

反応拡散方程式の進行波解と全域解

二宮 広和 (明治大学・総合数理学部)*

1. はじめに

さまざまな自然現象・社会現象において伝播現象が観察される。音や振動などの伝播現象はもちろんではあるが、拡散現象のようにエネルギー散逸を伴う現象においても一定の形状を保ちながら伝播する現象が観察される。一定の形状を保って、一定の速度で移動する解を進行波解という。しかし、一定の形状を保つには、拡散による散逸効果を補うような形状による駆動力や非線形性による駆動力が必要となる。本講演では、拡散項と反応項のみより構成される反応拡散方程式

$$u_t = \Delta u + f(u) \quad (1.1)$$

を取り上げ、その解の形状について考察していく。ここで $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$, $u_t := \partial u / \partial t$, $\Delta u := \sum_{j=1}^N \partial^2 u / \partial x_j^2$ としている。この方程式の進行波解の性質は、常微分方程式 $u_t = f(u)$ の解の挙動から2つの場合に大別される。

- 単安定系：安定な定数定常解が1つの場合 (例：フィッシャー・KPP 方程式)
- 双安定系：安定な定数定常解が2つの場合 (例：アレン・カーン・南雲方程式)

詳しくは後述するが、進行波解の性質が両者では大きく異なってくるため、双安定系、その中でもアレン・カーン・南雲 (Allen-Cahn-Nagumo) 方程式を取り扱う。特に断らない限り、 f は $0, a, 1$ のみを零点にもつ関数で

$$f'(0) < 0, \quad f'(1) < 0, \quad f'(a) > 0, \quad \int_0^1 f(s) ds > 0 \quad (1.2)$$

をみたすとする。具体的な例としては、 $f(u) = u(1-u)(u-a)$ が挙げられる。この方程式は、アレン・カーン方程式や南雲方程式と呼ばれるので、本講演では、アレン・カーン・南雲方程式と呼ぶこととし、この方程式の伝播現象を解明する基礎となる進行波解および全域解について解説する。全域解とは、 $t \in \mathbb{R}$ で存在する解のことである。反応拡散方程式は、放物型方程式なので、正の時刻に対してのみ適切なのであるが、負の時刻に対しても存在するような特殊な解を考えていることになる。全域解は、伝播現象の中で普遍的に観察される挙動を与えている。

2. 1次元進行波解

アレン・カーン・南雲方程式の1次元進行波解は、相平面解析により求めることができる (例えば [8] 参照)。以下知られている結果をまとめておく。(1.2) より、ある $c_0 < 0$ が存在し、安定定数定常解 0 と 1 を結ぶ以下のような単調進行波解が存在する：

$$-c_0 \psi'_0 = \psi''_0 + f(\psi_0), \quad \psi'_0 > 0, \quad \lim_{z \rightarrow -\infty} \psi_0(z) = 0, \quad \lim_{z \rightarrow \infty} \psi_0(z) = 1.$$

本研究は JSPS 科研費 JP26287024, JP15K04963, JP16K13778, JP16KT0022 の助成を受けたものである。

*〒164-8525 東京都中野区中野 4-21-1

これは、安定な定数定常解をつなぐ進行波解になっており、平行移動を除いて一意である。更に、 $c_1^* > 0$ と $c_2^* < 0$ が存在し、 $c_1 > c_1^*$, $c_2 < c_2^*$ をみたす任意の c_1, c_2 に対し、

$$\begin{aligned} -c_1 \psi_1' &= \psi_1'' + f(\psi_1), \quad \psi_1' > 0, \quad \lim_{z \rightarrow -\infty} \psi_1(z) = 0, \quad \lim_{z \rightarrow \infty} \psi_1(z) = a, \\ -c_2 \psi_2' &= \psi_2'' + f(\psi_2), \quad \psi_2' > 0, \quad \lim_{z \rightarrow -\infty} \psi_2(z) = a, \quad \lim_{z \rightarrow \infty} \psi_2(z) = 1 \end{aligned} \quad (2.1)$$

