

特別講演

圧縮性 Navier-Stokes 方程式に対する 不適切性について

岩渕 司 (東北大学大学院 理学研究科)

1. 導入と主定理

次の圧縮性 Navier-Stokes 方程式の初期値問題を考える.

$$\begin{cases} \partial_t \tilde{\rho} + \operatorname{div}(\tilde{\rho} u) = 0, & t > 0, x \in \mathbb{R}^n, \\ \partial_t(\tilde{\rho} u) + \operatorname{div}(\tilde{\rho} u \otimes u) + \nabla P = \mathcal{L}u, & t > 0, x \in \mathbb{R}^n, \\ \tilde{\rho}(0, x) = \tilde{\rho}_0(x), u(0, x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

ただし, $\mathcal{L}$ は $\mu > 0, 2\mu + \lambda > 0$ を満たす μ, λ に対して $\mathcal{L} := \mu\Delta + (\lambda + \mu)\nabla \operatorname{div}$ で与えられる微分作用素である. $\tilde{\rho}, u$ はそれぞれ流体の密度, 速度を表す未知関数である. P は圧力を表しここでは順圧性が成り立つとし, $P = P(\tilde{\rho}) = \tilde{\rho}^\alpha$ ($\alpha > 1$) を満たすものとする. 真空の場合を排除するため, ある正定数 $\underline{\nu}$ が存在し, $\tilde{\rho} \geq \underline{\nu}$ が成り立つ場合のみを考える. $\tilde{\rho} = 1 + \rho$ とおき上記方程式を次のように書き換える.

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div}((1 + \rho)u) = 0, & t > 0, x \in \mathbb{R}^n, \\ \partial_t u - \mathcal{L}u + (u \cdot \nabla)u + \frac{\nabla P(1 + \rho)}{1 + \rho} = -\frac{\rho}{1 + \rho} \mathcal{L}u, & t > 0, x \in \mathbb{R}^n, \\ \rho(0, x) = \rho_0(x), u(0, x) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \quad (1)$$

解の存在および適切性に関しては数多くの研究結果が知られている. Serrin [16], Nash [15], Itaya [10], Matsumura-Nishida [13], Tani [17], Hoff-Zumbrun [9] による論文が基本的であると思われるが, これらの論文では尺度不変性が成り立つ関数空間よりも狭い関数空間で適切性が示されている. 一方で, Danchin [3] は Besov 空間を導入することで初期値が尺度不変性が成り立つ空間に相当する $B_{2,1}^{\frac{n}{2}}(\mathbb{R}^n) \times B_{2,1}^{\frac{n}{2}-1}(\mathbb{R}^n)$ において適切性を証明した ([4], [5], [6] も参照する). ここで, 解 (ρ, u) に対して, $(\rho_\lambda, u_\lambda)$ を

$$\rho_\lambda(t, x) := \rho(\lambda^2 t, \lambda x), \quad u_\lambda(t, x) := \lambda u(\lambda^2 t, \lambda x) \quad \lambda > 0$$

と定めると, 圧力を無視した場合の方程式を不変に保ち, Besov 空間 $\dot{B}_{2,1}^{\frac{n}{2}}(\mathbb{R}^n) \times \dot{B}_{2,1}^{\frac{n}{2}-1}(\mathbb{R}^n)$ はノルム不変性が成り立つ関数空間である. Haspot [8] はより広い空間 $B_{p_0,1}^{\frac{n}{p_0}}(\mathbb{R}^n) \times \dot{B}_{p_1,1}^{\frac{n}{p_1}-1}(\mathbb{R}^n)$ ($1/p_0 + 1/p_1 > 1/n, 0 \leq 1/p_1 - 1/p_0 \leq 1/n$) において解の存在を示した. ここで, $p = p_0 = p_1$ とすると, Haspot の結果では $p < 2n$ の場合に解が得られる. 逆に $p > 2n$ の場合には解の初期値連続依存性が成り立たないことが Chen-Miao-Zhang [2] によって証明された. 本講演では, $p = 2n$ の場合を考察する.

