

2017年度第16回解析学賞受賞特別講演

非線形楕円型方程式の固有値問題の漸近解析 と逆分岐問題の解析

柴田 徹太郎 (広島大学大学院工学研究科)*

本講演では主として微分方程式の正值解に対する

1. L^q -分岐曲線の局所的・大域的解析
2. 逆分岐問題
3. 振動する分岐曲線の漸近挙動
を考える。

1. L^q -分岐曲線の局所的・大域的解析

1.1. L^∞ -空間における分岐曲線の解析

非線形楕円方程式の分岐問題は、様々な現象を記述する方程式に現れる重要な研究対象であり、その基本的解析法としては、1970年代に P. Rabinowitz らによって得られた分岐理論が知られている ([20])。一方で、非線形項が特殊な場合、たとえば常微分方程式であっても分岐曲線の挙動は大きく変化するので、その解析は個々の方程式の特徴に応じて議論されてきた。また、分岐曲線の解析は主として L^∞ -空間の枠組みで考察されてきた ([3-5], [6], [9], [19])。Berestycki [2] では、

$$-\Delta u + f(u) = \lambda u \text{ in } \Omega, \quad (1.1)$$

$$u > 0 \text{ in } \Omega, \quad (1.2)$$

$$u = 0 \text{ on } \partial\Omega \quad (1.3)$$

の分岐曲線が考察されている。ここで $\Omega \subset \mathbf{R}^N$ は適当に滑らかな境界 $\partial\Omega$ を持つ有界領域とし、 $\lambda > 0$ は分岐パラメータとする。また、 $f(u)$ は与えられた非線形項で、次の (A.1)–(A.3) の仮定をみたすとする。

(A.1) $f(u)$ は C^1 ($u \geq 0$) とし、 $f(0) = f'(0) = 0$ 。

(A.2) $f(u)/u$ は $u \geq 0$ で狭義単調増加。

(A.3) $f(u)/u \rightarrow \infty$ ($u \rightarrow \infty$)。

$f(u) = u^p$ ($p > 1$) が典型例である。このとき、与えられた $\lambda > \lambda_1$ 対して一意解 $(\lambda, u_\lambda) \in \mathbf{R}_+ \times C^2(\Omega)$ の存在が示されている。ここで λ_1 は $-\Delta$ のディリクレ境界条件の下での第一固有値である。さらに集合 $\{(\lambda, u_\lambda) \mid \lambda > \lambda_1\}$ は (1.1)–(1.3) のすべての解を与え、 $\lambda \mapsto u_\lambda$ は C^1 である。さらに、次の関係が成り立つことを示した。 $\chi^{-1}(s) := \frac{f(s)}{s}$ とすると、 $\lambda > \lambda_1$ で

$$\chi(\lambda - \lambda_1) \leq \|u_\lambda\|_\infty \leq \chi(\lambda) \quad (1.4)$$

本研究は科研費(課題番号 17K05330)の助成を受けたものである。

* 〒739-8527 広島市鏡山 1-4-1 広島大学 大学院工学研究科
e-mail: tshibata@hiroshima-u.ac.jp

が成り立つ。特に、 $f(u) = u^p$ ($p > 1$) のときは

$$\lambda - \lambda_1 \leq \|u_\lambda\|_\infty^{p-1} \leq \lambda. \quad (1.5)$$

1.2. L^q -空間における分岐曲線の局所的解析

Chiappinelli [8] は、Ljusternik-Schnirelman (LS) 理論を用いて、次の方程式の変分固有値を考察した。

$$-\Delta u + f(x, u) = \lambda u \quad \text{in } \Omega \subset \mathbb{R}^N \quad (N \geq 1), \quad (1.6)$$

$$u > 0 \quad \text{in } \Omega, \quad (1.7)$$

$$u = 0 \quad \text{on } \partial\Omega. \quad (1.8)$$

ここで、 $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ は適当に滑らかな有界領域、 $f : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ は連続、 $f(x, -u) = -f(x, u)$ を満たし、 $1 < p < 1 + 4/N$ とする。さらに、定数 $a \geq 0$ に対して

$$|f(x, u)| \leq a|u|^p \quad (1.9)$$

を満たすとする。変分固有値とは、 $\alpha > 0$ を定数とし、

$$M_{q,\alpha} := \{u \in H_0^1(\Omega) \mid \|u\|_q = \alpha\} \quad (1.10)$$

の制限のもとで、 $q = 2$ のときに LS 理論を用いて得られる解に対応する固有値 $\lambda(2, \alpha)$ のことである。[8] では、 L^2 -空間における分岐曲線の性質を解析し、 $\alpha \rightarrow 0$ のときの漸近挙動が得られている。([8] では正值解以外もあつまっている)。

