

2017 年度第 16 回解析学賞受賞特別講演

楕円函数やパルヴェ特殊函数の インスタントン展開をめぐって — パルヴェ方程式の完全 WKB 解析最終章 —

竹井 義次 (同志社大学理工学部)*

1. Introduction — Painlevé 方程式の完全 WKB 解析概観

大きなパラメータ $\eta > 0$ を含む 1 次元 Schrödinger 方程式

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} - \eta^2 Q(x) \right) \psi = 0 \quad (1)$$

の形式解である WKB 解

$$\psi_{\pm}(x, \eta) = e^{\pm \eta s(x)} \sum_{n=0}^{\infty} \psi_{\pm, n}(x) \eta^{-(n+1/2)} \quad \left(\text{ただし } s(x) = \int^x \sqrt{Q(x)} dx \right) \quad (2)$$

に, Borel 総和法 (cf. [4], [6]) により解析的な意味づけを与えるのが完全 WKB 解析である. 完全 WKB 解析では, 形式級数 (2) の代わりにその Borel 変換

$$\psi_{\pm, B}(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\psi_{\pm, n}(x)}{\Gamma(n+1/2)} (y \pm s(x))^{n-1/2} \quad (3)$$

を考え, Borel 変換の Laplace 積分として定義される Borel 和

$$\Psi_{\pm}(x, \eta) = \int_{\mp s(x)}^{\infty} e^{-y\eta} \psi_{\pm, B}(x, y) dy \quad (4)$$

を (2) の解析的な実現とみなす. 従って, 完全 WKB 解析の主役は WKB 解の Borel 変換 (3) である. 実際, 完全 WKB 解析を用いることにより Schrödinger 方程式 (1) の解の大域解析が可能となるが, そこで重要な役割を果たす Stokes 曲線 (x 平面内の実 1 次元曲線) と接続公式 (Stokes 曲線上で起こる Stokes 現象を記述する公式) は, いずれも WKB 解の Borel 変換の特異点構造に基づいて決定される (cf. [16]).

河合・青木両氏との共著論文 [14], [3], [15], 及びそれに引き続く [23] は, この完全 WKB 解析を Painlevé 方程式に拡張しようとしたものである. Painlevé 方程式 (P_J) ($J = \text{I}, \dots, \text{VI}$) とは,

$$(P_{\text{I}}) : \quad \frac{d^2 \lambda}{dt^2} = \eta^2 (6\lambda^2 + t), \quad (P_{\text{II}}) : \quad \frac{d^2 \lambda}{dt^2} = \eta^2 (2\lambda^3 + t\lambda + c)$$

本研究は科研費基盤研究 (B) 「可積分系の漸近解の構造と WKB 解析」 (課題番号: 26287015) の助成を受けたものである.

2010 Mathematics Subject Classification: 34M60, 34E20, 34M25, 34M55, 33E05

キーワード: Painlevé 方程式, 楕円函数, 完全 WKB 解析, インスタントン展開, Birkhoff 標準形

* 〒610-0394 京都府京田辺市多々羅都谷 1-3 同志社大学理工学部

e-mail: ytakei@mail.doshisha.ac.jp

(完全 WKB 解析を考えるためにここでは大きなパラメータ $\eta > 0$ を含んだ形の方程式を扱う)をはじめとする(通常は)6つのクラスに分類される2階の非線型常微分方程式であり, Painlevé 性や Weyl 群対称性, さらにモノドロミー保存変形との関連といった多くの良い性質を持っている (cf. [20]). Painlevé 方程式 (P_J) に対しては, (1) の WKB 解 (2) に相当するものとして,

$$\lambda_J^{(0)}(t, \eta) = \lambda_0(t) + \eta^{-2}\lambda_2(t) + \eta^{-4}\lambda_4(t) + \cdots \quad (5)$$

という η^{-1} の形式巾級数解 (“零パラメータ解”), 及び2個の任意パラメータ α, β を含んだ “インスタントン解” と呼ばれる次の形の形式解が存在する.

$$\lambda_J(t, \eta; \alpha, \beta) = \lambda_0(t) + \eta^{-1/2}\mu_J(t) \left[\alpha (\eta^2\theta_J(t))^{\alpha\beta} e^{\eta\phi_J(t)} + \beta (\eta^2\theta_J(t))^{-\alpha\beta} e^{-\eta\phi_J(t)} \right] + \cdots \quad (6)$$

ここで, $\lambda_0(t)$ はある代数方程式 $F_J(\lambda_0(t), t) = 0$ (例えば, (P_I) の場合は $F_I = 6\lambda_0^2 + t$, (P_{II}) の場合は $F_{II} = 2\lambda_0^3 + t\lambda_0 + c$) の根として定まり, $\phi_J(t)$ は

$$\phi_J(t) = \int^t \sqrt{\frac{\partial F_J}{\partial \lambda}(\lambda_0(s), s)} ds \quad (7)$$

で与えられ, さらに $\theta_J(t)$ と $\mu_J(t)$ は (方程式から定まる) t の適当な函数 (詳しくは [15] を参照) である. 上記の一連の論文では, こうした Painlevé 方程式の形式解に対して変わり点や Stokes 曲線を定義し, さらに変わり点のまわりでの変換論や Stokes 曲線上での接続公式を, モノドロミー保存変形を援用して論じた. さらに, (上記の論文の中では前提条件として仮定していた) 零パラメータ解の Borel 総和可能性も, 神本 ([13], [12]) 達によって次第に証明されつつある. また, 離散 Painlevé 方程式の完全 WKB 解析についても, Joshi との共同研究により最近一つの進展があった ([11]).

