu}(k)$ を k-位の零点の個数として定義される関数であり，$\epsilon \in \{\pm 1\}$ は q が Abel 微分の 2 乗の場合には $\epsilon = +1$ に，それ以外の時は $\epsilon = -1$ とする．この時，

$$\mathcal{Q}_g(\boldsymbol{\pi}) = \{q \in \mathcal{Q}_g \mid \boldsymbol{\pi}(q) = \boldsymbol{\pi}\}$$

は複素多様体の構造を持ち，

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{Q}_g(\boldsymbol{\pi}) = 2g + \frac{\epsilon - 3}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \boldsymbol{\nu}(k)$$

が成立する（[19], [35]）．実際，$q \in \mathcal{Q}_g(\boldsymbol{\pi})$ および $x = (M, f) = \varpi(q)$ に対して，$\pi_q \colon \tilde{M}_q \to M$ を $\sqrt{q}$ に関する分岐 2 重被覆とする．$i_q \colon \tilde{M}_q \to \tilde{M}_q$ を被覆変換とする．Σ_q を q の特異点（零点）の集合とする．Σ_q^{ub} を偶数次数の零点の集合とする．そして $\tilde{\Sigma}_q^{ub} \subset \tilde{M}_q$ を偶数次数の q の零点の $\pi_q \colon \tilde{M}_q \to M$ による逆像とする．この時，$H_1(q)^-$ を i_q による $H_1(\tilde{M}_{q_0}, \tilde{\Sigma}_{q_0}^{ub}; \mathbb{Z})$ の作用の固有値 -1 の固有空間とする．また，$\sqrt{q}$ のリフトから定まる $\tilde{M}_q$ 上の Abel 微分を ω_q と表す．

定理 2.1 (Masur-Smillie [19], Veech [35]). 任意の $q_0 \in \mathcal{Q}_g(\boldsymbol{\pi})$ に対して，次が成立するような q_0 の近傍 U が存在する．

1. 任意の $q \in U$ に対して，自然な同型 $H_1(\tilde{M}_q, \tilde{\Sigma}_q^{ub}; \mathbb{Z}) \cong H_1(\tilde{M}_{q_0}, \tilde{\Sigma}_{q_0}^{ub}; \mathbb{Z})$ が存在する．

2. 写像
$$\Psi\colon U \ni q \mapsto \left[H_1(q_0)^- \ni C \mapsto \int_C \omega_q \right] \in \mathrm{Hom}(H_1(q_0)^-, \mathbb{C}) \tag{11}$$
は（中への）双正則同型である．

2.3. 正則 2 次微分と特異 Euclid 構造

$q \in \mathcal{Q}_g(\boldsymbol{\pi})$ を固定する．$p_0 \in M - \Sigma_q$ に対して $V \subset M - \Sigma_q$ を連結かつ単連結な開近傍とする．この時 $V \ni p \mapsto z(p) = \int_{p_0}^{p} \sqrt{q} \in \mathbb{C}$ は正則であり，V を十分小さくとれば (V, z) は p_0 の周りの複素座標近傍を与える．この座標近傍において $q = dz^2$ となる．このような複素座標近傍を q の**自然座標**と呼ぶ（[33]）．二つの自然座標 (V_1, z_1) と (V_2, z_2) に対して，$V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$ のとき，$V_1 \cap V_2$ 上で $q = dz_1^2 = dz_2^2$ であるので，座標変換は Euclid の剛性変換
$$z_2 = \pm z_1 + c \tag{12}$$
となる．従って，ホロノミー準同型
$$\pi_1(X - \Sigma_q) \to \mathbb{Z}_2 \ltimes \mathbb{C} \subset \mathrm{Isom}(\mathbb{C})$$
が定義される．被覆空間 $\tilde{M}_q \to M$ を通すと，このホロノミー準同型は Abel 微分 ω_q の周期と一致する．幾何学的には，写像 (11) は正則 2 次微分から定まる特異 Euclid 構造の変形を記述していると考えることが出来る（例えば [19] を見よ）．

2.4. 複素構造の変形と特異 Euclid 構造の変形

座標変換 (12) の形から Riemann 面 M 上の正則 2 次微分 q から定まる特異 Euclid 構造は Riemann 面 M 上の複素構造と同値な正則座標系を定める．つまり，特異 Euclid 構造は複素構造の上位構造である．従って，定理 2.1における $q_0 \in \mathcal{Q}_g(\boldsymbol{\pi})$ の近傍 U の元 $q \in U$ について，特異 Euclid 構造の下位構造である複素構造を対応させることにより射影 $U \to \mathcal{T}_g$ が定まる．この写像は射影 $\varpi\colon \mathcal{Q}_g \to \mathcal{T}_g$ の制限写像である．

