ランダム複素力学系におけるランダム性誘起現象とその応用

角 大輝 (京都大学大学院人間・環境学研究科)*

1. 導入と主結果

まずランダム複素力学系の動機と背景を述べる。**力学系理論**は物事が時間とともにある法則に従い変化していく様子を探る研究分野である。そのなかで、空間 X とその上の写像 $f : X \to X$ を用意して、f の n 回合成 f^n について、写像族 $\{f^n\}_{n=1}^{\infty}$ の X への作用を調べる、または、初期値 $x_0 \in X$ をとり、$x_{n+1} = f(x_n)$ で定まる点列 $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ の挙動を調べる、というものがある。これを **(決定論的自励系) 離散力学系**という。「離散」とは時間が離散である、ということを意味する。(離散) 力学系理論はありとあらゆる自然科学、社会科学において数理モデルとして顔を出す。ここで自然界や現実社会において多くのランダム項が存在するので、「**ランダム力学系**」を考えること、すなわち、X 上の写像のある族 $\mathcal{F} := \{g : X \to X \mid g \in \Lambda\}$ を与え、その元をある確率分布に従って選択して点を動かしていくこと、を考えることが自然かつ重要と思われる。

その一方で、離散力学系の中で重要で、かつ研究対象としてポピュラーであるものの一つとして、**実直線上の多項式力学系**、すなわち、$X = \mathbb{R}$, f は多項式関数、の場合がある。この場合は初期値の範囲を $\mathbb{C}$ ひいてはリーマン球面 $\hat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ に拡げることが筋がよく、深い解析を可能にする。これは**複素力学系**の動機の一つである。一変数複素力学系の標準的教科書として [26, 2] を挙げる。

以上のアイデアを統合して、「**ランダム複素力学系**」、すなわち、$\hat{\mathbb{C}}$ 上の有理写像の族を一つ与えて、その元を毎回ランダムに選択して点を動かしていくシステムを考えること、が重要かつ興味深いと考えられる。ランダム複素力学系の他の動機としては、**(1)** 複素多項式 $f(z)$ の根を見つけるための**ニュートン法** ($\hat{\mathbb{C}}$ 上の有理写像 $N_f(z) = z - \frac{f(z)}{f'(z)}$ の $\hat{\mathbb{C}}$ 上での力学系) のランダム化により f の根を見つけやすくすること (S,[51]) **(2) リーマン面の写像類群**の、$\mathbb{R}^N$ や $\mathbb{C}^N$ (や他の複素多様体) への**双有理変換群としての作用** (中西敏浩氏 (島根大学)、中村豪氏 (愛知工業大学) の研究 ([28, 29]) など) などがあげられる。(2) の話に関連して、A. Hinkkanen と G. J. Martin は、2 元生成のメビウス変換群が離散となっているパラメータ空間の記述に**多項式半群** (多項式の集合で、写像の合成を積とする半群) の力学系を用いることを研究し、そのことを契機として**有理半群** (有理写像の集合で、写像の合成を積とする半群) の力学系を研究し始めた ([14])。その研究はランダム複素力学系の研究に直結している。なお有理半群の力学系については、R. Stankewitz による入門 ([33]) が導入として読みやすく、最近の発展としては、講演者, R. Stankewitz, M. Urbański, J. Jaerisch, 片方江氏 (一関高専) によるもの ([36]-[51],[34, 35],[52]-[54],[16]-[18],[19]) 等を参照されたい。

本研究は科研費 (課題番号:15K04899) の助成を受けたものである。
2010 Mathematics Subject Classification: 37F10, 37H10
キーワード：ランダム複素力学系、ランダム性誘起現象、雑音誘起現象、ランダム性誘起秩序、正則写像半群、ランダム緩和ニュートン法、エルゴード理論、フラクタル幾何学

* 〒606-8501 京都市左京区吉田二本松町京都大学大学院人間・環境学研究科共生人間学専攻数理科学講座
e-mail: sumi@math.h.kyoto-u.ac.jp
web: http://www.math.h.kyoto-u.ac.jp/~sumi/index-j.html

ランダム力学系に関しては、一般論の教科書（[1] など、ただしランダム複素力学系の教科書は一冊もない) が 1980 年代頃から何冊も出版され、そこでは従来の力学系理論を一般化する試みが与えられてきたが、近年、**決定論的力学系では決して現れない、ランダム力学系特有の現象**が数多く観察されるようになってきた。そのようなランダム力学系特有の現象を、**雑音誘起現象**または**ランダム性誘起現象**と呼ぶ。それは津田一郎氏、松本健司氏、佐藤譲氏（いずれも北大）などの非線形物理学の研究者による、$\mathbb{R}$ 上のランダム力学系について数値実験を用いたもの（[21, 31, 32]) や、純粋数学で証明が示されたもの（ランダム複素力学系に関するもの、[11, 22, 23, 9], 本講演の結果、[47, 48] など）など、多くのものがある。雑音誘起現象を含む最近のランダム力学系の概説（ただしランダム複素力学系についてはあまりない）については、佐藤譲氏の解説 [32] を参照されたい。また、ランダム複素力学系の 2010 年頃までの解説については、講演者による [42, 43] を参照されたい。

なお、$\mathbb{R}$ 上のランダム力学系の数値実験で示されたものの中では、一つの (多項式ではない）写像の力学系がカオス的な振る舞いをしているところにある程度の大きさのノイズを加えた結果カオス性が軽減する現象（**雑音誘起秩序**）と、一つの写像の力学系が穏やかな振る舞いをしているところにある程度の大きさのノイズを加えた結果カオス性が増す現象（**雑音誘起カオス**）が観察されている ([21, 31]) が、これらの現象に対する厳密な数学的説明は与えられておらず、30 年以上未解決となっている。