をみたす進行波解が存在する。これらは、安定な定数定常解と不安定な定数定常解をつなぐ進行波解となっており、この場合は一意的ではない。

3. 1次元全域解

この節では、 $N = 1$ として、1次元全域解について調べていこう。全域解全体の集合を $\mathcal{E}$ とおく。時刻 $-\infty$ から存在する解なので当然古典解になっている。 $\mathcal{E}$ の要素としてまず挙げられるのが、定常解である。定常解としては、定数定常解 $0, a, 1$ がある。また、(1.2) の条件下では、定在波と呼ばれる正值定常解 u^* で

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} u^*(x) = 0$$

をみたすものが存在する。空間周期定常解も $\mathcal{E}$ に属する。また、不安定定数定常解 a と安定定数定常解 0 や 1 とをつなぐ以下のような解 $W_{\pm}(t)$ も $\mathcal{E}$ に属する：

$$W_{\pm}'(t) = f(W_{\pm}(t)), \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} W_{\pm}(t) = a, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} W_+(t) = 1, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} W_-(t) = 0.$$

空間非一様な不安定定常解 u^* と安定定数定常解をつなぐ解 $w_{\pm}(x, t)$ も存在する。つまり、

$$w_{\pm, t} = \Delta w_{\pm} + f(w_{\pm}), \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} w_{\pm}(x, t) = u^*(x), \quad \lim_{t \rightarrow \infty} w_+(x, t) = 1, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} w_-(x, t) = 0$$

をみたす解となっている。詳しくは、[6] を参照してほしい。

第2節で定めた進行波解 ψ_0, ψ_1 および ψ_2 も、 $\mathcal{E}$ に属する。

次に、進行波解を部品とする全域解を構成していこう。

定理 3.1 ([25]). $N = 1$ とする。このとき、

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \left\{ \sup_{x \leq 0} |\Phi_1(x, t) - \psi_0(-x - c_0 t)| + \sup_{x \geq 0} |\Phi_1(x, t) - \psi_0(x - c_0 t)| \right\} = 0$$

をみたす全域解 Φ_1 が存在する。さらに、

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} |\Phi_1(x, t) - 1| = 0$$

が成り立つ。

この定理は、まず、柳下 [25] によって不変多様体の理論を用いて示された。[6] において、優解・劣解を用いた手法が開発され、[7, 2, 12] へと発展していった。現在では、離散モデルや非局所項などを含む問題にも応用されている。ここでは、優解・劣解を用いた手法の概略を紹介しよう。

$$\mathcal{F}[u] := u_t - u_{xx} - f(u)$$

と定義しよう．優解，劣解とはそれぞれ $\mathcal{F}[u] \geq 0$, $\mathcal{F}[u] \leq 0$ をみたすことを意味している．優解 U^+ と劣解 U^- が $U^- \leq U^+$ をみたすとき，その間に解があることが知られている [18, 23]．また，

$$U^-(x, t) \leq U^+(x, t) \leq U^-(x, t - \tau(t)), \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} \tau(t) = 0$$

がみたされるとき，その解は優解と劣解の間で一意的であることもわかる [6, 2]．それでは，どのように優解・劣解を構成すればいいのだろうか？ 補助関数

$$Q_1(y, z) := 1 - (1 - y)(1 - z), \quad (3.1)$$

を用いて

$$U^\pm(x, t) := Q_1(\psi_0(-x + p_\pm(t)), \psi_0(x + p_\pm(t)))$$

の形の優解・劣解を構成する．実際，ある正の関数 A と正定数 C_1 を用いて，

$$\mathcal{F}[U^+] \geq A(x, p_+) (p'_+ + c_0 - C_1 e^{\gamma p_+})$$

が得られる．従って， $p_\pm$ を

$$p'_\pm = -c_0 \pm C_1 e^{\gamma p_\pm}$$

の解とすることで，優解・劣解を構成することができる． $p_\pm(t)$ は $t \rightarrow -\infty$ のとき，その主要部は $|c_0|t$ なので， $e^{\gamma p_\pm}$ は非常に小さいことに注意しておく．

この定理は，2つの進行波解が衝突する際の普遍的な解の挙動を与えている．これを一般化すると，

$$c_1 > c_2 > \cdots > c_k \quad (3.2)$$

をみたす k 進行波解 $\{(c_j, \phi_j), j = 1, 2, \dots, k\}$ ($k \geq 2$) に対して，

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \left\{ \sum_{1 \leq j \leq k} \sup_{w_{j-1}(t) < x < w_j(t)} |\Phi(x, t) - \phi_j(x - c_j t + \xi_j)| \right\} = 0$$