Theorem 1.1 (Chiappinelli [8]). $\alpha \rightarrow 0$ のとき

$$\lambda(2, \alpha) = \lambda_1 + O(\alpha^{p-1}). \quad (1.11)$$

そこで、[24] において、 $N = 1$, $f(u) = u^p$ ($p > 1$), $\Omega = (0, 1)$, $q \geq 1$ のときに焦点を絞って考察した。すなわち、次の非線形固有値問題を考える。 $u \in M_{q,\alpha}$ で

$$\begin{aligned} -u''(t) + u(t)^p &= \lambda u(t), \quad t \in I := (0, 1), \\ u(t) &> 0, \quad t \in I, \\ u(0) &= u(1) = 0 \end{aligned} \quad (1.12)$$

を満たすものを考えると、この解に対応する分岐曲線 $\lambda = \lambda(q, \alpha)$ は、対応する固有関数の L^q ノルムの連続関数として表されるので、 $\alpha \rightarrow 0$ における漸近挙動を考察した。とくに $p = 2$ のときは、(1.12) は生物モデルと関連が深い。

Theorem 1.2 ([24]). $1 \leq q < \infty$ を固定する。任意の $N \in \mathbb{N}$ も固定する。このとき $\alpha \rightarrow 0$ で

$$\lambda(q, \alpha) = \pi^2 + \sum_{n=1}^N a_n \alpha^{n(p-1)} + o(\alpha^{N(p-1)}). \quad (1.13)$$

ここで

$$a_1 = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{(p-1)/q} \frac{4}{\pi(p+1)} \int_0^1 \frac{1-s^{p+1}}{(1-s^2)^{3/2}} ds \left(\int_0^1 \frac{s^q}{\sqrt{1-s^2}} ds \right)^{-(p-1)/q} \quad (1.14)$$

であり、 a_n ($n = 2, 3, \dots, N$) は $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ から帰納的に決定される定数。
さらに $\alpha \rightarrow 0$ のとき、

$$\lambda(q, \alpha) = \pi^2 + \sum_{n=1}^N A_n \|u_\alpha\|_\infty^{n(p-1)} + o(\|u_\alpha\|_\infty^{N(p-1)}). \quad (1.15)$$

ここで

$$A_1 = \frac{4}{\pi(p+1)} \int_0^1 \frac{1-s^{p+1}}{(1-s^2)^{3/2}} ds$$

であり A_n ($n = 2, 3, \dots, N$) は $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$ から帰納的に決定される定数。

Remarks. (a) (1.13) で $u(t)^p$ を $-u(t)^p$ としても同様の結果が得られる。

(b) $q = 2$ とすると

$$\frac{2}{p+1} \int_0^1 \frac{1-s^{p+1}}{(1-s^2)^{3/2}} ds = \int_0^\pi (\sin x)^{p+1} dx, \quad \int_0^1 \frac{s^2}{\sqrt{1-s^2}} ds = \frac{\pi}{4}$$

なので (1.14) より

$$a_1 = 2^{(p+1)/2} \pi^{-1} \left(\int_0^\pi (\sin x)^{p+1} dx \right).$$

であることがわかる。

1.3. L^q -空間における分岐曲線の大域的解析

次に $\lambda(q, \alpha)$ の大域的挙動を考える。ここでは方程式を (1.12) に絞って考察したい。 $\lambda(q, \alpha)$ の $\alpha \rightarrow \infty$ での漸近挙動の第 2 項以下は、 $q = 2$ のときにはじめて詳細な結果を得ることができた。以下の結果は、分岐曲線と critical value の関係と変分法を用いて導かれた。

Theorem 1.3 ([21]). 任意の $n \in \mathbf{N}_0$ を固定する。このとき $\alpha \rightarrow \infty$ で、次の漸近公式が成り立つ。

$$\lambda(2, \alpha) = \alpha^{p-1} + C_1 \alpha^{(p-1)/2} + \sum_{k=0}^n \frac{a_k(p)}{(p-1)^{k+1}} C_1^{k+2} \alpha^{k(1-p)/2} + o(\alpha^{n(1-p)/2}). \quad (1.16)$$