本講演ではランダム複素力学系を扱うが、初めてランダム複素力学系を論じたのは J. E. Fornaess と N. Sibony である ([11])。そこでは一つの複素有理写像で吸引的サイクルを持つものに非常に小さな複素パラメータ摂動を与えて得られるランダム力学系における雑音誘起秩序が証明された。以後、R. Brück や W.Qiu などにより、[6, 7] を用いた [5, 3, 4] などの複素 2 次多項式のランダム力学系の研究がなされた。

本講演では上記の結果を拡張し組織的な考察を行うことにより、ランダム複素力学系においてランダム性（ノイズは大きいかもしれない）によって決定論的力学系よりもシステムのカオス性が軽減し秩序性が増す「**ランダム性誘起秩序**」現象と、それを**ランダム緩和ニュートン法**などに応用すること等を特に取り上げる。ランダム緩和ニュートン法では**単なるランダム性誘起秩序よりもさらに良いランダム性効果**を得られる。

定義 1 (S,[51])**.** 以下の記号と定義を用いる。

(1) $\hat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\} \cong S^2$ をリーマン球面とし、d をその上の球面距離とする。

(2) $\mathrm{Rat} := \{f : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}} \mid f$ は非定数正則写像$\}$ とおき、 その上の距離 η を $\eta(f,g) = \sup_{z\in\hat{\mathbb{C}}} d(f(z), g(z))$ で定義する。**注意：**(Rat, η) は局所コンパクト完備可分距離空間であり、有限次元連結複素多様体の可算 disjoint union となる ([2])。

(3) 距離空間 Y に対し、 $\mathfrak{M}_1(Y)$ で Y 上のボレル確率測度全体を表す。

(4) Y を Rat の部分集合とし上記の距離 η を入れる。 このとき
$\mathfrak{M}_{1,c}(Y) := \{\tau \in \mathfrak{M}_1(Y) \mid \ \mathrm{supp}\,\tau$ は Y のコンパクト部分集合$\}$ とおく。

以下、$\tau \in \mathfrak{M}_{1,c}(\mathrm{Rat})$ に対し、「毎回、τ に従って写像 $h \in \mathrm{Rat}$ を選択して $\hat{\mathbb{C}}$ 上の点を動かす、$\hat{\mathbb{C}}$ 上の**独立同分布ランダム力学系**」を考える。これは状態空間を $\hat{\mathbb{C}}$ とする離散時間マルコフ過程で、点 $x \in \hat{\mathbb{C}}$ からボレル集合 $A \subset \hat{\mathbb{C}}$ への**推移確率** $p(x, A)$ が $p(x, A) = \tau(\{h \in \mathrm{Rat} \mid h(x) \in A\})$ となるものを与える。

(5) $\tau \in \mathfrak{M}_{1,c}(\mathrm{Rat})$ に対し、$G_\tau := \{\gamma_n \circ \cdots \circ \gamma_1 \mid n \in \mathbb{N}, \gamma_1, \ldots, \gamma_n \in \mathrm{supp}\,\tau\}$ とおく。**注意**：G_τ は写像の合成を積とする半群になる。G_τ を「$\mathrm{supp}\,\tau$ で生成された**有理半群**」という。

(6) $\tau \in \mathfrak{M}_{1,c}(\mathrm{Rat})$ が **weakly mean stable** であるとは、以下が成り立つときにいう。
ある $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}$, $\hat{\mathbb{C}}$ の空でない開部分集合 $U_1, \ldots, U_m$, 空でないコンパクト集合 $K (\subset \cup_{j=1}^m U_j)$ と定数 c $(0 < c < 1)$ が存在して、以下の (a) (b) (c) を満たす。

(a) 任意の $(\gamma_1, \ldots, \gamma_n) \in (\mathrm{supp}\,\tau)^n$ に対し、$\gamma_n \circ \cdots \circ \gamma_1(\cup_{j=1}^m U_j) \subset K$ となる。さらに任意の $j = 1, \ldots, m$, 任意の $x, y \in U_j$ と任意の $(\gamma_1, \ldots, \gamma_n) \in (\mathrm{supp}\,\tau)^n$ に対し、次が成り立つ。

$$d(\gamma_n \circ \cdots \circ \gamma_1(x), \gamma_n \circ \cdots \circ \gamma_1(y)) \leq c d(x, y).$$

(b) $D_\tau := \bigcap_{h \in G_\tau} h^{-1}(\hat{\mathbb{C}} \setminus \cup_{j=1}^m U_j)$ とおく。このとき $\sharp D_\tau < \infty$ となる。

(c) τ の minimal set L で $L \subset D_\tau$ となる任意のものに対し、ある $z \in L$ とある $\alpha \in G_\tau$ が存在して $\alpha(z) = z$ かつ $|\alpha'(z)| > 1$ となる。ただし $z = \infty$ のときは「$|\alpha'(z)| > 1$」の代わりに、$\varphi(z) = 1/z$ とおいて「$|(\varphi \circ \alpha \circ \varphi^{-1})'(0)| > 1$」という条件を考える。
ここで、L が τ の **minimal set** であるとは、L が $\hat{\mathbb{C}}$ の空でないコンパクト部分集合で、任意の $z \in L$ に対し、$\overline{\cup_{h \in G_\tau}\{h(z)\}} = L$ となるときをいう。