3. 主定理（その２）

3.1. q_0-実現

$x_0 = (M_0, f_0) \in \mathcal{T}_g$ および $q_0 \in \mathcal{Q}_{x_0}$ をとる．ここで次のように $\mathcal{Q}_{x_0}(q_0)$ の部分空間を定義する．

$$\begin{aligned}
\mathcal{Q}_{x_0}(q_0) &= \{\psi \in \mathcal{Q}_{x_0} \mid \boldsymbol{o}_z(\psi) \geq \lfloor \boldsymbol{o}_z(q_0)/2 \rfloor \text{ for } z \in M_0\} \\
\hat{\mathcal{Q}}_{x_0}(q_0) &= \left\{ \psi \in \mathcal{Q}_{x_0} \mid \begin{array}{ll} \boldsymbol{o}_z(\psi) \geq \lfloor \boldsymbol{o}_z(q_0)/2 \rfloor & (z \notin \Sigma_{ub}(q)) \\ \boldsymbol{o}_z(\psi) \geq \lfloor \boldsymbol{o}_z(q_0)/2 \rfloor - 1 & (z \in \Sigma_{ub}(q_0)) \end{array} \right\} \\
\mathcal{Q}_{x_0}^T(q_0) &= \{\psi \in \mathcal{Q}_{x_0} \mid \boldsymbol{o}_z(\psi) \geq \boldsymbol{o}_p(q_0) - 1\}
\end{aligned}$$

とする．ここで $\lfloor \cdot \rfloor$ は床関数（floor function）である．定義から，$q_0 \in \mathcal{Q}_{x_0}^T(q_0)$ であり，$\mathcal{Q}_{x_0}^T(q_0) \subset \mathcal{Q}_{x_0}(q_0) \subset \hat{\mathcal{Q}}_{x_0}(q_0)$ である．

$\mathbb{C}$-部分空間 $\mathcal{Q}_{x_0}(q_0)$ には非退化 Hermite 内積
$$\mathcal{Q}_{x_0}(q_0) \times \mathcal{Q}_{x_0}(q_0) \ni (\psi_1, \psi_2) \mapsto \int_{M_0} \frac{\psi_1 \overline{\psi_2}}{|q_0|} \tag{13}$$

が定義される（[7, §5]）．任意の $v \in T_{x_0}\mathcal{T}_g$ に対して

$$\langle v, \psi \rangle_x = \int_{M_0} \frac{\psi\,\overline{\eta_v}}{|q_0|}$$

を満たす $\eta_v \in \mathcal{Q}_{x_0}(q_0)$ が一意的に定まる．正則2次微分 η_v を v の q_0-**実現**と呼ぶ（[29]）．Hermite内積(13)による直交分解

$$\eta_v = \eta_v^T + \eta_v^{\perp} \in \mathcal{Q}_{x_0}^T(q_0) \oplus (\mathcal{Q}_{x_0}^T(q_0))^{\perp}$$

を考える．定義より，

$$T_{x_0}\mathcal{T}_g \ni v \mapsto (\eta_v, \eta_v^T, \eta_v^{\perp}) \in \mathcal{Q}_{x_0}(q_0) \oplus \mathcal{Q}_{x_0}^T(q_0) \oplus (\mathcal{Q}_{x_0}^T(q_0))^{\perp}$$

は反複素線形写像である．

3.2. 特異 Euclid 構造の接空間の構造

$x_0 \in \mathcal{T}_g$ および $q_0 \in \mathcal{Q}_{x_0}$ をとる．そして $\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}(q_0)$ とする．ここで $\mathrm{Hom}(H_1(q_0)^-, \mathbb{C})$ は $\mathbb{C}$-線型空間であるので，写像(11)は $\mathcal{Q}_g(\boldsymbol{\pi})$ の q_0 の周りの局所座標と考えられることに注意する．ここで $\mathfrak{x} \in T_{\Psi(q_0)}\mathrm{Hom}(H_1(q_0)^-, \mathbb{C}) \cong T_{q_0}\mathcal{Q}_g(\boldsymbol{\pi})$ に対して，$v(\mathfrak{x}; x_0) \in T_{x_0}\mathcal{T}_g$ を正則射影 $\varpi\colon \mathcal{Q}_g \to \mathcal{T}_g$ の微分による $\mathfrak{x}$ の像とする．また，$\bar{\mathfrak{x}} \in T_{\Psi(q_0)}\mathrm{Hom}(H_1(q_0)^-, \mathbb{C})$ を $\bar{\mathfrak{x}}(C) = \overline{\mathfrak{x}(C)}$ （$C \in H_1(q_0)^-$）とする．このとき次が成立する．