ここで

$$C_1 = (p+3) \int_0^1 \sqrt{\frac{p-1}{p+1} - s^2 + \frac{2}{p+1} s^{p+1}} ds \quad (1.17)$$

であり、 $a_k(p)$ は $a_0, a_1, \dots, a_{k-1}$ を用いて表される。たとえば

$$a_0(p) = 1, \quad a_1(p) = \frac{(5-p)(9-p)}{24}, \quad a_2(p) = \frac{(3-p)(5-p)(7-p)}{24}.$$

しかしながら、証明法に変分法を用いたため、 $q = 2$ 以外のときはこのような漸近公式を得ることはできなかった。その後、time map の方法の適用することにより、 $q \geq 1$ の場合に Theorem 1.3 の拡張を得ることができた。

Theorem 1.4 ([22]). 任意に固定した $1 \leq q < \infty$ と $n \in \mathbf{N}$ に対し、 $\alpha \rightarrow \infty$ で次の漸近公式が成り立つ。

$$\lambda(2, \alpha) = \alpha^{p-1} + \tilde{C}_1 \alpha^{(p-1)/2} + \tilde{a}_0 + \sum_{k=1}^n \tilde{a}_k \alpha^{k(1-p)/2} + o(\alpha^{n(1-p)/2}) \quad (1.18)$$

ここで

$$\begin{aligned} \tilde{C}_1 &= \frac{p-1}{q} \tilde{C}(q), \quad \tilde{C}(q) := 2 \int_0^1 \frac{1-s^q}{\sqrt{1-s^2-2(1-s^{p+1})/(p+1)}} ds, \\ \tilde{a}_0 &= \frac{p-1}{2q} \tilde{C}(q)^2, \quad \tilde{a}_1 = \frac{(p-1)(p-1-2q)(p-1-4q)}{24q^3} \tilde{C}(q)^3 \end{aligned}$$

さらに $\{\tilde{a}_j\}_{j=1}^N$ は $\tilde{C}(q), \tilde{a}_0, \tilde{a}_1, \dots, \tilde{a}_{j-1}$ を用いて帰納的に定まる定数である。

この結果を用いて、次の章では逆分岐問題を考察したい。

2. 逆分岐問題

2.1. L^2 -逆分岐問題

逆分岐問題とは、分岐曲線の特徴から未知の非線形項を決定する問題である。線形の場合と異なり、非線形楕円型方程式の逆分岐問題の研究は非常に少ない。(cf. Kamimura [12, 13, 14]). なぜならば、順問題の解析、すなわち与えられた非線形項をもつ方程式の分岐曲線の構造を明らかにすることですら、時として非常に困難であるからである。そこで、第1章の研究成果に基づき、分岐曲線の大域的挙動から未知の非線形項を決定するというアプローチにより得られたいくつかの基本的結果を紹介する。方程式 (1.1)–(1.3) を考える。ここで $f(u) = f_1(u)$ と $f(u) = f_2(u)$ は 未知関数 とする。ただし、仮定 (A.1)–(A.3) は満たしているとする。さらに、

$$F_j(u) := \int_0^u f_j(s) ds \quad (j = 1, 2)$$

とし、 F_1 と F_2 は次の (B.1) を満たすとする。

(B.1) $W := \{u \geq 0 : F_1(u) = F_2(u)\}$ としたとき、 W は区間と、無限遠にのみ集積点を持つ点列 $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ のみで構成されたとする。($W = \emptyset$ でもよい)

Theorem 2.1 ([23]). 上記の仮定の下、 $N \geq 2$ の場合は f_1 と f_2 は

(A.4) $u, v \geq 0$ に対して、

$$F_j(u+v) \leq C(F_j(u) + F_j(v)) \quad (j = 1, 2)$$

を満たすとする。さらに、すべての $\alpha > 0$ に対して

$$\lambda_1(2, \alpha) = \lambda_2(2, \alpha) \quad (2.1)$$

が成り立つと仮定する。ここで、 $\lambda_j(2, \alpha)$ は、 $f(u) = f_j(u)$ ($j = 1, 2$) に対応する L^2 -分岐曲線である。このとき $f_1(u) \equiv f_2(u)$ ($u \geq 0$) が成り立つ。