また、上で、$D_\tau = \emptyset$ となるときは、τ は **mean stable** であるという。

(7) 任意の $\tau \in \mathfrak{M}_{1,c}(\mathrm{Rat})$ に対し、写像 $M_\tau^* : \mathfrak{M}_1(\hat{\mathbb{C}}) \to \mathfrak{M}_1(\hat{\mathbb{C}})$ を次で定義する。

$$M_\tau^*(\mu)(A) := \int \mu(h^{-1}(A))\ d\tau(h)$$

ただし μ は $\in \mathfrak{M}_1(\hat{\mathbb{C}})$ の任意の元、 A は $\hat{\mathbb{C}}$ の任意のボレル部分集合。

weakly mean stable な τ によるランダム力学系の結果 (定理 2,4) を述べる。

定理 2 (S,[51])**.** $\tau \in \mathfrak{M}_{1,c}(\mathrm{Rat})$ が *weakly mean stable* であるとする。このとき、ある $l \in \mathbb{N}$ が存在して、 **任意の** $x \in \hat{\mathbb{C}}$ に対し、ある $(M_\tau^*)^l$-不変な $\mu_x \in \mathfrak{M}_1(\hat{\mathbb{C}})$ で次を満たすものが存在する。

$$(M_\tau^*)^{nl}(\delta_x) \to \mu_x \quad as\ n \to \infty$$

ただし δ_x は x に台を持つディラック測度を表し、収束は $\mathfrak{M}_1(\hat{\mathbb{C}})$ 上の弱収束位相に関するものである。また τ が *mean stable* ならば上記の収束は $x \in \hat{\mathbb{C}}$ に関し一様となる。

注意 3. 定理 2 の主張は、次数が 2 以上の $f \in \mathrm{Rat}$ による**決定論的複素力学系では決して成り立たない**。実際、f のジュリア集合

$$J(f) := \{z \in \hat{\mathbb{C}} \mid z \text{の任意の近傍で} \{f^n\}_{n=1}^\infty \text{は同程度連続でない}\}$$

について、$f : J(f) \to J(f)$ の力学系は**カオス的**であり、特に $J(f)$ の generic な初期点 z について $\{f^n(z) \mid n \in \mathbb{N}\}$ は $J(f)$ で稠密であって、どんな $l \in \mathbb{N}$ についても $\{f^{nl}(z)\}_{n=1}^\infty$ が f の周期的サイクルに収束することはない。

定理 4 (S,[51])**.** $\tau \in \mathfrak{M}_{1,c}(\mathrm{Rat})$ が *weakly mean stable* であるとする。

$$J(G_\tau) := \{z \in \hat{\mathbb{C}} \mid G_\tau \text{は}\, z \,\text{の任意の近傍上で同程度連続でない}\}$$

とおく（これを G_τ の**ジュリア集合**という）。そして以下の条件 (1) (2) を仮定する。

(1) $\sharp J(G_\tau) \geq 3$ となる（**注意**: もし $\mathrm{supp}\,\tau$ が次数 2 以上の元を一つでも含めば、$\sharp J(G_\tau) \geq 3$ となる。）

(2) τ の *minimal set* L で $L \subset D_\tau$ となる任意のものに対し (D_τ は定義 1 (6) のもの)、以下の (a)(b) が成り立つ。

   (a) (L,τ) のリアプノフ指数 $\chi(L,\tau)$ がゼロでない。ここで $\chi(L,\tau)$ を説明すると、まず τ の minimal set L に M_τ^* 不変な（エルゴード的）確率測度 $\mu_{L,\tau}$ がただ一つ存在し、それよりある $\chi \in [-\infty,\infty)$ で任意の $z \in L$ と $(\otimes_{n=1}^{\infty}\tau)$-*a.e.* $(\gamma_1,\gamma_2,\ldots,) \in (\mathrm{Rat})^{\mathbb{N}}$ について $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\|D(\gamma_n\circ\cdots\circ\gamma_1)_z\| = \chi$ なるものが存在することがわかり、その χ を $\chi(L,\tau)$ と書いている。ただし上で $\|\cdot\|$ とは球面計量に関する微分のノルムを表す。

   (b) もし $\chi(L,\tau) > 0$ ならば, 任意の $z \in L$ と任意の $h \in \mathrm{supp}\,\tau$ に対し、$Dh_z \neq 0$ となる。

以上の仮定のとき、$\hat{\mathbb{C}}$ のある部分集合 Ω_τ で $\sharp(\hat{\mathbb{C}}\setminus\Omega_\tau) \leq \aleph_0$ なるもの (τ が *mean stable* ならば $\Omega_\tau = \hat{\mathbb{C}}$ とできる) と、ある定数 c_τ で $c_\tau < 0$ なるものが存在して、以下を満たす。

- 任意の $z \in \Omega_\tau$ に対して, $(\mathrm{Rat})^{\mathbb{N}}$ のあるボレル部分集合 $B_{\tau,z}$ で $(\otimes_{n=1}^{\infty}\tau)(B_{\tau,z}) = 1$ なるものが存在して、任意の $(\gamma_1,\gamma_2\ldots,) \in B_{\tau,z}$ に対し、 以下が成り立つ。

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\|D(\gamma_n\circ\cdots\gamma_1)_z\| \leq c_\tau < 0.$$

  さらに $z,(\gamma_1,\gamma_2,\ldots)$ に依存したある $r > 0$ が存在して $\mathrm{diam}(\gamma_n\cdots\gamma_1(B(z,r))) \to 0$ (*as* $n\to\infty$) となりこれは指数関数的に速い収束となる。

注意 5. **定理 4 の主張は次数 2 以上の** $f \in \mathbf{Rat}$ **による決定論的複素力学系では決して成り立たない。**実際、Mañé ([20]) によると、$Q = \{z \in \hat{\mathbb{C}} \mid \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\|D(f^n)_z\| > 0\}$ のハウスドルフ次元は正であり、特に Q は非可算集合である。また、f のジュリア集合 $J(f)$(これは非可算集合) の任意の点 z と任意の $r > 0$ に対して、ある $N \in \mathbb{N}$ が存在して $n \geq N$ ならば $f^n(B(z,r)) \supset J(f)$ となって $\mathrm{diam} f^n(B(z,r)) \geq \mathrm{diam} J(f) > 0$ となる ([2, 26])。**定理 2,4 はランダム複素力学系におけるランダム性誘起秩序の現象を表す。**

以下で $\tau \in \mathfrak{M}_{1,c}(\mathrm{Rat})$ が weakly mean stable になるための十分条件についての結果 (定理 6,7) を述べる。

定理 6 (S, [51])**.** Y を次の (1)–(4) のいずれかとする。

(1) $\mathcal{P} := \{f \in \mathrm{Rat} \mid f \text{は多項式写像で}\deg(f) \geq 2\}$.