ところが, Painlevé 方程式 (P_J) の完全 WKB 解析には, まだ一つ大きな問題が残っている. 零パラメータ解 (5) の Borel 変換 $\lambda_{J,B}^{(0)}(t, y)$ は

$$y = n\phi_J(t) = n \int^t \sqrt{\frac{\partial F_J}{\partial \lambda}(\lambda_0(s), s)} ds \quad (n = \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (8)$$

に特異点を持ち (cf. [7]), (P_J) の Stokes 曲線もこの事実に基づいて定義される. その結果, t 平面で零パラメータ解 (正確には, その Borel 和) の解析接続を考える際, (やや不正確な言い方だが) Stokes 曲線を2本横切ると零パラメータ解は $e^{n\eta\phi_J(t)}$ ($n = \pm 1, \pm 2, \dots$) をすべて拾い込んでインスタントン解 (6) に移行する. (実際, インスタントン解は零パラメータ解の解析接続を記述するために導入された.) 従って, インスタントン解は必然的にすべての “インスタントン項” $e^{n\eta\phi_J(t)}$ を含まざるを得ない. しかし, $\eta\phi_J(t)$ が純虚数でない限り, $e^{+\eta\phi_J(t)}$, $e^{-\eta\phi_J(t)}$ のいずれかは ($\eta \rightarrow \infty$ のとき) 指数的に増大する項となって, インスタントン解は新たな発散の困難を抱えることになる. この種の困難は [8] でも指摘されているが, この発散の困難は Borel 総和法では対処できない本質的なものである.

本講演の目的は, このインスタントン解の持つ発散の困難への一つの対処法を提案することである. アイデアは単純で, 楕円函数, 特に Weierstrass の $\mathcal{P}$ 函数 $\lambda(t) = \mathcal{P}(\eta t)$ とそれが満たす微分方程式

$$\left(\frac{d\lambda}{dt} \right)^2 = \eta^2 (4\lambda^3 - g_2\lambda - g_3), \quad \text{及びその微分形} \quad \frac{d^2\lambda}{dt^2} = \eta^2 \left(6\lambda^2 - \frac{g_2}{2} \right) \quad (9)$$

を利用する. 次節から, この対処法についてより詳しく説明する.

2. インスタントン解の構成について

Painlevé 方程式のインスタントン解 (6) の構成については、現在 2 通りの方法が知られている。多重スケール解析を利用する方法 ([3]) と、Painlevé 方程式を Hamilton 系の形に表した上で Birkhoff 標準形への変換を利用する方法 ([22]) である。インスタントン解の意味づけを考えるにあたって、ここでは後者の方法を用いる。すなわち、楕円関数の方程式 (9) についても Birkhoff 標準形への変換を用いてインスタントン解を構成し、それと (6) の解とを比較して意味づけを行う。本節では、Painlevé 方程式の場合の説明も兼ねて、楕円関数の方程式 (9) のインスタントン解の構成を論じる。

まず、楕円関数の方程式 (9)、特にその微分形を Hamilton 系の形に表す。(以下では、簡単のため $g_2 = 12$ と仮定して議論を進める。)

$$\eta^{-1} \frac{d\lambda}{dt} = \mu = \frac{\partial h}{\partial \mu}, \quad \eta^{-1} \frac{d\mu}{dt} = 6(\lambda^2 - 1) = -\frac{\partial h}{\partial \lambda} \quad (\text{ただし } h = \frac{1}{2}\mu^2 - (2\lambda^3 - 6\lambda)). \quad (10)$$

この方程式は、零パラメータ解 $(\lambda, \mu) = (\pm 1, 0)$ を持つ。そこで、例えば $(\lambda, \mu) = (1, 0)$ という零パラメータ解を取り、次に $\lambda = 1 + \eta^{-1/2}\Lambda, \mu = \eta^{-1/2}M$ においてこの解のまわりでの局所化を考えると、 (Λ, M) に関する次の Hamilton 系を得る。

$$\eta^{-1} \frac{d\Lambda}{dt} = M = \frac{\partial H}{\partial M}, \quad \eta^{-1} \frac{dM}{dt} = 12\Lambda + 6\eta^{-1/2}\Lambda^2 = -\frac{\partial H}{\partial \Lambda}, \quad (11)$$