この定理の証明には変分法を用いるので、 L^2 -逆分岐問題でのみ成立する。

2.2. L^1 -逆分岐問題

Theorem 2.1 の仮定 (2.1) を緩められないだろうか。たとえば、何らかの意味で、 $\alpha > \alpha_0$ (> 0) に対して

$$\lambda_1(q, \alpha) = \lambda_2(q, \alpha) \quad (2.2)$$

が成り立つ、というようなやや弱い仮定のもとで考えたい。そこで $q = 1$ の場合に焦点を絞る。

- $\lambda_0(1, \alpha) : f(u) = u^p$ に対応する L^1 -分岐曲線.
- $\lambda(1, \alpha) : f(u) = u^p + g(u)$ に対応する L^1 -分岐曲線. ただし $g(u)$ は 未知関数.
- $\alpha \gg 1$ に対して、何らかの意味で

$$\lambda(1, \alpha) = \lambda_0(1, \alpha)$$

が成り立つと仮定する。このとき $g(u) \equiv 0$ という結論が得られるか？

仮定 (B.2) $g(u)$ は $u \geq 0$ において support がコンパクトな C^1 -関数.

定義： $\eta_1(x) = \eta_2(x)$ nearly exponentially for $x \gg 1 \iff$

$$\eta_1(x) = \eta_2(x) + o(x^{-N}) \quad (x \rightarrow \infty)$$

が任意の $N \in \mathbf{N}$ に対して成り立つ。

Theorem 2.2 ([25]). 以上の仮定の下、 $\lambda(1, \alpha) = \lambda_0(1, \alpha)$ nearly exponentially が成り立つと仮定する。このとき $g(u) \equiv 0$ である。

証明には、 $\lambda(1, \alpha)$ の漸近展開公式 (Theorem 1.4) を用いるので、 L^1 の範疇でのみ成り立つ定理である。

3. 振動する分岐曲線

次の非線形固有値問題を考える。

$$-u''(t) = \lambda(u(t) + g(u(t))), \quad t \in I := (-1, 1), \quad (3.1)$$

$$u(t) > 0, \quad t \in I, \quad (3.2)$$

$$u(-1) = u(1) = 0. \quad (3.3)$$

ここで、 $g(u)$ は振動する非線形項、 $\lambda > 0$ はパラメータである。このとき、 $g(u)$ に関する適当な条件の下で、任意の $\alpha > 0$ に対して、 $\alpha = \|u_\alpha\|_\infty$ を満たす解 (λ, u_α) がただひとつ存在し、 λ は α の連続関数となる ([10], [15–18], [27], [29])。そこで、 $\lambda = \lambda(g, \alpha)$ と書く。Cheng [7] において、 $g(u) = \sin \sqrt{u}$ の場合がモデル方程式として考察されている (cf.[1])。

Theorem 3.1 ([7, Theorem 6]). $g(u) = g_1(u) = \sin \sqrt{u}$ ($u \geq 0$) とする。このとき、任意の自然数 $r \geq 1$ に対して、定数 $\delta > 0$ が存在して、 $\lambda \in (\pi^2/4 - \delta, \pi^2/4 + \delta)$ であれば、(3.1)–(3.3) は少なくとも r 個の異なる解を持つ。

Theorem 3.1 から、 $\lambda(g_1, \alpha)$ は、 $\alpha \gg 1$ において、直線 $\lambda = \pi^2/4$ に無限回交差する曲線であることが期待される。そこで、 $\alpha \rightarrow 0, \alpha \rightarrow \infty$ のときの $\lambda(g_1, \alpha)$ の漸近公式を確立することにより、分岐曲線の全体像を明確にしたい。

Theorem 3.2 ([28]). $g(u) = g_1(u) = \sin \sqrt{u}$ とする。次の漸近公式が成り立つ。

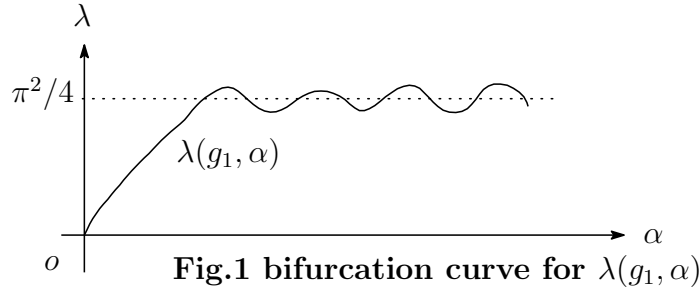
$$\lambda(g_1, \alpha) = \frac{\pi^2}{4} - \pi^{3/2} \alpha^{-5/4} \sin \left(\sqrt{\alpha} - \frac{1}{4}\pi \right) + o(\alpha^{-5/4}) \quad (\alpha \rightarrow \infty), \quad (3.4)$$

$$\lambda(g_1, \alpha) = \frac{3}{4} K_1^2 \sqrt{\alpha} + \frac{3}{2} K_1 K_2 \alpha + O(\alpha^{3/2}) \quad (\alpha \rightarrow 0). \quad (3.5)$$