(2) $\{\lambda z(1-z) \in \mathrm{Rat} \mid \lambda \in \mathbb{C}\setminus\{0\}\}$.

(3) $\{z-\lambda\frac{f(z)}{f'(z)}\in \mathrm{Rat}\mid \lambda\in\mathbb{C}, |\lambda-1|<1\}$ ただし f は次数 2 以上の多項式とする。**注意:** この Y についての $\tau\in\mathfrak{M}_{1,c}(Y)$ によるランダム力学系は "f に対する**ランダム緩和ニュートン法**" と呼ばれ、それにより f **の根が決定論的ニュートン法より見つけやすくなる** (S, [51])。

(4) $\{z+\lambda f(z)\in \mathrm{Rat}\mid \lambda\in\mathbb{C}\setminus\{0\}\}$ ただし f は次数 2 以上の多項式で、$f(z_0)=0$ なる任意の $z_0\in\mathbb{C}$ に対し $f'(z_0)\neq 0$ とする。**注意:** この Y についての $\tau\in\mathfrak{M}_{1,c}(Y)$ によるランダム力学系は複素微分方程式 $\frac{dw}{dz}=f(w)$ の "ランダム離散化" である。

このとき、$\mathfrak{M}_{1,c}(Y)$ のある**開かつ稠密な部分集合** A が存在して、任意の $\tau\in A$ は *weakly mean stable* であり定理 2 , 4 の仮定を満たす (よって τ に対し定理 2,4 の主張が成立)。(1) のときは「任意の $\tau\in A$ は *mean stable*」とできる。ここで、$\mathfrak{M}_{1,c}(Y)$ には、次のような位相を入れる: $\mathfrak{M}_{1,c}(Y)$ の列 $\{\tau_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ が元 $\tau\in\mathfrak{M}_{1,c}(Y)$ に収束するのは、次と同値。

(a) 任意の有界連続関数 $\varphi: Y\to\mathbb{R}$ に対し $\int_Y\varphi\, d\tau_n\to\int_Y\varphi\, d\tau\ (n\to\infty)$ となりかつ

(b) Y 上の空でないコンパクト部分集合全体の上の**ハウスドルフ距離**に関し、$\operatorname{supp}\tau_n\to\operatorname{supp}\tau$ *as* $n\to\infty$ となる。

定理 7 (S, [51])**.** (**ランダム緩和ニュートン法**)
f を多項式関数とし $\deg(f)\geq 2$ とする。また $1/2<r<1$ とする。 τ を

$$Y_r := \{z-\lambda\frac{f(z)}{f'(z)}\in \mathrm{Rat}\mid \lambda\in\mathbb{C}, |\lambda-1|\leq r\}\cong\{\lambda\in\mathbb{C}\mid |\lambda-1|\leq r\}$$

上の正規化された 2 次元ルベーグ測度とする。このとき、τ は *weakly mean stable* でありかつ定理 2 , 4 の仮定を満たす。また任意の $z_0\in\mathbb{C}\setminus\{z\in\mathbb{C}\mid f'(z)=0\}$ に対し、$(Y_r)^{\mathbb{N}}$ のあるボレル部分集合 B_{z_0} で $(\otimes_{n=1}^{\infty}\tau)(B_{z_0})=1$ なるものが存在して、以下を満たす。

- 任意の $\gamma=(\gamma_1,\gamma_2,\ldots)\in B_{z_0}$ に対し、ある $x=x(z_0,\gamma)$ で $f(x)=0$ なるものが存在して、$\gamma_n\circ\cdots\circ\gamma_1(z_0)\to x$ *as* $n\to\infty$ （指数関数的に速い収束）となる。

注意 8. 定理 7 の主張は決定論的ニュートン法（とその類似）では決して成り立たない。実際、決定論的なニュートン法については、任意の $k\in\mathbb{N}, k\geq 3$ について、k 次多項式関数の空間の空でない開集合 U と、$\mathbb{C}$ の空でない開集合 V が存在して、任意の $f\in U$ と任意の $a\in V$ に対し、f のニュートン法写像 $N_f(z)=z-\frac{f(z)}{f'(z)}$ の反復合成による a の軌道 $\{N_f^n(a)\}_{n=1}^{\infty}$ は f のどの根にも収束しない (M. Hurley, [15])。また C. T. McMullen([24], Ann. of Math. 1987) によれば、次数 4 以上の多項式関数 f らについては、f の根を見つけるための**どのような決定論的複素力学系的アルゴリズムを考えても、定理 4 の後半のような主張は成り立たない。**

2. 主結果の証明の概略

<u>**定理 2, 4 の証明のアイデア**</u>(以下の議論は $\mathbb{R}$ 内の有界閉区間や S^1 などの上のランダム力学系などでもうまくいくと思われる)：

(1) weakly mean stable な $\tau\in\mathfrak{M}_{1,c}(\mathrm{Rat})$ に対し weak mean stability の定義 1(6) にあるような $n\in\mathbb{N}, \{U_j\}_j, K, D_\tau=\bigcap_{h\in G_\tau}h^{-1}(\hat{\mathbb{C}}\setminus\cup_j U_j)$ をとる。

(2) $\mathrm{supp}\,\tau$ の n 個の元の合成で表される全ての元 h は $\cup_j U_j$ をそのコンパクト部分集合 K に写し、かつそのような h らは各 U_j で一様に縮小的なので、$\cup_j U_j$ においては良い状況がいろいろとある。たとえば、τ の minimal set で $\cup_j U_j$ と交わるものは有限個しかなく、それらは "attracting" である。