定理 3.1 (調和形式([28]))．上記の記号の下で，

$$\mathfrak{x}(C) = \int_C \frac{\pi_{q_0}^*(\eta_{v(\bar{\mathfrak{x}};x_0)})}{\omega_{q_0}} + \overline{\int_C \frac{\pi_{q_0}^*(\eta_{v(\mathfrak{x};x_0)})}{\omega_{q_0}}} + \int_C \Omega_{q_0;\mathfrak{x}}^e \quad (C \in H_1(q_0)^-)$$

が成立する．ただし，$\Omega_{q_0;\mathfrak{x}}^e$ は $\tilde{M}_{q_0}$ 上の L^2-完全形式である．

ここで，

$$\begin{aligned}
\mathfrak{x}^T(C) &= \int_C \frac{\pi_{q_0}^*(\eta_{v(\bar{\mathfrak{x}};x_0)}^T)}{\omega_{q_0}} \\
\mathfrak{x}^{\perp}(C) &= \int_C \frac{\pi_{q_0}^*(\eta_{v(\bar{\mathfrak{x}};x_0)}^{\perp})}{\omega_{q_0}} \\
\mathfrak{x}^{\wedge}(C) &= \int_C \left(\overline{\left(\frac{\pi_{q_0}^*(\eta_{v(\mathfrak{x};x_0)})}{\omega_{q_0}} \right)} + \Omega_{q_0;\mathfrak{x}}^e \right)
\end{aligned}$$

（$C \in H_1(q_0)^-$）とすると，定義と定理3.1により

$$\mathfrak{x} = \mathfrak{x}^T + \mathfrak{x}^{\perp} + \mathfrak{x}^{\wedge}$$

が成立する．ここで

$$\mathcal{Q}_{x_0} = \hat{\mathcal{Q}}_{x_0}(q_0) \oplus \hat{\mathcal{Q}}_{x_0}(q_0)^c$$

と直和分解する．

定理 3.2 (接空間の構造([28]))．上記の記号の下で次が成立する．

(1) $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}^T$ であることと，$v(\mathfrak{x}; x_0) = 0$ であること，つまり $\langle v(\mathfrak{x}; x_0), \psi \rangle_{x_0} = 0$（$\psi \in \mathcal{Q}_{x_0}$）であることは同値である．

(2) $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}^T + \mathfrak{x}^{\wedge}$ であることと，$\langle v(\mathfrak{x}; x_0), \psi \rangle_{x_0} = 0$（$\psi \in \hat{\mathcal{Q}}_{x_0}(q_0)^c$）であることと同値である．

(3) $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}^T + \mathfrak{x}^{\perp}$ であることと，$\langle v(\mathfrak{x}; x_0), \psi \rangle_{x_0} = 0$（$\psi \in \hat{\mathcal{Q}}_{x_0}(q_0)$）であることと同値である．

4. 主定理の証明のアイデア

4.1. 定理 3.1と定理 3.2について

定理2.1内のように q_0 の周りの座標近傍 (U, Ψ) をとる．近傍 U 内で $\mathfrak{x} \in \mathrm{Hom}(H_1(q_0)^-, \mathbb{C})$ の方向に q_0 を変形する．この変形は周期の無限小変形により与えられる．この無限小変形を表現する $\tilde{M}_{q_0}$ 上の L^2-閉形式 $\Omega_{q_0,\mathfrak{x}}$ を具体的に構成する．そして，$\Omega_{q_0,\mathfrak{x}}$ の $(0,1)$-部分を用いて構成される $\tilde{M}_{q_0}$ 上の Beltrami 微分

$$\tilde{\mu} = \frac{\Omega_{q_0,\mathfrak{x}}^{(0,1)}}{\omega_{q_0}}$$

の M_0 への射影 μ が接ベクトル $v(\mathfrak{x}; x_0) \in T_{x_0}\mathcal{T}_g$ を表現する Beltrami 微分となることを確認する．q_0-実現の定義から

$$\int_{M_0} \frac{\psi\, \overline{\eta_{v(\mathfrak{x};x_0)}}}{|q_0|} = \langle v(\mathfrak{x}; x_0), \psi \rangle_x = \int_{M_0} \mu\psi \quad (\psi \in \mathcal{Q}_{x_0})$$