ここで、

$$K_1 := \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-s^{3/2}}} ds, \quad K_2 := -\frac{3}{8} \int_0^1 \frac{1-s^2}{(1-s^{3/2})^{3/2}} ds. \quad (3.6)$$

Theorem 3.2 により、 $\lambda(g_1, \alpha)$ の概形は以下の図のようになる。



一番自然な振動的非線形項である、 $g(u) = g_2(u) = \frac{1}{2} \sin u$ の場合を考える。

Theorem 3.3 ([26]). $g(u) = g_2(u) = (1/2) \sin u$ のとき次の漸近公式が成り立つ。

$$\lambda(g_2, \alpha) = \frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi}{2\alpha} \sqrt{\frac{\pi}{2\alpha}} \sin \left(\alpha - \frac{1}{4}\pi \right) + O(\alpha^{-2}) \quad (\alpha \rightarrow \infty). \quad (3.7)$$

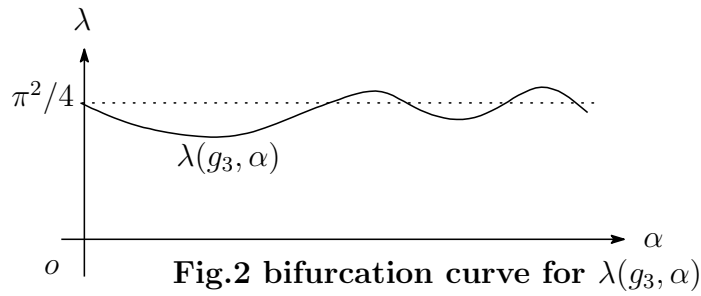
Theorem 3.4 ([28]). $g(u) = g_3(u) = \sin u^2$ とするとき次の漸近公式が成り立つ。

$$\lambda(g_3, \alpha) = \frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi^{3/2}}{2} \alpha^{-2} \sin \left(\alpha^2 - \frac{1}{4}\pi \right) + o(\alpha^{-2}) \quad (\alpha \rightarrow \infty), \quad (3.8)$$

$$\lambda(g_3, \alpha) = \frac{\pi^2}{4} - \frac{1}{3} \pi A_1 \alpha + \left(\frac{1}{9} A_1^2 + \frac{1}{6} \pi A_2 \right) \alpha^2 + o(\alpha^2) \quad (\alpha \rightarrow 0), \quad (3.9)$$

$$A_1 = \int_0^1 \frac{1-s^3}{(1-s^2)^{3/2}} ds, \quad A_2 = \int_0^1 \frac{(1-s^3)^2}{(1-s^2)^{5/2}} ds. \quad (3.10)$$

Theorem 3.4 により、 $\lambda(g_3, \alpha)$ の概形は以下の図のようになる。



証明は time map 法と特殊関数の漸近公式による (cf. [11])。

時間があれば、(3.1)–(3.3)において、 $g(u)$ が一般的な仮定

(D.1) $g(u) \in C^1(\mathbf{R})$ であり、 $u + g(u) > 0$, ($u > 0$),

(D.2) $g(u + 2\pi) = g(u)$, ($u \in \mathbf{R}$)