(3) 各 $y \in \hat{\mathbb{C}}$ に対し、
$A_{y,1} := \{(\gamma_1, \gamma_2, \ldots,) \in (\mathrm{supp}\,\tau)^{\mathbb{N}} \mid \exists n \in \mathbb{N} \text{ s.t.} \gamma_n \circ \cdots \circ \gamma_1(y) \in \cup_j U_j\}$ とおき
$A_{y,2} := (\mathrm{supp}\,\tau)^{\mathbb{N}} \setminus A_{y,1}$ とおく。

$A_{y,1}$ の各元については、いい状況 ((2) 参照) がある。
$A_{y,2}$ については、以下を示す (純粋に測度論的議論である）:

$(\otimes_{n=1}^{\infty}\tau)$-a.e. $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots,) \in A_{y,2}$ について、$d(\gamma_n \circ \cdots \circ \gamma_1(y), D_\tau) \to 0$ as $n \to \infty$.

定理 **6,7** の証明のアイデア**(以下の議論は実ランダム力学系では通用しない):**

(1) 複素解析を用いる。 モンテルの定理 (領域 U 上の一様有界な正則関数族は U で同程度連続)、双曲距離、などを用いる。

(2) **minimal set の分類を行い、minimal set のシステムの摂動に関する分岐を**解析する。 このとき、ジーゲル円板（回転的領域）にノイズを加えたときの解析などを行う。これらを用いると、 与えられたもともとの $\tau \in \mathfrak{M}_{1,c}(Y)$ を、その台を少しふくらませるように変更すれば、ある例外的有限集合 S_τ に交わらないような non-attracting な minimal set たちを全て壊すことができると示せる。そのほか、全ての $z \in \hat{\mathbb{C}} \setminus S_\tau$ に対してある $h_z \in G_\tau$ が存在して $h_z(z) \in \cup_j U_j$ となることをいうのにかなり込み入った議論が必要である。

(3) 定理 7 の証明に関して。まず a が $\mathbb{C}$ の点のとき、$f(a) = 0$ であることと a が f のニュートン法写像 $N_{f,1}(z) = z - \frac{f(z)}{f'(z)}$ の固定点であることが同値であることに注意。また、$\mathrm{supp}\,\tau$ の任意の元 $N_{f,\lambda}(z) = z - \lambda\frac{f(z)}{f'(z)}$ について、$a \in \mathbb{C}, f(a) = 0$ ならば a は $N_{f,\lambda}$ の吸引的固定点である。あるテクニカルな議論を用いると, $N_{f,1}$ **の周期** 2 **以上の吸引的周期サイクルを含むような** τ **の minimal set は存在しない**ことを示すことができて、これが鍵となる。なお $D_\tau \neq \emptyset$ $(\infty \in D_\tau)$ なので難しい。

3. 主結果に対する注意

(1) まず、$\tau \in \mathfrak{M}_{1,c}(\mathrm{Rat})$ で $\mathrm{supp}\,\tau$ の任意の元は次数 2 以上となるものを任意に取るとき、任意の $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots) \in (\mathrm{supp}\,\tau)^{\mathbb{N}}$ について、そのジュリア集合

$$J_\gamma := \{z \in \hat{\mathbb{C}} \mid z \text{ のどんな近傍でも写像族} \{\gamma_n \circ \cdots \circ \gamma_1\}_{n=1}^{\infty} \text{ は同程度連続でない}\}$$

はそのハウスドルフが正で、よって非可算となっていること ([40]) に注意しておく。つまり、各 γ ごとにはカオス性を示す部分は少なからず存在する。本講演における主結果は上記のことがらがありながら、直積空間 $(\mathrm{supp}\,\tau)^{\mathbb{N}} \times \hat{\mathbb{C}}$ において、集合 $J := \bigcup_{\gamma \in (\mathrm{supp}\,\tau)^{\mathbb{N}}}(\{\gamma\} \times J_\gamma)$ を考えると、高々可算個の点を除いて全ての $z \in \hat{\mathbb{C}}$ について z 切片 $\pi_{\hat{\mathbb{C}}}^{-1}(z) \cap J$ (ただし $\pi_{\hat{\mathbb{C}}} : (\mathrm{supp}\,\tau)^{\mathbb{N}} \times \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ は $\hat{\mathbb{C}}$ への射影) の $(\otimes_{n=1}^{\infty}\tau)$ に関する測度が 0 であることを示している。つまり、各 γ ごとにカオス性を示す集合（ジュリア集合 J_γ) はあるのだが、それらの重なり具合が弱い、あまり重なっていない、ということ

を意味している。なお、上記のように、ランダム力学系においては、各列ごとに (見本路ごとに）それを固定して調べるという視点と、各初期点を固定して列をいろいろ走らせて観察する、という二つの視点があるのであり、後者の視点を「**平均化システムの視点**」と呼んでおくと、本講演の結果は、「**定理 6 にあるような Y について大概の $\tau \in \mathfrak{M}_{1,c}(Y)$ によるランダム力学系では、平均化システムの観点において決定論的複素力学系と比べて著しくカオス性が軽減し秩序性が増す**」ということである。もちろん、各列 γ ごとの力学系の複雑さ（カオス性）を調べる、という研究立場は存在する。

(2) 上記で出てきた直積空間 $(\operatorname{supp}\tau)^{\mathbb{N}} \times \hat{\mathbb{C}}$ において写像 $\tilde{f} : (\operatorname{supp}\tau)^{\mathbb{N}} \times \hat{\mathbb{C}} \to (\operatorname{supp}\tau)^{\mathbb{N}} \times \hat{\mathbb{C}}$ を、$\tilde{f}(\gamma, z) = (\sigma(\gamma), \gamma_1(z))$ ただし $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots) \in (\operatorname{supp}\tau)^{\mathbb{N}}$, $\sigma(\gamma) = (\gamma_2, \gamma_3, \ldots) \in (\operatorname{supp}\tau)^{\mathbb{N}}$, とおいて、これを **$\tau$ に付随する歪積写像**、とよぶ。$\tilde{f}$ の力学系を考えると、τ によるランダム力学系の様子がよくわかる。