をみたす定数 $\xi_1, \dots, \xi_k$ が存在するとき， Φ を k 進行波解 $\{(c_j, \phi_j), j = 1, 2, \dots, k\}$ ($k \geq 2$) を起源とする全域解と呼ぶことにする．ここで， $w_j(t) := -(c_j + c_{j+1})t/2$ とし， $w_0(t) := -\infty$, $w_k(t) := \infty$ と定義した．定理 3.1 は，2 進行波解を起源とする全域解を与えている．

[12] では，別のタイプの 2 進行波解を起源とする全域解を構成している．

定理 3.2 ([12]). $N = 1$ とする．このとき，

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \left\{ \sup_{x \leq (c_1 + c_2)t/2} |\Phi_2(x, t) - \psi_1(x - c_1 t)| + \sup_{x \geq (c_1 + c_2)t/2} |\Phi_2(x, t) - \psi_2(x - c_2 t)| \right\} = 0,$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} |\Phi_2(x, t) - \psi_0(x - c_0 t + x_0)| = 0.$$

をみたす全域解 Φ_2 が存在する．ここで x_0 は定数とする．また， $c_1^* \leq c_1 < -c_0$ が成り立つとき，

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \left\{ \sup_{x \leq (c_0 - c_1)t/2} |\Phi_3(x, t) - \psi_1(-x - c_1 t)| + \sup_{x \geq (c_0 - c_1)t/2} |\Phi_3(x, t) - \psi_0(x - c_0 t)| \right\} = 0,$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{x \in [-\xi, \infty)} |\Phi_3(x, t) - 1| = 0 \quad (\forall \xi > 0), \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \inf_{x \in \mathbb{R}} \Phi_3(x, t) = a$$

をみたす全域解 Φ_3 が存在する．

ここで、 ψ_1, ψ_2 の平行移動は簡単のため無視している。証明は、定理 3.1 と同様であるが、証明の際に進行波解をつなぐ補助関数として (3.1) の代わりにそれぞれ

$$\begin{aligned} Q_2(y, z) &:= \frac{(1-a)yz}{y(z-a) + a(1-z)}, \\ Q_3(y, z) &:= \frac{a(y+z) - (1+a)yz}{a-yz} \end{aligned}$$

を用いている。詳細は、[12] を参照してほしい。

それでは、以下のような疑問が自然に湧き上がる。

3 以上の進行波解を起源すると全域解はあるのか？

[4] では、肯定的な答えを与えている。

定理 3.3 ([4]). $N = 1$ とする。 $c_1^* \leq c_1 < -c_0$ および $c_1^* \leq \tilde{c}_1 < -c_0$ をみたすとき、

$$\begin{aligned} &\lim_{t \rightarrow -\infty} \left\{ \sup_{x \leq (c_1 - c_0)t/2} |\Phi_4(x, t) - \psi_0(-x - c_0 t)| + \sup_{(c_1 - c_0)t/2 \leq x \leq (c_1 + c_2)t/2} |\Phi_4(x, t) - \psi_1(x - c_1 t)| \right. \\ &\quad \left. + \sup_{x \geq (c_1 + c_2)t/2} |\Phi_4(x, t) - \psi_2(x - c_2 t)| \right\} = 0, \\ &\lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} |\Phi_4(x, t) - 1| = 0, \\ &\lim_{t \rightarrow -\infty} \left\{ \sup_{x \leq (c_1 - c_0)t/2} |\Phi_5(x, t) - \psi_0(-x - c_0 t)| + \sup_{(c_1 - c_0)t/2 \leq x \leq (c_1 - \tilde{c}_1)t/2} |\Phi_5(x, t) - \psi_1(x - c_1 t)| \right. \\ &\quad \left. + \sup_{x \geq (c_1 - \tilde{c}_1)t/2} |\Phi_5(x, t) - \tilde{\psi}_1(-x - \tilde{c}_1 t)| \right\} = 0, \\ &\lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} |\Phi_5(x, t) - \psi_0(-x - c_0 t + x_0)| = 0 \end{aligned}$$