ただし $H = \frac{1}{2}M^2 - (6\Lambda^2 + 2\eta^{-1/2}\Lambda^3)$ 。さらに

$$\Lambda = u - v, \quad M = 2\sqrt{3}(u + v) \quad (12)$$

という 1 次変換で (11) を書き直せば次を得る。

$$\eta^{-1} \frac{du}{dt} = 2\sqrt{3}u + \frac{\sqrt{3}}{2}\eta^{-1/2}(u-v)^2 = \frac{\partial K}{\partial v}, \quad \eta^{-1} \frac{dv}{dt} = -2\sqrt{3}v + \frac{\sqrt{3}}{2}\eta^{-1/2}(u-v)^2 = -\frac{\partial K}{\partial u}, \quad (13)$$

ただし $K = 2\sqrt{3}uv - \eta^{-1/2}(u-v)^3/(2\sqrt{3})$ 。

この Hamilton 系 (13) の Birkhoff 標準形への変換を考える。すなわち、

$$\begin{cases} u = U(\tilde{u}, \tilde{v}) = \sum_{n=0}^{\infty} \eta^{-n/2} U_{n+1}, & \text{ただし } U_1 = \tilde{u}, \quad U_{n+1} = \sum_{j+k=n+1} a_{jk} \tilde{u}^j \tilde{v}^k, \\ v = V(\tilde{u}, \tilde{v}) = \sum_{n=0}^{\infty} \eta^{-n/2} V_{n+1}, & \text{ただし } V_1 = \tilde{v}, \quad V_{n+1} = \sum_{j+k=n+1} b_{jk} \tilde{u}^j \tilde{v}^k, \end{cases} \quad (14)$$

という形の未知函数の変換で、(13) を

$$\eta^{-1} \frac{d\tilde{u}}{dt} = \frac{\partial \tilde{K}}{\partial \tilde{v}}, \quad \eta^{-1} \frac{d\tilde{v}}{dt} = -\frac{\partial \tilde{K}}{\partial \tilde{u}} \quad \text{ただし } \tilde{K} = \tilde{K}(\theta) \Big|_{\theta=\tilde{u}\tilde{v}} = \sum_{n=1}^{\infty} \eta^{-(n-1)} c_n (\tilde{u}\tilde{v})^n \quad (15)$$

という、Hamiltonian $\tilde{K}$ が $\tilde{u}$ と $\tilde{v}$ の積 $\theta = \tilde{u}\tilde{v}$ のみの函数になるような形に変換することを考える。こうした変換の存在を確かめるには、変換の式 (14) を元の方程式 (13) に代入し、変換後の方程式 (15) を用いてそれを $(\tilde{u}, \tilde{v})$ の関係式として書き下した後、

その関係式から変換や変換後の Hamiltonian の係数 a_{jk}, b_{jk}, c_n が問題なく定まるかどうかを見ればよい．今の場合，こうして得られる $(\tilde{u}, \tilde{v})$ の間の関係式は，

$$\tilde{K}'(\tilde{u}\tilde{v})\Delta U = 2\sqrt{3}U + \frac{\sqrt{3}}{2}\eta^{-1/2}(U-V)^2, \quad \tilde{K}'(\tilde{u}\tilde{v})\Delta V = -2\sqrt{3}V + \frac{\sqrt{3}}{2}\eta^{-1/2}(U-V)^2 \quad (16)$$

となる．ここで， $\Delta = \tilde{u}\frac{\partial}{\partial\tilde{u}} - \tilde{v}\frac{\partial}{\partial\tilde{v}}$ とおいた．この式の両辺の $O(\eta^0)$ の項の比較から c_1 が $c_1 = 2\sqrt{3}$ と定まり，さらに $O(\eta^{-(2l-1)/2})$ ($l = 1, 2, \dots$) の項の比較から

$$2\sqrt{3}(\Delta - 1)U_{2l} = (\text{given}), \quad 2\sqrt{3}(\Delta + 1)V_{2l} = (\text{given}), \quad (17)$$

また $O(\eta^{-(2l)/2})$ ($l = 1, 2, \dots$) の項の比較から

$$\begin{aligned} 2\sqrt{3}(\Delta - 1)U_{2l+1} + (l+1)c_{l+1}(\tilde{u}\tilde{v})^l\tilde{u} &= (\text{given}), \\ 2\sqrt{3}(\Delta + 1)V_{2l+1} - (l+1)c_{l+1}(\tilde{u}\tilde{v})^l\tilde{v} &= (\text{given}) \end{aligned} \quad (18)$$