であり，この式を $\tilde{M}_{q_0}$ へリフトすることにより，閉形式 $\Omega_{q_0,\mathfrak{x}}$ の調和部分の $(0,1)$-部分が $\overline{\pi_{q_0}^*(\eta_{v(\mathfrak{x};x_0)})/\omega_{q_0}}$ であることがわかる．また閉形式 $\Omega_{q_0,\mathfrak{x}}$ の構成から $\overline{\Omega_{q_0,\mathfrak{x}}} = \Omega_{q_0,\bar{\mathfrak{x}}}$ であることがわかるので，定理 3.1を得る．ここで得られた分解について，ペアリング (10) を部分空間において具体的に計算することにより定理 3.2を得る．

4.2. 定理 1.1と定理 1.2について

$y_0 \in \mathcal{T}_g$ を固定する．このとき, 任意の $x \in \mathcal{T}_g \setminus \{y_0\}$ について, y_0 から x への **Teichmüller 変形**は，始微分 $Q_x \in \mathcal{Q}_{y_0}$ と終微分 $q_x \in \mathcal{Q}_x$ が定義する特異 Euclid 構造の間のアフィン変形により記述される（[10]）．ただしここでは終微分は $\|q_x\| = e^{-2d_T(y_0,x)}\|Q_x\|$ を満たすように正規化しておく．この変形は始微分と終微分の周期を用いると，

$$\int_C \omega_{q_x} = \mathrm{Re} \int_C \omega_{Q_x} + ie^{-2d_T(y_0,x)} \mathrm{Im} \int_C \omega_{Q_x} \tag{14}$$

（$C \in H_1(q_0)^-$）のように記述される．式 (14) および定理 3.1と定理 3.2を用いて Levi 形式を計算することにより定理 1.1を得る．

定理 1.2の証明のアイデアは以下の通りである．Klimek による特徴付け（[15]）により，関数

$$\mathcal{T}_g \ni x \mapsto \log \tanh d_T(y_0, x) \tag{15}$$

が $\mathcal{T}_g$ 上で多重劣調和関数であることを示せば十分である．ここで $\mathcal{T}_\infty \subset \mathcal{T}_g \setminus \{y_0\}$ を，Q_x が一般的であるような $x \in \mathcal{T}_g \setminus \{y_0\}$ の集合とする．$\mathcal{T}_g$ は稠密な開集合である．定理 1.1を用いることにより，関数 (15) は $\mathcal{T}_\infty$ 上で多重劣調和であることがわかる．

次に $\mathcal{Q}_g$ の階層構造（stratification, [19], [35]）と無限小空間の構造（定理 3.2）を用いると，補集合 $(\mathcal{T}_g \setminus \{y_0\}) \setminus \mathcal{T}_\infty$ には（余次元が正である）C^ω 実部分多様体による階層構造があることがわかる．関数 (15) は C^1 級であるので（[8]），Branchet による多重劣調和関数の拡張定理（[3]）を階層構造に沿って帰納的に応用することより，関数 (15) が $\mathcal{T}_g$ 上に多重劣調和関数として拡張されることを確認する．

References

[1] L. Bers. Correction to “Spaces of Riemann surfaces as bounded domains”. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 67:465–466, 1961.

[2] L. Bers. On boundaries of Teichmüller spaces and on Kleinian groups. I. *Ann. of Math. (2)*, 91:570–600, 1970.

[3] P. Blanchet. On removable singularities of subharmonic and plurisubharmonic functions. *Complex Variables Theory Appl.*, 26(4):311–322, 1995.

[4] J. F. Brock, R. D. Canary, and Y. N. Minsky. The classification of Kleinian surface groups, II: The ending lamination conjecture. *Ann. of Math. (2)*, 176(1):1–149, 2012.

[5] J.-P. Demailly. Mesures de Monge-Ampère et mesures pluriharmoniques. *Math. Z.*, 194(4):519–564, 1987.

[6] A. Douady, A. Fathi, D. Fried, F. Laudenbach, V. Poénaru, and M. Shub. *Travaux de Thurston sur les surfaces*, volume 66 of *Astérisque*. Société Mathématique de France, Paris, 1979. Séminaire Orsay, With an English summary.

[7] D. Dumas. Skinning maps are finite-to-one. *Acta Math.*, 215(1):55–126, 2015.

[8] C. J. Earle. The Teichmüller distance is differentiable. *Duke Math. J.*, 44(2):389–397, 1977.