以下, Besov 空間 $\dot{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ の定義, 本講演の定理を述べる. $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ は急減少関数の空間, $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ は緩増加超関数の空間とする.

定義 (Besov 空間). $\{\phi_j\}_{j \in \mathbb{Z}} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ は次を満たす 1 の分解とする.

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} \mathcal{F}[\phi_j](\xi) = 1 \text{ for any } \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \quad \mathcal{F}[\phi_j](\xi) \geq 0,$$

$$\text{supp } \mathcal{F}[\phi_j] \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n \mid 2^{j-1} \leq |\xi| \leq 2^{j+1}\}, \quad \mathcal{F}[\phi_j](\xi) = \mathcal{F}[\phi_0](2^{-j}\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

$s \in \mathbb{R}$, $1 \leq p, q \leq \infty$ に対して, Besov 空間 $\dot{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n)$ を以下で定義する. $s < n/p$ あるいは $(s, q) = (n/p, 1)$ ならば

$$\dot{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n) := \left\{ f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \mid \|f\|_{\dot{B}_{p,q}^s} < \infty, f = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \phi_j * f \text{ in } \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \right\},$$

$s > n/p$ あるいは $s = n/p$, $q > 1$ ならば

$$\dot{B}_{p,q}^s(\mathbb{R}^n) := \left\{ f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) / \mathcal{P}(\mathbb{R}^n) \mid \|f\|_{\dot{B}_{p,q}^s} < \infty \right\},$$

ただし, $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ は多項式全体の集合を表し, $\|f\|_{\dot{B}_{p,q}^s}$ は以下で定義されるノルムである.

$$\|f\|_{\dot{B}_{p,q}^s} := \left\| \left\{ 2^{sj} \|\phi_j * f\|_{L^p} \right\}_{j \in \mathbb{Z}} \right\|_{\ell(\mathbb{Z})}.$$

以下が本講演の主定理である.

定理 ([11]). $n \geq 2$ とする. ある初期値の列 $\{u_{0,N}\}_{N=1}^\infty \subset \dot{B}_{2n,1}^{-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^n)$, 時刻の列 $\{T_N\}_{N=1}^\infty$, 初期条件 $(\rho_N(0), u_N(0)) = (0, u_{0,N})$ を満たす (1) の解の列 $\{(\rho_N, u_N)\}_{N=1}^\infty$ が存在して, 次が成り立つ.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|u_{0,N}\|_{\dot{B}_{2n,1}^{-\frac{1}{2}}} = 0, \quad \lim_{N \rightarrow \infty} T_N = 0, \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \|u_N(T_N)\|_{\dot{B}_{2n,1}^{-\frac{1}{2}}} = \infty.$$

注意. 定理の証明では初期値を $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ に属する関数で構成するため時間局所的には滑らかな解の列に対して連続性を調べる. また, 定理の証明で用いる初期値と解に対して, 適切性が得られる空間 $B_{2,1}^{\frac{n}{2}}(\mathbb{R}^n) \times B_{2,1}^{\frac{n}{2}-1}(\mathbb{R}^n)$ において連続性を考察すると次を得る.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|u_{0,N}\|_{B_{2,1}^{\frac{n}{2}-1}} = \infty, \quad \lim_{N \rightarrow \infty} T_N = 0, \quad \lim_{N \rightarrow \infty} \|u_N(T_N)\|_{B_{2n,1}^{\frac{1}{2}-1}} = \infty.$$

注意. 定理の主張における解は次の積分方程式を満たす (ρ, u) である.

$$\begin{cases} \rho(t) = \rho_0 - \int_0^t \text{div} \left((1 + \rho(\tau)) u(\tau) \right) d\tau, & t > 0, \\ u(t) = e^{t\mathcal{L}} u_0 - \int_0^t e^{(t-\tau)\mathcal{L}} \left((u \cdot \nabla) u + \frac{\nabla P(1 + \rho)}{1 + \rho} + \frac{\rho}{1 + \rho} \mathcal{L} u \right) d\tau, & t > 0. \end{cases}$$