という形の等式が得られる．(ここで (given) と書いた部分は，帰納的に既に定まっている（と考えられる）項を表す．）特に，(17) から U_{2l}, V_{2l} の係数 a_{jk}, b_{jk} ($j+k=2l$) が一意に定まる．他方， $(\Delta - 1)U_{2l+1}$ では $\tilde{u}^{l+1}\tilde{v}^l$ の項が，また $(\Delta + 1)V_{2l+1}$ では $\tilde{u}^l\tilde{v}^{l+1}$ の項がそれぞれ消えるので (18) の方は少し複雑だが，Birkhoff 標準形に由来する c_{l+1} を含む項がその足りない部分を補ってくれるので，結果的には (18) が成り立つように a_{jk}, b_{jk} ($j+k=2l+1$) 及び c_{l+1} を定めることができる．(ただし一意ではない．) こうして，楕円函数の方程式 (9) と同値な Hamilton 系 (10) が Birkhoff 標準形に変換できることが分かった．

Birkhoff 標準形 (15) については，容易に $\tilde{u}\tilde{v}$ が t に依らないことが確かめられるので，

$$\eta^{-1}\frac{d\tilde{u}}{dt} = \tilde{K}'(C)\tilde{u}, \quad \eta^{-1}\frac{d\tilde{v}}{dt} = -\tilde{K}'(C)\tilde{v} \quad (\text{ただし } C = \tilde{u}\tilde{v} \text{ は } t \text{ に依らない定数}) \quad (19)$$

が成立し，従って

$$\tilde{u} = \alpha \exp(\eta\tilde{K}'(\alpha\beta)t), \quad \tilde{v} = \beta \exp(-\eta\tilde{K}'(\alpha\beta)t) \quad (\text{ただし } \alpha, \beta \text{ は任意定数}) \quad (20)$$

と具体的に解が求まる．この解 (20) を変換の式 (14) に代入すれば，楕円函数の方程式 (9) のインスタントン解が得られる．

Painlevé 方程式のインスタントン解 (6) も，方程式が t に依る項を含むので多少議論が複雑になるが，基本的には楕円函数の方程式の場合と同様に構成される．

Remark 1. インスタントン解は，高階 Painlevé 方程式に対しても，Birkhoff 標準形への変換を利用する方法 (cf. [24])，多重スケール解析を利用する方法 (cf. [2], [25]) の 2 通りの方法で構成されている．

3. インスタントン解の意味づけ

ここで，前節の議論をまとめておく．(この節では Painlevé 方程式と楕円函数の方程式の両方を同時に扱うので，両者を区別するために，楕円函数の方程式の変数 λ, μ, t 等には $\tilde{\lambda}, \tilde{\mu}, \tilde{t}$ のようにすべて $\sim$ をつけて表すことにする．)

前節で構成した楕円関数の方程式 (9) からその Birkhoff 標準形への変換を、すべての step をまとめて $(\tilde{\lambda}, \tilde{\mu}) = \tilde{\Phi}(\tilde{u}, \tilde{v})$ と表す. すなわち、未知関数の変換 $(\tilde{\lambda}, \tilde{\mu}) = \tilde{\Phi}(\tilde{u}, \tilde{v})$ によって、楕円関数の方程式 (9) は

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta^{-1} \frac{d\tilde{\lambda}}{d\tilde{t}} = \tilde{\mu}, \\ \eta^{-1} \frac{d\tilde{\mu}}{d\tilde{t}} = 6(\tilde{\lambda}^2 - 1) \end{array} \right. \quad \xLeftrightarrow{(\tilde{\lambda}, \tilde{\mu}) = \tilde{\Phi}(\tilde{u}, \tilde{v})} \quad \left\{ \begin{array}{l} \eta^{-1} \frac{d\tilde{u}}{d\tilde{t}} = \frac{\partial \tilde{K}}{\partial \tilde{v}} = \tilde{K}'(\tilde{\alpha}\tilde{\beta})\tilde{u}, \\ \eta^{-1} \frac{d\tilde{v}}{d\tilde{t}} = -\frac{\partial \tilde{K}}{\partial \tilde{u}} = -\tilde{K}'(\tilde{\alpha}\tilde{\beta})\tilde{v} \end{array} \right. \quad (21)$$

(ただし $\tilde{K} = \tilde{K}(\tilde{u}\tilde{v})$) と Birkhoff 標準形に変換される. 同様に、Painlevé 方程式についても、適当な未知関数の変換 $(\lambda, \mu) = \Phi(u, v)$ によって、例えば I 型方程式 P_1 (正確には、それと同値な Hamilton 系) は

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta^{-1} \frac{d\lambda}{dt} = \mu, \\ \eta^{-1} \frac{d\mu}{dt} = 6(\lambda^2 + t) \end{array} \right. \quad \xLeftrightarrow{(\lambda, \mu) = \Phi(u, v)} \quad \left\{ \begin{array}{l} \eta^{-1} \frac{du}{dt} = \frac{\partial K}{\partial v} = K'(\alpha\beta, t)u, \\ \eta^{-1} \frac{dv}{dt} = -\frac{\partial K}{\partial u} = -K'(\alpha\beta, t)v \end{array} \right. \quad (22)$$

(ただし $K = K(uv, t)$) と Birkhoff 標準形に変換される.