となる (1.1) の全域解 Φ_4, Φ_5 がそれぞれ存在する。ここで、 $(\tilde{c}_1, \tilde{\psi}_1)$ は (2.1) をみたす進行波解で x_0 は定数とする。

Φ_4 と Φ_5 の存在を示すための補助関数としては、それぞれ

$$\begin{aligned} Q_4(y, z, w) &:= z + (1-z) \frac{(1-y)z(w-a) + y(a-z)(1-w)}{(1-y)z(1-a) + (a-z)(1-w)}, \\ Q_5(y, z, w) &:= z + \frac{(1-y)z(a-w)(-z) + y(a-z)w(1-z)}{(1-y)za + (a-z)w} \end{aligned}$$

を用いている [4]。次に、4 進行波解を起源とする全域解について考えよう。

定理 3.4 ([4]). $N = 1$ とする。 $c_1^* \leq c_1 < -c_0$ のとき、

$$\begin{aligned} &\Phi_6(-x, t) = \Phi_6(x, t), \\ &\lim_{t \rightarrow -\infty} \left\{ \sup_{|x| \leq (c_0 - c_1)t/2} |\Phi_6(x, t) - \psi_1(-|x| - c_1 t)| + \sup_{|x| \geq (c_0 - c_1)t/2} |\Phi_6(x, t) - \psi_0(|x| - c_0 t)| \right\} = 0, \\ &\lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} |\Phi_6(x, t) - 1| = 0 \end{aligned}$$

をみたす x 軸対称な (1.1) の全域解 Φ_6 が存在する。

この全域解では、補助関数 Q の構成はできなかったため、対称な場合のみの証明になっている。さらに [4] では、次が示すことに成功している。

定理 3.5 ([4]). $N = 1$ とする。このとき、(3.2) をみたす 5 以上の進行波解を起源とする全域解は存在しない。

4. 多次元進行波解

1次元進行波解を合成することにより、多次元進行波解を構成することもできる。以下、 $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N$ を $\mathbf{x}' = (x_1, \dots, x_{N-1}) \in \mathbb{R}^{N-1}$ と x_N に分け、 x_N 方向に動く進行波解を考える。 $z = x_N - ct$ とすると (1.1) の進行波解 $V(\mathbf{x}', z)$ は

$$\mathcal{L}[V] := -cV_z - \Delta V - f(V)$$

とにおいて、次の楕円型方程式の解となる:

$$\mathcal{L}[V] = 0. \quad (4.1)$$

解の遠方での条件として、

$$\lim_{z \rightarrow -\infty} V(\mathbf{x}', z) = 1, \quad \lim_{z \rightarrow \infty} V(\mathbf{x}', z) = 0 \quad (4.2)$$

を課すことにする。1次元進行波解 ψ_0 より、 $V(\mathbf{x}', z) = \psi_0(-z)$ とおくと、 $c = -c_0 > 0$ として、(4.1) をみたしている。これは平面進行波解と呼ばれている。 $\mathbf{n} \in \mathbb{S}^{N-1}$ として、 $\psi_0(\mathbf{x} \cdot \mathbf{n} - c_0 t)$ も $\mathbf{n}$ 方向に速度 c_0 で動く平面進行波解 ($c_0 < 0$ なので、 $-\mathbf{n}$ 方向に $|c_0|$ で動く平面進行波解) となっているが、 x_N 方向には、速度

$$c = \frac{c_0}{n_N} \quad (4.3)$$

で動く進行波解となっている。ここで n_N は $\mathbf{n}$ の第 N 成分である。従って、2次元空間の場合、 x_N 方向に速度 c となるようなベクトル $\mathbf{n} \in \mathbb{S}^1$ は以下の2つである:

$$\left(\pm \frac{\sqrt{c^2 - c_0^2}}{c}, \frac{c_0}{c} \right).$$

これより、2つの平面進行波解を重ね合わせた

$$V_1^-(x, y) := \max \left\{ \psi_0 \left(\frac{\sqrt{c^2 - c_0^2}}{c} x + \frac{c_0}{c} y - c_0 t \right), \psi_0 \left(-\frac{\sqrt{c^2 - c_0^2}}{c} x + \frac{c_0}{c} y - c_0 t \right) \right\}$$