[9] U. Hamenstädt. Train tracks and the Gromov boundary of the complex of curves. In *Spaces of Kleinian groups*, volume 329 of *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, pages 187–207. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2006.

[10] Y. Imayoshi and M. Taniguchi. *An introduction to Teichmüller spaces*. Springer-Verlag, Tokyo, 1992.

[11] H. Iss'sa. On the meromorphic function field of a Stein variety. *Ann. of Math. (2)*, 83:34–46, 1966.

[12] S. P. Kerckhoff. The asymptotic geometry of Teichmüller space. *Topology*, 19(1):23–41, 1980.

[13] S. P. Kerckhoff and W. P. Thurston. Noncontinuity of the action of the modular group at Bers' boundary of Teichmüller space. *Invent. Math.*, 100(1):25–47, 1990.

[14] E. Klarerich. The boundary at infinity of the curve complex and the relative Teichmüller space. *preprint*, 1999.

[15] M. Klimek. Extremal plurisubharmonic functions and invariant pseudodistances. *Bull. Soc. Math. France*, 113(2):231–240, 1985.

[16] S. L. Krushkal. Strengthening pseudoconvexity of finite-dimensional Teichmüller spaces. *Math. Ann.*, 290(4):681–687, 1991.

[17] S. L. Krushkal. The Green function of Teichmüller spaces with applications. *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 27(1):143–147, 1992.

[18] C. J. Leininger and S. Schleimer. Connectivity of the space of ending laminations. *Duke Math. J.*, 150(3):533–575, 2009.

[19] H. Masur and J. Smillie. Hausdorff dimension of sets of nonergodic measured foliations. *Ann. of Math. (2)*, 134(3):455–543, 1991.

[20] H. A. Masur and Y. N. Minsky. Geometry of the complex of curves. I. Hyperbolicity. *Invent. Math.*, 138(1):103–149, 1999.

[21] Y. Minsky. The classification of Kleinian surface groups. I. Models and bounds. *Ann. of Math. (2)*, 171(1):1–107, 2010.

[22] Y. N. Minsky. The classification of punctured-torus groups. *Ann. of Math. (2)*, 149(2):559–626, 1999.

[23] H. Miyachi. Teichmüller rays and the Gardiner-Masur boundary of Teichmüller space. *Geom. Dedicata*, 137:113–141, 2008.

[24] H. Miyachi. Teichmüller rays and the Gardiner-Masur boundary of Teichmüller space II. *Geom. Dedicata*, 162:283–304, 2013.

[25] H. Miyachi. Extremal length geometry. In *Handbook of Teichmüller theory. Vol. IV*, volume 19 of *IRMA Lect. Math. Theor. Phys.*, pages 197–234. Eur. Math. Soc., Zürich,

2014.

[26] H. Miyachi. Unification of extremal length geometry on Teichmüller space via intersection number. *Math. Z.*, 278(3-4):1065–1095, 2014.

[27] H. Miyachi. Deformation of singular Euclidean structures with marked points associated with holomorphic quadratic differentials and its application to Pluripotential theory on Teichmüller spaces. *preprint*, 2017.

[28] H. Miyachi. Deformation of singular Euclidean structures with marked points associated with holomorphic quadratic differentials and its application to Pluripotential theory on Teichmüller spaces. *preprint*, 2017.

[29] H. Miyachi. Extremal length functions are log-plurisubharmonic. In *In the Tradition of Ahlfors–Bers, VII*, volume 696 of *Contemp. Math.*, pages 225–250. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2017.

[30] K. Ohshika. Limits of geometrically tame Kleinian groups. *Invent. Math.*, 99(1):185–203, 1990.

[31] K. Ohshika. Reduced Bers boundaries of Teichmüller spaces. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 64(1):145–176, 2014.

[32] H. Shiga. On analytic and geometric properties of Teichmüller spaces. *J. Math. Kyoto Univ.*, 24(3):441–452, 1984.

[33] K. Strebel. *Quadratic differentials*, volume 5 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)]*. Springer-Verlag, Berlin, 1984.

[34] W. P. Thurston. Hyperbolic Structures on 3-manifolds, II: Surface groups and 3-manifolds which fiber over the circle. *ArXiv Mathematics e-prints*, Jan. 1998.

[35] W. A. Veech. Moduli spaces of quadratic differentials. *J. Analyse Math.*, 55:117–171, 1990.

[36] S.-K. Yeung. Bounded smooth strictly plurisubharmonic exhaustion functions on Teichmüller spaces. *Math. Res. Lett.*, 10(2-3):391–400, 2003.