このように、楕円関数の方程式と Painlevé 方程式の両者が未知関数の変換 (21), (22) によって Birkhoff 標準形に変換される. なお (21), (22) は (形式変換として) 可逆であることに注意しよう. そこで両者の Birkhoff 標準形を、次のような独立変数の変換

$$K'(\alpha\beta, t) dt = \tilde{K}'(\tilde{\alpha}\tilde{\beta}) d\tilde{t}, \quad \text{i.e.,} \quad \frac{d\tilde{t}}{dt} = \frac{\partial K}{\partial \theta} \left(\frac{\partial \tilde{K}}{\partial \tilde{\theta}} \right)^{-1} \quad (\text{及び } \alpha\beta = \tilde{\alpha}\tilde{\beta}) \quad (23)$$

によって結び付ける. 上記の未知関数の変換とこの独立変数の変換を組み合わせれば、Painlevé 方程式の未知関数 (λ, μ) に対して、 $(\tilde{\Phi} \circ \Phi^{-1})(\lambda, \mu)|_{t=\tilde{t}(\tilde{t})}$ は楕円関数の方程式を満たすことになる. 換言すれば、これらの変換により Painlevé 方程式と楕円関数の方程式のインスタントン解が対応する.

さらに、楕円関数の方程式のインスタントン解の代わりに楕円関数 $(\tilde{\lambda}, \tilde{\mu}) = (\mathcal{P}(\eta\tilde{t}), \mathcal{P}'(\eta\tilde{t}))$ そのものを持ってきて、

$$(\lambda, \mu) = (\Phi \circ \tilde{\Phi}^{-1})(\mathcal{P}(\eta\tilde{t}), \mathcal{P}'(\eta\tilde{t}))|_{\tilde{t}=\tilde{t}(t)} \quad (24)$$

を考える. この表示 (24) には指数的に増大する項は現れず、形式的な変換 (21), (22), (23) はすべて η^{-1} (または $\eta^{-1/2}$) の形式べき級数であるから、Borel 総和法を用いて (24) に解析的な意味を与え得ることが十分に期待できる. これが、ここで提案したいインスタントン解の解析的意味づけである.

Remark 2. Boutroux [5] は、Painlevé 方程式の解の (特に不確定特異点のまわりでの) 漸近挙動を解析するために、独立変数と未知関数の変数変換を導入して Painlevé 特殊関数の楕円関数による近似を論じた. 例えば P_1 の場合、上記の変換式 (24) の主要項 (第 1 近似) を取れば、それは Boutroux の用いた変換と一致する. この意味で (24) は、形式的な変換ではあるものの、Boutroux の変換を任意次数まで延長して exact な変換にしたものと考えられる.

4. 楕円函数のインスタントン展開

前節では、楕円函数を用いた Painlevé 方程式のインスタントン解の解析的意味づけについて述べた。これに関連して、本節では、インスタントン解に関する一つの懸案の問題を考察する。

2節の議論からわかるように、Birkhoff 標準形への変換の構成は零パラメータ解から始まる。そして、零パラメータ解は、代数方程式により定まるその主要項 $\lambda_0(t)$ の選び方の数だけ存在する。例えば、楕円函数の方程式 (9) や (P_I) には $(\lambda_0(t))$ が2次の代数方程式の解なので2個の零パラメータ解が、また (P_{II}) には3個の零パラメータ解が存在する。従って、(9) や (P_I) は2個の、 (P_{II}) は3個のインスタントン解をそれぞれ持つことになる。前節の議論でインスタントン解に解析的意味が付くならば、これら複数個のインスタントン解の間には（それらが全く共通部分を持たない独立した解の族でない限り）ある種の関係式が成立するはずである。この関係式を具体的に知ることとはできないだろうか？

以下では、楕円函数の方程式 (10) に対してこの問題を考察する。青木 [1] が示したように、Jacobi の楕円函数が満たす方程式の場合は、インスタントン解は Jacobi の楕円函数の Fourier 級数展開に対応する。実は、Weierstrass の $\mathcal{P}$ 函数の場合も同様の事実が成立し、上記の問題を考察する際にもこの事実が基礎となる。そこで、 $\mathcal{P}$ 函数の Fourier 級数展開の復習から議論を始めることにしよう。

$\mathcal{P}$ 函数の無限級数表示を

$$\mathcal{P}(s) = \frac{1}{s^2} + \sum' \left(\frac{1}{(s - \Omega_{m,n})^2} - \frac{1}{(\Omega_{m,n})^2} \right) \quad (25)$$

(ただし $\sum'$ は $(m, n) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ に関する和を表す) とし、

$$\zeta(s) = \frac{1}{s} + \sum' \left(\frac{1}{s - \Omega_{m,n}} + \frac{1}{\Omega_{m,n}} + \frac{s}{(\Omega_{m,n})^2} \right), \quad (26)$$

及び

$$\sigma(s) = s \prod' \left(1 - \frac{s}{\Omega_{m,n}} \right) \exp \left(\frac{s}{\Omega_{m,n}} + \frac{1}{2} \left(\frac{s}{\Omega_{m,n}} \right)^2 \right) \quad (27)$$