も x_N 方向に速度 c で移動していることがわかる。しかし、これは (4.1) の解にはならず、劣解になる。従って、この劣解から出発する全域解が進行波解になることが期待できる。実際、以下のようにV字型進行波解を構成することができる。

定理 4.1 ([9, 10, 16, 17]). $N = 2$ とする。このとき、任意の $c > c_0$ に対し、

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \sup_{x^2 + y^2 \geq R^2} |V_1(x, y) - V_1^-(x, y)| = 0$$

をみたす (4.1), (4.2) の解 $V_1(x, z; c)$ が存在する。

ここで、双安定系の1次元進行波解の速度は一意的であったが、2次元以上の空間では、進行波解の速度は一意的でないことに注意しておく。

3次元以上の空間では、(4.3) をみたす $\mathbf{n}$ の選択肢は増える。(4.3) をみたす $\mathbf{n}_1, \dots, \mathbf{n}_M \in \mathbb{S}^{N-1}$ に対して、

$$V_2^-(\mathbf{x}) := \psi_0 \left(\max_{1 \leq j \leq M} (\mathbf{n}_j \cdot \mathbf{x}) \right)$$

は (4.1) の劣解となる。実際、谷口は、以下のような角錐型進行波解の構成に成功した。

定理 4.2 ([19, 20]). $N \geq 3$ とする. このとき, 任意の $c > c_0$ に対して,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \sup_{|\mathbf{x}'|^2 + x_N^2 \geq R^2} |V_2(\mathbf{x}', x_N) - V_2^-(\mathbf{x}', x_N)| = 0$$

をみたす (4.1), (4.2) の解 $V_2(\mathbf{x}', x_N; c)$ が存在する.

x_N 軸に回転対称な進行波解については, [9, 10] で示されている.

定理 4.3 ([9, 10]). $N \geq 3$ とする. このとき, 任意の $c > c_0$ に対して,

$$\begin{aligned} V_3(\mathbf{x}', x_N) &= \tilde{V}_3(|\mathbf{x}'|, x_N), \\ 0 < V_3(\mathbf{x}', x_N) &< 1, \\ \lim_{|\mathbf{x}'| \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{x}'}{|\mathbf{x}'|} \cdot \nabla \gamma(\mathbf{x}') &= \frac{\sqrt{c^2 - c_0^2}}{c_0} \end{aligned}$$

をみたす (4.1), (4.2) の解 $V_3(\mathbf{x}', x_N; c)$ が存在する. ここで, γ は $\lambda \in (0, 1)$ のときの V_3 の等高面 $\{(\mathbf{x}', x_N) \mid V_3(\mathbf{x}', x_N) = \lambda\}$ を表す関数とする. つまり, $\{(\mathbf{x}', x_N) \mid V_3(\mathbf{x}', x_N) = \lambda\} = \{x_N = \gamma(\mathbf{x}'; \lambda)\}$ とする.

この進行波解は, 円錐型進行波解と呼ばれる. 谷口は [21, 22] において, 面の数を増やすことで円錐型進行波解の存在も示している. さらに谷口は, この結果を凸錐型にまで拡張した. すべての主曲率が正の滑らかな境界をもつ任意の狭義凸集合 K_0 をとる. 平行移動をすることで原点を含むとしてよく,

$$K_0 = \{r\omega \in \mathbb{R}^{N-1} \mid \omega \in \mathbb{S}^{N-2}, 0 \leq r \leq g(\omega)\}$$

となる C^2 級関数 g が決定される.

定理 4.4 ([21, 22]). $N \geq 3$ とする. このとき, 任意の $c > c_0$ と上述の任意の関数 g に対して

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \sup_{x^2 + y^2 \geq R^2} \left| V_4(\mathbf{x}', x_N) - \min_{\omega \in \mathbb{S}^{N-2}} V_3(|\mathbf{x}' - g(\omega)\omega|, x_N) \right| = 0$$

をみたす (4.1), (4.2) の解 V_4 が存在する.