(3) 主結果によって、大概のランダム複素多項式力学系では (平均化システムの観点からみて）通常の有理写像力学系と比べて著しくカオス性が軽減する、ということがわかったわけだが、**ランダム複素多項式力学系に複雑さが全くないのかというと、実はそうではない**。定理 6 において大概の $\tau \in \mathfrak{M}_{1,c}(\mathcal{P})$ は mean stable で定理 4 の Ω_τ が $\hat{\mathbb{C}}$ 全体で取れるが、そのようなとき系の推移作用素 $M_\tau : C(\hat{\mathbb{C}}) \to C(\hat{\mathbb{C}})$, ただし $C(\hat{\mathbb{C}})$ は $\hat{\mathbb{C}}$ 上の連続関数全体からなる sup ノルムつきの Banach 空間、を $M_\tau(\varphi)(z) := \int_{\mathcal{P}} \varphi(g(z))d\tau(g),\ \ \varphi \in C(\hat{\mathbb{C}}),\ z \in \hat{\mathbb{C}}$ で定義すると $\{M_\tau^n\}_{n=1}^\infty$ は $C(\hat{\mathbb{C}})$ に穏やかに作用する（たとえば任意の $\varphi \in C(\hat{\mathbb{C}})$ に対して $\{M_\tau^n(\varphi)\}_{n=1}^\infty$ は $C(\hat{\mathbb{C}})$ において相対コンパクトである）が、$\hat{\mathbb{C}}$ 上の C^1 級関数全体で C^1 ノルムを入れた Banach 空間 $C^1(\hat{\mathbb{C}})$ には $\{M_\tau^n\}_{n=1}^\infty$ は穏やかに作用しないことがありえる。実際、ある 2 つの 4 次多項式 f_1, f_2 によるランダム力学系において、極限状態に現れる関数である「$\infty \in \hat{\mathbb{C}}$ に収束する確率の関数 $T_\infty : \hat{\mathbb{C}} \to [0,1]$」は、$\hat{\mathbb{C}}$ 上で連続で、f_1, f_2 で生成された多項式半群のジュリア集合という 2 次元ルベーグ測度 0 のフラクタル集合のところだけで変化する、という性質を持つ。T_∞ は C^1 級でないので、$C^1(\hat{\mathbb{C}})$ への $\{M_\tau^n\}_{n=1}^\infty$ の作用は穏やかでない。T_∞ は悪魔の階段の複素平面上版とみなせて、**悪魔のコロシアム**と呼ばれる。これらについては [47, 48, 49, 50] を参照。

詳しく述べると、$0 < \alpha < 1$ に対して、$\hat{\mathbb{C}}$ 上の α-ヘルダー連続関数全体のなす空間 $C^\alpha(\hat{\mathbb{C}})$ に α-ヘルダーノルム $\|\varphi\| := \sup|\varphi(z)| + \sup_{y,z\in\hat{\mathbb{C}}, y\neq z} \frac{|\varphi(y)-\varphi(z)|}{d(y,z)^\alpha}$ を入れて Banach 空間と思うとき、ある閾値 $\alpha_0 \in (0,1)$ が存在して、任意の $\alpha \in (0, \alpha_0)$ について、$\{M_\tau^n\}_{n=1}^\infty$ は $C^\alpha(\hat{\mathbb{C}})$ の上に穏やかに作用するが、任意の $\alpha \in (\alpha_0, 1)$ について、$\{M_\tau^n\}_{n=1}^\infty$ は $C^\alpha(\hat{\mathbb{C}})$ の上に穏やかに作用しない。このように、ランダム系は、たとえ穏やかに見えても、見る関数空間を変えると複雑さが残る。よって、ランダム力学系では、**カオスと秩序の間のグラデーション**がある。そのグラデーションの具合を見る数値の一つとして上記の α_0 があげられる。上記は講演者が得た、ランダム力学系独自の新しい視点であり、その方面で様々な研究を行っている ([47, 48, 16, 18, 49, 50] など)。

(4) $\mathbb{R}$ 上の実多項式ランダム力学系では、ランダム性によりカオス性が増す現象も多く数値実験で観察されている（佐藤譲氏）。講演者はその現象の解析について、初期値空間を $\hat{\mathbb{C}}$ に拡張してランダム複素力学系の手法を取ることが有効であると考えている。

(5) 渡邉天鵬氏（阪大）と講演者は独立同分布とは限らない**マルコフ的ランダム複素力学系**でランダム性誘起現象を多数発見している ([55])。

4. ランダム・非自励系複素力学系における他のランダム性誘起現象

有理半群Gについて、$P(G) := \overline{\cup_{h\in G}\{h : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}} \text{ の臨界値}\}}$とおく。ただし閉包は$\hat{\mathbb{C}}$で取る。また、$F(G) := \{z \in \hat{\mathbb{C}} \mid z \text{ のある近傍で} G \text{ は同程度連続}\}$とおいて、$G$の**ファトウ集合**という。$J(G) := \hat{\mathbb{C}} \setminus F(G)$とおいて、$G$の**ジュリア集合**という。有理半群$G$について、$P(G) \subset F(G)$ のとき、Gは**双曲的**という。$f \in \mathcal{P}$による決定論的多項式力学系について次が知られている ([8]): 「$f \in \mathcal{P}$とし、$A_f := \{z \in \hat{\mathbb{C}} \mid f^n(z) \to \infty (n \to \infty)\}$とおく。$A_f$が**John**領域でかつ$J(f)$がジョルダン閉曲線ならば、$J(f)$は擬円となる。」しかし**ランダム多項式力学系では上記が成り立たない場合がとても多くある** (S, [46])。