を満たす場合に関する最近の結果 [29] も紹介したい。

参考文献

- [1] A. AMBROSETTI, H. BREZIS AND G. CERAMI, *Combined effects of concave and convex nonlinearities in some elliptic problems*, J. Funct. Anal. **122** (1994), 519–543.
- [2] H. Berestycki, *Le nombre de solutions de certains problèmes semi-linéaires elliptiques*, J. Funct. Anal. **40** (1981), 1–29.
- [3] S. Cano-Casanova, *Compact components of positive solutions for superlinear indefinite elliptic problems of mixed type*, Topol. Methods Nonlinear Anal. **23** (2004), 45–72.
- [4] S. CANO-CASANOVA AND J. LÓPEZ-GÓMEZ, *Existence, uniqueness and blow-up rate of large solutions for a canonical class of one-dimensional problems on the half-line*, J. Differential Equations **244** (2008), 3180–3203.
- [5] S. CANO-CASANOVA AND J. LÓPEZ-GÓMEZ, *Blow-up rates of radially symmetric large solutions*, J. Math. Anal. Appl. **352** (2009), 166–174.
- [6] J. Chabrowski, *On nonlinear eigenvalue problems*, Forum Math. **4** (1992), 359–375.
- [7] Y.J. CHENG, *On an open problem of Ambrosetti, Brezis and Cerami*, Differential Integral Equations **15** (2002), 1025–1044.
- [8] R. CHIAPPINELLI, *Remarks on bifurcation for elliptic operators with odd nonlinearity*, Israel J. Math. **65** (1989), 285–292.
- [9] J. M. FRAILE, J. LÓPEZ-GÓMEZ AND J. SABINA DE LIS, *On the global structure of the set of positive solutions of some semilinear elliptic boundary value problems*, J. Differential Equations **123** (1995), 180–212.
- [10] A. GALSTIAN, P. KORMAN AND Y. LI, *On the oscillations of the solution curve for a class of semilinear equations*, J. Math. Anal. Appl. **321** (2006), 576–588.
- [11] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, *Table of integrals, series, and products*. Translated from the Russian. Translation edited and with a preface by Daniel Zwillinger and Victor Moll. Eighth edition. Elsevier/Academic Press, Amsterdam, 2015.

- [12] Y. Kamimura, *An inverse problem in bifurcation theory*, J. Differential Equations **106** (1993), 10-26.
- [13] Y. Kamimura, *An inverse problem in bifurcation theory. II*, J. Math. Soc. Japan **46** (1994), 89-110.
- [14] Y. Kamimura, *An inverse problem in bifurcation theory. III*, Proc. Amer. Math. Soc. **123** (1995), 3051-3056.
- [15] P. KORMAN AND Y. LI, *Infinitely many solutions at a resonance*, Electron. J. Differ. Equ. Conf. **05**, 105–111.
- [16] P. KORMAN, *An oscillatory bifurcation from infinity, and from zero*, NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl. **15** (2008), 335–345.
- [17] P. KORMAN, *Global solution curves for semilinear elliptic equations*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, (2012).
- [18] T. LAETSCH, *The number of solutions of a nonlinear two point boundary value problem*, Indiana Univ. Math. J. **20** 1970/1971 1–13.
- [19] Y.-H. Lee, I. Sim, *Global bifurcation phenomena for singular one-dimensional p -Laplacian*, J. Differential Equations **229** (2006), 229–256.
- [20] P. Rabinowitz, *Some global results for nonlinear eigenvalue problems*, J. Funct. Anal. **7** (1971), 487–513.
- [21] T. Shibata, *Precise spectral asymptotics for nonlinear Sturm-Liouville problems*, J. Differential Equations **180** (2002), 374–394.
- [22] T. Shibata, *Global behavior of the branch of positive solutions to a logistic equation of population dynamics*, Proc. Amer. Math. Soc. **136** (2008), 2547–2554.
- [23] T. Shibata, *Inverse eigenvalue problems for semilinear elliptic eigenvalue problems*, Electron. J. Diff. Equ., **Vol. 2009**(2009), No. 107, pp. 1-11
- [24] T. Shibata, *Local structure of bifurcation curves for nonlinear Sturm-Liouville problems*, J. Math. Anal. Appl. **369** (2010), 583–594.
- [25] T. Shibata, *Inverse bifurcation problems for diffusive logistic equation of population dynamics*, J. Math. Anal. Appl. **413** (2014), 495–501.
- [26] T. SHIBATA, *Asymptotic length of bifurcation curves related to inverse bifurcation problems*, J. Math. Anal. Appl. **438** (2016), 629–642.
- [27] T. SHIBATA, *Oscillatory bifurcation for semilinear ordinary differential equations*, Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ. 2016, No. **44**, 1–13.
- [28] T. SHIBATA, *Global and local structures of oscillatory bifurcation curves with application to inverse bifurcation problem*, to appear.
- [29] T. SHIBATA, *Global behavior of bifurcation curves for the nonlinear eigenvalue problems with periodic nonlinear terms*, to appear.