とおく。すると $\sigma(s)$ は整函数となり、

$$\mathcal{P}(s) = -\zeta'(s), \quad \zeta(s) = \frac{d}{ds} \log \sigma(s), \quad \mathcal{P}(s) = -\frac{d^2}{ds^2} \log \sigma(s) \quad (28)$$

が成立する。 $\mathcal{P}$ 函数の Fourier 級数展開を考えるにあたっては、基本周期を一つ選ばなければならない。ここではそうした基本周期として ω_1 を選ぶものとし、 $\varphi(s) = \exp \left(-\frac{\eta_1 s^2}{2\omega_1} + \frac{i\pi s}{\omega_1} \right) \sigma(s)$ とおくと、 $\varphi(s)$ は擬周期性

$$\varphi(s + \omega_1) = \varphi(s), \quad \varphi(s + \omega_2) = -\frac{1}{z^2} \varphi(s) \quad (29)$$

を満足する。これより、 $\sigma(s)$ は次のようにテータ函数で表されることがわかる。

$$\sigma(s) = C_1 \exp \left(\frac{\eta_1 s^2}{2\omega_1} \right) \theta_1(h, z). \quad (30)$$

ただし, $\theta_1(h, z)$ は

$$\theta_1(h, z) = i \sum_{n \in \mathbb{Z}} (-1)^n h^{(n-1/2)^2} z^{2n-1} \quad (31)$$

で定義されるテータ函数であり, C_j は適当な定数 (以下同様) である. (ここで, $h = e^{i\pi\omega_2/\omega_1}$, $z = e^{i\pi s/\omega_1}$, $\eta_j = 2\zeta(\omega_j/2)$.) テータ函数に関する良く知られた無限積表示

$$\theta_1(h, z) = C_2 \frac{z^2 - 1}{z} \prod_g (1 - h^g z^2)(1 - h^g z^{-2}) \quad (32)$$

(ただし $\prod_g$ は $g \in \{2, 4, 6, \dots\}$ にわたる積を表す) を (30) に代入し, (28) を用いれば,

$$\mathcal{P}(s) = -\frac{\eta_1}{\omega_1} - \left(\frac{2\pi}{\omega_1}\right)^2 \left[\sum_{k \geq 1} k e^{\frac{2i\pi k t}{\omega_1}} + \sum_g \sum_{k \geq 1} k h^{kg} \left(e^{\frac{2i\pi k t}{\omega_1}} + e^{-\frac{2i\pi k t}{\omega_1}} \right) \right]. \quad (33)$$

これが $\mathcal{P}$ 函数の周期 ω_1 に関する Fourier 級数展開である. 議論の詳細については, 楕円函数に関する成書 (例えば [9]) を参照されたい.

2節で構成したインスタントン解を具体的に書き下せば, 上記の $\mathcal{P}$ 函数の Fourier 級数展開と同じ形をしていることがわかる. この事実から, 楕円函数の方程式

$$\frac{d^2 \lambda}{dt^2} = \eta^2 \left(6\lambda^2 - \frac{g_2}{2} \right) \quad (34)$$

の2個のインスタントン解の間の関係が次のように従う.

(34) の両辺に $2(d\lambda/dt)$ をかけて積分すれば,

$$\left(\frac{d\lambda}{dt} \right)^2 = \eta^2 (4\lambda^3 - g_2\lambda - g_3) \quad (35)$$

が得られる. ここで g_3 は, $\mathcal{P}$ 函数のパラメータであると同時に (34) の積分定数 (の一つ) である. 従って, (34) の一般解は

$$\mathcal{P}(s + \hat{s}; g_2, g_3) \quad (\text{ただし } s = \eta t) \quad (36)$$

で与えられる. すなわち, g_3 と $\hat{s}$ が積分定数であり, $(g_3, \hat{s})$ 空間が (34) の (ナイーブな意味での) “初期値空間”, つまり (34) の一般解をパラメータ付けるパラメータ空間と考えられる. 特に零パラメータ解として $\lambda = \sqrt{g_2/12}$ を取った場合は ((35) の右辺が0となるので) $g_3 = -(g_2/3)^{3/2}$, $\lambda = -\sqrt{g_2/12}$ を取った場合は $g_3 = (g_2/3)^{3/2}$ となる. 従って, (34) の零パラメータ解 $\lambda^{(0)} = \pm\sqrt{g_2/12}$ から始まる2個のインスタントン解を $\lambda_{\pm}(t, \eta; \alpha_{\pm}, \beta_{\pm})$ で表すことにすると, $\lambda_{\pm}(t, \eta; \alpha_{\pm}, \beta_{\pm})$ はそれぞれ $(g_3, \hat{s})$ 空間の $g_3 = \mp(g_2/3)^{3/2}$ の近傍に存在する解と見なし得る.