次に、次数2以上の一つの有理写像fが双曲的 (つまり$\{f^n \mid n \in \mathbb{N}\}$が双曲的) のときには、$f$のジュリア集合$J(f)$のハウスドルフ次元を$\delta$とするとき、$\delta$次元ハウスドルフ測度$H^\delta$について、$0 < H^\delta(J(f)) < \infty$となる ([30])。しかし、Mayer, Skorulski, Urbański は、「大概の双曲的独立同分布ランダム多項式力学系（系の各写像は次数2以上）においては、ほとんどすべての多項式列$\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots)$に対して、そのジュリア集合$J_\gamma$のハウスドルフ次元を$\delta$とすると$H^\delta(J_\gamma) = 0$となる。」 ([22]) という驚くべき事実を示した。また、次数2以上の双曲的有理写像fについて、$J(f)$のハウスドルフ次元とパッキング次元は一致する ([30])。しかし、双曲的非自励系多項式力学系では、上記が成り立たない多くの例があることを、Mayer, Skorulski, Urbański が示した ([23])。

上記のように、**ランダム複素力学系や非自励系複素力学系では、たとえ双曲性を仮定しても、決定論的自励系複素力学系では起こりえない新しい現象が非常に豊富にある**。さらに、決定論的多項式力学系では、次の予想「$f \in \mathcal{P}$のジュリア集合の上の非自明な不変 line field は存在しない。」([25]) が知られている（**注意**：この予想が正しいと「双曲的な多項式$f \in \mathcal{P}$の集合は$\mathcal{P}$において開かつ稠密」という大予想が正しい）。その一方で、Comerford が**上記の予想の非自励系版が成り立たない**ことを示し、ジュリア集合上で力学系の変形ができることを示した ([9])。

参考文献

[1] L. Arnold, *Random Dynamical Systems*, Springer Monographs in Mathematics, Springer. 1998.

[2] A. Beardon, *Iteration of Rational Functions*, Graduate Texts in Mathematics 132, Springer-Verlag, 1991.

[3] R. Brück, *Connectedness and stability of Julia sets of the composition of polynomials of the form* $z^2 + c_n$, J. London Math. Soc. **61** (2000), 462-470.

[4] R. Brück, *Geometric properties of Julia sets of the composition of polynomials of the form* $z^2 + c_n$, Pacific J. Math., **198** (2001), no. 2, 347–372.

[5] R. Brück, M. Büger and S. Reitz, *Random iterations of polynomials of the form* $z^2 + c_n$*: Connectedness of Julia sets*, Ergodic Theory Dynam. Systems, **19**, (1999), 1221–1231.

[6] M. Büger, *Self-similarity of Julia sets of the composition of polynomials*, Ergodic Theory Dynam. Systems, **17** (1997), 1289–1297.

[7] M. Büger, *On the composition of polynomials of the form* $z^2 + c_n$, Math. Ann. 310 (1998), no. 4, 661–683.

[8] L. Carleson, P. W. Jones and J.-C. Yoccoz. *Julia and John*, Bol. Soc. Brasil. Mat. (N.S.) 25(1) (1994), 130.

[9] M. Comerford, *Non-autonomous Julia sets with measurable invariant sequences of line fields*, Discrete Contin. Dyn. Syst. 33 (2013), no. 2, 629–642.

[10] R. Devaney, *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems, Second edition*, Addison-Wesley Studies in Nonlinearity. Addison-Wesley Publishing Company, 1989.

[11] J. E. Fornaess and N. Sibony, *Random iterations of rational functions*, Ergodic Theory Dynam. Systems, **11**(1991), 687–708.

[12] Z. Gong, W. Qiu and Y. Li, *Connectedness of Julia sets for a quadratic random dynamical system*, Ergodic Theory Dynam. Systems, (2003), **23**, 1807-1815.

[13] Z. Gong and F. Ren, *A random dynamical system formed by infinitely many functions,* Journal of Fudan University, **35**, 1996, 387–392.

[14] A. Hinkkanen and G. J. Martin, *The Dynamics of Semigroups of Rational Functions I*, Proc. London Math. Soc. (3)**73**(1996), 358-384.

[15] M. Hurley, *Multiple attractors in Newton's method*, Ergodic Theory Dynam. Systems **6** (1986), 561-569.

[16] J. Jaerisch and H. Sumi, *Multifractal formalism for expanding rational semigroups and random complex dynamical systems*, Nonlinearity 28 (2015) 2913-2938.

[17] J. Jaerisch and H. Sumi, *Dynamics of infinitely generated nicely expanding rational semigroups and the inducing method*, Trans. Amer. Math. Soc., 369 (2017), 6147-6187.

[18] J. Jaerisch and H. Sumi, *Pointwise Hölder exponents of the complex analogues of the Takagi function in random complex dynamics*, Adv. Math. 313 (2017) 839–874.

[19] K. Katagata, *On a certain kind of polynomials of degree 4 with disconnected Julia set*, Discrete Contin. Dyn. Syst. 20 (2008), no. 4, 975–987.

[20] R. Mañé, *The Hausdorff dimension of invariant probabilities of rational maps*, Dynamical Systems (Valparaiso, 1986), Lecture Notes in Math. 1331, Berlin Springer, 86-117, 1988.

[21] K. Matsumoto and I. Tsuda, *Noise-induced order*, J. Statist. Phys. 31 (1983) 87-106.

[22] V. Mayer, B. Skorulski, M. Urbański, *Distance expanding random mappings, thermodynamical formalism, Gibbs measures and fractal geometry*, Lecture Notes in Mathematics, 2036. Springer, Heidelberg, 2011.

[23] V. Mayer, B. Skorulski, M. Urbański, *Regularity and irregularity of fiber dimensions of non-autonomous dynamical systems.* Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. 38 (2013), 489–514.