ここでは, この進行波解を凸錐型進行波解と呼ぶことにする. この結果は, 任意の狭義凸集合に対して進行波解が構成できることを意味している.

なお, ここでは触れないが, [1], [3] や [5] などの結果もあることを付記しておく.

5. 多次元進行波解と全域解の関係

ここでは, N 次元空間上の進行波解 V と $N-1$ 次元空間上の全域解 Φ の関係について考えよう. 例えば, 全域解 $\Phi_1(x, t)$ は, $t \rightarrow -\infty$ のとき有界区間では $u = 0$ であり, 遠方より $u = 1$ が押し寄せてくる解になっている. V字型進行波解 V_1 も $t \rightarrow -\infty$ では $u = 0$ であるが, 遠方より $u = 1$ が押し寄せてくる解になっている. つまり, 大雑把な情報だけに着目すると, $V(\mathbf{x}', -t)$ のような挙動をする全域解の存在, あるいは $\Phi(\mathbf{x}', -x_N)$ のような形状の進行波解の存在を示唆している.

まず, 全域解 $w_{\pm}$ は, 不安定定常解 u^* と安定定数定常解 0 あるいは 1 をつなぐ進行波解の存在を示唆しており, [13] において示されている.

また, 定理 3.2 で与えられた全域解 Φ_2 は, a と ψ_0 をつなぐ進行波解の存在を示唆している. 実際, 以下のような進行波解を構成することができる.

定理 5.1 ([14]). $f(u) = u(1-u)(u-1/2)$ と仮定し, $N = 2$ とする. このとき, 任意の $\theta_0 \in (0, \pi/2)$ および

$$c \geq \frac{3}{2\sqrt{2}\cos\theta_0}$$

に対して,

$$\lim_{s \rightarrow \infty} Y(s \cos \theta, s \sin \theta) = \begin{cases} 0 & \left(\pi - \theta_0 < \theta < \frac{3\pi}{2} \right), \\ \frac{1}{2} & \left(\theta_0 < \theta < \pi - \theta_0 \right), \\ 1 & \left(-\frac{\pi}{2} < \theta < \theta_0 \right), \end{cases}$$

$$\lim_{y \rightarrow -\infty} Y(x, y) = \psi_0(x)$$

をみたす (1.1) の進行波解 $Y(x, y - ct)$ が存在する. さらに, Y は $Y(0, y) = 1/2$ をみたし, y について $x > 0$ では単調減少, $x < 0$ では単調増加となっている.

逆に, 谷口 [22] によって得られた凸錐型進行波解は, $t \rightarrow -\infty$ で任意の狭義凸集合の等距離超曲面に漸近する全域解の存在を示唆している. 第4節で定義したように狭義凸集合 K_0 に対して, K_0 の外側を正とする $\mathbf{x}' \in \mathbb{R}^{N-1}$ からの符号付き距離を $h(\mathbf{x}')$ と定義すると, 以下のような定理が成り立つことがわかる.

定理 5.2 ([15]). $N \geq 3$ とする. このとき,

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \inf_{p > 0} \sup_{\mathbf{x}' \in \mathbb{R}^{N-1}} \left| \Phi_7(\mathbf{x}', t) - \psi_0(h(\mathbf{x}') - p) \right| = 0$$

をみたす (1.1) の $\mathbb{R}^{N-1}$ 上の全域解 Φ_7 が存在する.

柳下 [24] では, 原点より遠方に向かって伝播していく解を取り扱っているが, この全域解は, 中心に向かって伝播してくる解になっている. [24] による示唆が大きいことを付記しておく.