ここで, (34) の解である $\mathcal{P}$ 函数の周期は, (35) の両辺の平方根を取って得られる変数分離形の微分方程式を実際に解けばわかるように, 楕円積分

$$\varpi(\gamma) = \int_{\gamma} \frac{d\lambda}{\sqrt{4\lambda^3 - g_2\lambda - g_3}} = \int_{\gamma} \frac{d\lambda}{\sqrt{4(\lambda - e_1)(\lambda - e_2)(\lambda - e_3)}} \quad (37)$$

(ただし, γ は $\sqrt{4\lambda^3 - g_2\lambda - g_3}$ の Riemann 面上の閉曲線であり, e_1, e_2, e_3 は $4\lambda^3 - g_2\lambda - g_3 = 0$ の3根) で与えられることに注意しよう. 例えば, 2節と同様に $g_2 = 12$ の

場合を考えると、零パラメータ解 $\lambda^{(0)} = \pm 1$ においては $g_3 = \mp 8$ であり、 $-8 < g_3 < 8$ では $4\lambda^3 - 12\lambda - g_3 = 0$ は異なる 3 実根 $e_1 < e_2 < e_3$ を持つ。従って、隣り合う 2 根 e_1 と e_2 のまわりを一周する閉曲線を γ_- 、 e_2 と e_3 のまわりを一周する閉曲線を γ_+ とすれば、 $-8 < g_3 < 8$ では $\varpi(\gamma_+)$ と $\varpi(\gamma_-)$ が問題の $\mathcal{P}$ 函数の独立な 2 個の周期を与える。ところが、零パラメータ解 $\lambda^{(0)} = \pm 1$ に対応する $g_3 = \mp 8$ では、それぞれ e_2 と e_3 、 e_1 と e_2 が重根になって、周期 $\varpi(\gamma_{\mp})$ がつぶれて $\varpi(\gamma_{\pm})$ のみが生き残る。つまり、インスタント解 $\lambda_+(t, \eta; \alpha_+, \beta_+)$ を考える際には周期としては $\varpi(\gamma_+)$ を、 $\lambda_-(t, \eta; \alpha_-, \beta_-)$ を考える際には周期としては $\varpi(\gamma_-)$ を考えざるを得ない。従って、 $\lambda_+(t, \eta; \alpha_+, \beta_+)$ には $\mathcal{P}$ 函数の周期 $\varpi(\gamma_+)$ に関する Fourier 級数展開が、 $\lambda_-(t, \eta; \alpha_-, \beta_-)$ には $\mathcal{P}$ 函数の周期 $\varpi(\gamma_-)$ に関する Fourier 級数展開が、それぞれ対応することになる。こうして、実際にインスタント解と $\mathcal{P}$ 函数の Fourier 級数展開を比較することによって $(\alpha_{\pm}, \beta_{\pm})$ と $(g_3, \hat{s})$ の間の関係式が、さらにそれから $(g_3, \hat{s})$ を消去すれば (α_+, β_+) と (α_-, β_-) の間の関係式が得られる。(かなり複雑な式になるので、スペースの関係もあり、ここでは具体的な関係式は省略する。)

これが、方程式 (34) の 2 個のインスタント解の間の関係式を得る手続きである。上記の議論からわかるように、初期値空間 $(g_3, \hat{s})$ 全体にわたって独立な 2 個の周期が存在しないために、周期がつぶれる点を中心として Fourier 級数展開を考えた解が 2 個のインスタント解であり、 $\mathcal{P}$ 函数で与えられる一般解 (36) がその 2 個の解をつないでいる。楕円函数の方程式に対するインスタント解のこの描像からも、インスタント解を大域的に考察する際には楕円函数自身を用いるのが自然であると考えられる。

5. 今後の課題

ここまで見てきたように、インスタント解が指数的に増大する項を含む困難は、楕円函数を用いることにより解消されると期待される。ただ、楕円函数を用いる場合も、Birkhoff 標準形への変換を構成する変換函数や、Painlevé 方程式と楕円函数の方程式を結び付ける座標変換は $(\eta^{-1/2})$ の形式級数であり、これらの無限級数の Borel 総和可能性を検証する必要がある。これらの無限級数の Borel 総和可能性の証明は今後に残された大きな問題である。

また前節では、楕円函数の方程式の 2 個のインスタント解の関係を論じた。3 節で見たように、Painlevé 方程式のインスタント解は楕円函数の方程式のインスタント解と関係づけられるので、この両者を組み合わせれば、Painlevé 方程式の複数のインスタント解相互の間の関係も原理的には得られるはずである。しかし、楕円函数の方程式を経由せずに、Painlevé 方程式のインスタント解の間の相互関係が直接得られることがより望ましい。前節の議論を踏まえれば、そのためには Painlevé 方程式の初期値空間 (cf. [19], [21], [18]) と「周期」を同時に論じることが必要になるだろう。個人的には、こうした諸々の要素を統一的に論じるには、やはりモノドロミー保存変形という舞台が最も相応しいように思われる。この立場からは、例えば [23] や [10] で論じられた Painlevé 方程式に付随する線型方程式のモノドロミーデータの計算を、ここで提案した定式化を用いてもう一度見直してみることも今後の興味深い問題の一つである。その中から、もしかすると Lisovsky 達 (cf. [17]) が言う「Painlevé 特殊函数 (あるいはその τ 函数) の Fourier 展開」の意味も明らかになるかも知れない。