[24] C.T. McMullen, *Families of rational maps and iterative root-finding algorithms*, Ann. of Math., **125** (1987), 467-493.

[25] C. T. McMullen, *Complex Dynamics and Renormalization*, Annals of Mathematics Studies No. 135, Princeton University Press, 1994.

[26] J. Milnor, *Dynamics in One Complex Variable, Third Edition*, Annals of Mathematics Studies No. 160, Princeton University Press, 2006.

[27] T. Morita, *Deterministic version lemmas in ergodic theory of random dynamical systems*, Hiroshima Math. J. **18** (1988), 15-29.

[28] G. Nakamura, T. Nakanishi, タイヒミュラー空間のトレース関数による座標系と写像類群、日本数学会 2015 年度秋季総合分科会関数論分科会アブストラクト

[29] G. Nakamura, T. Nakanishi, *Parametrization of some Teichmüller space by trace functions*, Conformal Geometry and Dynamics, **17** (2013), 47-57.

[30] F. Przytycki and M. Urbański, Conformal Fractals: Ergodic Theory Methods, London Mathematical Society Lecture Note Series 371, Cambridge University Press, 2010.

[31] Y. Sato, *Noise-induced phenomena in one-dimensional maps*, RIMS Technical Report, No. 1688, p137, Kyoto University, (2010).

[32] 佐藤譲、「ランダム力学系と確率カオス」、 数理科学 2015 年 8 月号、特集「力学系的思考法のすすめ」

[33] R. Stankewitz, *Density of repelling fixed points in the Julia set of a rational or entire semigroup, II.* Discrete Contin. Dyn. Syst. 32 (2012), no. 7, 2583-2589.

[34] R. Stankewitz an H. Sumi, *Dynamical properties and structure of Julia sets of postcritically bounded polynomial semigroups*, Trans. Amer. Math. Soc., 363 (2011), 5293–5319.

[35] R. Stankewitz and H. Sumi, *Random Backward Iteration Algorithm for Julia sets of Rational Semigroups*, Discrete and Continuous Dynamical Systems Ser. A, 35 (2015), 2165–2175.

[36] H. Sumi, *On dynamics of hyperbolic rational semigroups*, J. Math. Kyoto. Univ. Vol. 37, No. 4, (1997), 717-733.

[37] H. Sumi, *On Hausdorff dimension of Julia sets of hyperbolic rational semigroups*, Kodai. Math. J., Vol.21,No.1,(1998),10-28.

[38] H. Sumi: Skew product maps related to finitely generated rational semigroups, Nonlinearity, 13 (2000), 995-1019.

[39] H. Sumi, *Dynamics of sub-hyperbolic and semi-hyperbolic rational semigroups and skew products*, Ergodic Theory Dynam. Systems, **21** (2001), 563-603.

[40] H. Sumi, *Semi-hyperbolic fibeblack rational maps and rational semigroups*, Ergodic Theory Dynam. Systems, (2006) **26**, 893-922.

[41] H. Sumi, *Interaction cohomology of forward or backward self-similar systems*, Adv. Math., 222 (2009), no. 3, 729–781.

[42] 角大輝, 「有理半群, ランダムな複素力学系と複素平面上の特異関数」, 雑誌「数学」第61巻第2号2009年4月春季号論説 p133-161.

[43] H. Sumi, *Rational semigroups, random complex dynamics and singular functions on the complex plane*, survey article, Selected Papers on Analysis and Differential Equations, Amer. Math. Soc. Transl. (2) Vol. 230, 2010, 161–200. ([42] の英訳、追加内容あり）

[44] H. Sumi, *Dynamics of postcritically bounded polynomial semigroups I: connected components of the Julia sets*, Discrete and Continuous Dynamical Systems, **29**, 2011, 1205–1244.

[45] H. Sumi, *Dynamics of postcritically bounded polynomial semigroups II: fiberwise dynamics and the Julia sets*, J. London Math. Soc. (2) 88 (2013) 294–318.

[46] H. Sumi, *Dynamics of postcritically bounded polynomial semigroups III: classification of semi-hyperbolic semigroups and random Julia sets which are Jordan curves but not quasicircles*, Ergodic Theory Dynam. Systems, (2010), **30**, No. 6, 1869–1902.

[47] H. Sumi, *Random complex dynamics and semigroups of holomorphic maps*, Proc. London Math. Soc. (2011) 102(1), pp 50–112.

[48] H. Sumi, *Cooperation principle, stability and bifurcation in random complex dynamics*, Adv. Math., 245 (2013) pp 137–181.

[49] H. Sumi, *Random complex dynamics and devil's coliseums*, Nonlinearity 28 (2015) 1135-1161.

[50] H. Sumi, *The space of* 2- *generator postcritically bounded polynomial semigroups and random complex dynamics*, Adv. Math., 290 (2016) 809–859.

[51] H. Sumi, *Negativity of Lyapunov Exponents and Convergence of Generic Random Polynomial Dynamical Systems and Random Relaxed Newton's Methods*, preprint, 61 pages, https://arxiv.org/abs/1608.05230. （この論文は本講演の内容を多く含みます。）

[52] H. Sumi and M. Urbański, *Real analyticity of Hausdorff dimension for expanding rational semigroups*, Ergodic Theory Dynam. Systems (2010) **30**, 601-633.

[53] H. Sumi and M. Urbański, *Measures and dimensions of Julia sets of semi-hyperbolic rational semigroups*, Discrete and Continuous Dynamical Systems **30**, 2011, 313-369.

[54] H. Sumi and M. Urbański, *Transversality family of expanding rational semigroups*, Adv. Math., 234 (2013) 697–734.

[55] 渡邊天鵬、「マルコフシステムの力学系におけるジュリア集合とその特徴付け」2017年度大阪大学大学院理学研究科数学専攻修士論文