参考文献

- [1] H. Berestycki, and F. Hamel, Generalized transition waves and their properties, *Communications on Pure and Applied Mathematics*, **65** (2012), pp. 592-648.
- [2] X.F. Chen, and J.-S. Guo, Existence and uniqueness of entire solutions for a reaction-diffusion equation, *Journal of Differential Equations*, **212** (2005) 62-84.
- [3] X.F. Chen, J.S. Guo, F. Hamel, H. Ninomiya and J. M. Roquejoffre, Traveling waves with paraboloid like interfaces for balanced bistable dynamics, *Annales de l'Institut Henri Poincaré C: Non Linear Analysis*, **24** (2007) 369-393.
- [4] Y.Y. Chen, J.S. Guo, H. Ninomiya and C.H. Yao, Entire solutions originating from monotone fronts to the Allen-Cahn equation, *preprint*.
- [5] M. del Pino, M. Kowalczyk and J. Wei, Traveling waves with multiple and nonconvex fronts for a bistable semilinear parabolic equation, *Communications on Pure and Applied Mathematics*, **66** (2013), 481-547.
- [6] Y. Fukao, Y. Morita, and H. Ninomiya, Some entire solutions of the Allen-Cahn equation, *Taiwanese J. Math.*, **8** (2004), 15-32.
- [7] J.S. Guo and Y. Morita, Entire solutions of reaction-diffusion equations and an application to discrete diffusive equations, *Discrete Contin. Dyn. System*, **12** (2005), 193-212.

- [8] K. P. Hadeler, and F. Rothe, Travelling fronts in nonlinear diffusion equations, *Journal of Mathematical Biology*, **2** (1975), 251-263.
- [9] F. Hamel, R. Monneau, and J.-M. Roquejoffre, Existence and qualitative properties of multidimensional conical bistable fronts, *Disc. Cont. Dyn. Systems* **13** (2005), 1069–1096.
- [10] F. Hamel, R. Monneau, and J.-M. Roquejoffre, Asymptotic properties and classification of bistable fronts with Lipschitz level sets, *Disc. Cont. Dyn. Systems* **14** (2006), 75–92.
- [11] F. Hamel and N. Nadirashvili, Travelling fronts and entire solutions of the Fisher-KPP equation in $\mathbb{R}^N$, *Arch. Ration. Mech. Anal.*, **157** (2001), 91–163.
- [12] Y. Morita and H. Ninomiya Entire solutions with merging fronts to reaction-diffusion equations, *J. Dynam. Differential Equations*, **18** (2006), 841–861
- [13] Y. Morita and H. Ninomiya, Monostable-type traveling waves of bistable reaction-diffusion equations in the multi-dimensional space, *Bull. Inst. Math. Acad. Sin.(NS)* **3** (2008), 567-584.
- [14] H. Ninomiya, Entire solutions and traveling wave solutions of the Allen-Cahn-Nagumo equation, submitted to *Disc. Cont. Dyn. Systems*.
- [15] H. Ninomiya, Multi-dimensional entire solutions of the Allen-Cahn-Nagumo equation, *in preparation*.
- [16] H. Ninomiya and M. Taniguchi, Existence and global stability of traveling curved fronts in the Allen-Cahn equations, *J. Differential Equations*, **213** (2005), 204–233.
- [17] H. Ninomiya and M. Taniguchi, Global stability of traveling curved fronts in the Allen-Cahn equations, *Disc. Cont. Dyn. Systems*, **15** (2006), 819–832.
- [18] D. H. Sattinger, On the stability of waves of nonlinear parabolic systems, *Adv. Math.* **22** (1976), 312-355.
- [19] M. Taniguchi, Traveling fronts of pyramidal shapes in the Allen-Cahn equations, *SIAM J. Math. Anal.*, **39** (2007), 319-344.
- [20] M. Taniguchi, The uniqueness and asymptotic stability of pyramidal traveling fronts in the Allen–Cahn equations, *Journal of Differential Equations*, **246** (2009), 2103-2130.
- [21] M. Taniguchi, Multi-dimensional traveling fronts in bistable reaction-diffusion, *Discrete Contin. Dyn. System*, **32** (2012), 1011-1046.
- [22] M. Taniguchi, An (N-1)-dimensional convex compact set gives an N-dimensional traveling front in the Allen–Cahn equation, *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, **47** (2015) 455-476.
- [23] X. Wang, On the Cauchy problem for reaction-diffusion equations, *Transactions of the American Mathematical Society*, **337** (1993), 549-590.
- [24] H. Yagisita, Nearly spherically symmetric expanding fronts in a bistable reaction-diffusion equation, *Journal of Dynamics and Differential Equations*, **13** (2001), 323-353.
- [25] H. Yagisita, Backward global solutions characterizing annihilation dynamics of travelling fronts, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, **39** (2003), 117-164.