参考文献

- [1] T. Aoki: Multiple-scale analysis of Duffing's equation and Fourier series expansion of Jacobi's elliptic functions, *RIMS Kôkyûroku*, **1014** (1997), 49–60.
- [2] T. Aoki, N. Honda and Y. Umeta: On a construction of general formal solutions for equations of the first Painlevé hierarchy. I, *Adv. Math.*, **235** (2013), 496–524.
- [3] T. Aoki, T. Kawai and Y. Takei: WKB analysis of Painlevé transcendents with a large parameter. II, *Structure of Solutions of Differential Equations*, World Scientific Publishing, 1996, pp. 1–49.
- [4] W. Balser: *From Divergent Power Series to Analytic Functions*, Lecture Notes in Math., Vol. 1582, Springer-Verlag, 1994.
- [5] P. Boutroux; Recherches sur les transcendentes de M. Painlevé et l'étude asymptotique des équations diff'érentielles du second ordre, *Ann. Sci. École Norm. Sup.*, **30** (1913), 255–375, **31** (1914), 99–159.
- [6] O. Costin: *Asymptotics and Borel Summability*, Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics, Vol. 141, CRC Press, 2009.
- [7] E. Delabaere: *Divergent Series, Summability and Resurgence III. Resurgent Methods and the First Painlevé Equation*, Lecture Notes in Math., Vol. 2155, Springer-Verlag, 2016.
- [8] S. Garoufalidis, A. Its, A.A. Kapaev and M. Mariño: Asymptotics of the instantons of Painlevé I, *Int. Math. Res. Not.*, IMRN, 2012, 561–606.
- [9] A. Hurwitz and R. Courant (足立恒雄, 小松啓一 訳): 楕円関数論, シュプリンガー数学クラシックス第2巻, シュプリンガー, 2007.
- [10] K. Iwaki: Parametric Stokes phenomenon for the second Painlevé equation, *Funkcial. Ekvac.*, **57** (2014), 173–243.
- [11] N. Joshi and Y. Takei: On Stokes phenomena for the alternate discrete PI equation, *Analytic, Algebraic and Geometric Aspects of Differential Equations*, Trends in Mathematics, Birkhäuser, 2017, pp. 369–381.
- [12] S. Kamimoto: Resurgence of formal series solutions of nonlinear differential and difference equations, *Proc. Japan Acad., Ser. A*, **92** (2016), 92–95.
- [13] S. Kamimoto and T. Koike: On the Borel summability of 0-parameter solutions of nonlinear ordinary differential equations, *RIMS Kôkyûroku Bessatsu*, **B40** (2013), 191–212.
- [14] T. Kawai and Y. Takei: WKB analysis of Painlevé transcendents with a large parameter. I, *Adv. Math.*, **118** (1996), 1–33.
- [15] ———: WKB analysis of Painlevé transcendents with a large parameter. III, *Adv. Math.*, **134** (1998), 178–218.
- [16] ———: 特異摂動の代数解析学, 岩波書店, 2008.
- [17] O. Lisovyy and J. Roussillon: On the connection problem for Painlevé I, *J. Phys. A*, **50** (2017), 255202, 15 pp.
- [18] T. Matano, A. Matumiya and K. Takano: On some Hamiltonian structures of Painlevé systems. II, *J. Math. Soc. Japan*, **51** (1999), 843–866.
- [19] K. Okamoto: Sur les feuilletages assoc'és aux équations du second ordre à points critiques fixes de P. Painlevé. Espaces des conditions initiales, *Japan. J. Math.*, **5** (1979), 1–79.
- [20] ———: パンルヴェ方程式, 岩波書店, 2009.
- [21] T. Shioda and K. Takano: On some Hamiltonian structures of Painlevé systems. I, *Funkcial. Ekvac.*, **40** (1997), 271–291.
- [22] Y. Takei: Singular-perturbative reduction to Birkhoff normal form and instanton-type

- formal solutions of Hamiltonian systems, *Publ. RIMS, Kyoto Univ.*, **34**(1998), 601–627.
- [23] ——— : An explicit description of the connection formula for the first Painlevé equation, *Toward the Exact WKB Analysis of Differential Equations, Linear or Non-Linear*, Kyoto Univ. Press, 2000, pp. 271–296.
- [24] ——— : Instanton-type formal solutions for the first Painlevé hierarchy, *Algebraic Analysis of Differential Equations*, Springer, 2008, pp. 307–319.
- [25] Y. Umeta: Instanton-type solutions for the second and the fourth Painlevé hierarchies with a large parameter, *J. Math. Soc. Japan*, **67** (2015), 943–978.