ただし, $\{e^{t\mathcal{L}}\}_{t \geq 0}$ は $\mathcal{L}$ によって生成される半群とする. また (ρ_N, u_N) が属する関数空間は, 次の通り尺度不変性が成り立つ関数空間よりも大きい正則性を有する空間である.

$$\begin{aligned} \rho_N &\in C([0, T_N], \dot{B}_{n,1}^0(\mathbb{R}^n) \cap \dot{B}_{\infty,1}^0(\mathbb{R}^n)) \cap L^\infty(0, T_N; \dot{B}_{n,1}^1(\mathbb{R}^n) \cap \dot{B}_{\infty,1}^1(\mathbb{R}^n)), \\ u_N &\in C([0, T_N], \dot{B}_{n,1}^0(\mathbb{R}^n) \cap \dot{B}_{\infty,1}^0(\mathbb{R}^n)) \cap L^1(0, T_N; \dot{B}_{n,1}^2(\mathbb{R}^n) \cap \dot{B}_{\infty,1}^2(\mathbb{R}^n)). \end{aligned}$$

証明のアイデアは、非圧縮性 Navier-Stokes 方程式に対して $\dot{B}_{\infty,\infty}^{-1}(\mathbb{R}^3)$ における不適切性を取り扱った Bourgain-Pavlović の論文 [1] に基づく。最近の結果として、 $\dot{B}_{\infty,q}^{-1}(\mathbb{R}^3)$ ($1 \leq q \leq \infty$) における不適切性に関する論文 [18] も参照しておく。正則性が低い関数空間において小さく、線形解を非線形項に代入した第2近似のノルムが大きくなるような初期値と時刻の列を見つけ出すことが重要となる。加えて、第2近似がどんなに大きくともその時刻まで解が存在することを、適切性が成り立たない枠組みで証明する必要がある。論文 [1] では、初期値の正則性を弱めていったときに最も低い正則性が移流項 $(u \cdot \nabla)u$ から現れることを利用して証明していた。我々が取り扱う圧縮性 Navier-Stokes 方程式 (1) に対しては $p > 2n$ とし $\dot{B}_{p,1}^{\frac{n}{p}}(\mathbb{R}^n) \times \dot{B}_{p,1}^{\frac{n}{p}-1}(\mathbb{R}^n)$ において不適切性が Chen-Miao-Zhang [2] によって示されたが、この結果でも移流項から最も正則性が低い項を引き出している。一方、 $p = 2n$ の場合には状況が異なる。すなわち、以下の2つの項が同程度の正則性を持っていることがわかる：

$$(u \cdot \nabla)u, \quad \frac{\rho}{1+\rho} \mathcal{L}u.$$

第3節で詳しく述べるが、上記2項それぞれに対して第2近似を考え初期値に対する連続性を Besov 空間 $\dot{B}_{2n,q}^{-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^n)$ において考察すると、全ての $1 \leq q \leq \infty$ に対して不連続となる。一方で2つの項の和を考えると $n \leq q \leq \infty$ の場合は連続性が成り立つことがわかる。従って $p = 2n$ の場合はより精密な議論が必要となることが予想される。

以下、第2節では速度 u に対する積分方程式に関して、非線形項を発散形式で書き表すことができるか否かという観点から、正則性が最も低い項を同定する。非圧縮性の場合には、 $p > 2n$ の場合にも適切性が得られるが、非線形項を発散形式で記述できるという構造が重要である：

$$(u \cdot \nabla)u = \nabla \cdot (u \otimes u) \quad \text{if } \operatorname{div} u = 0.$$

一方、圧縮性の場合には全ての項を発散形式で書き表すことができないため適切性が得られる関数空間が制限される。そこで非線形項を divergence free を満たす成分と rotation free を満たす成分に分解して発散形式で書き表せない項を正則性が低い項として同定する。加えて積分方程式の非線形部分について、線形解を代入した第2近似を考える。第3節では、具体的な初期値を与えて第2節で同定した項が初期値の変動に関して連続性が成り立たないことを説明する。特に移流項 $(u \cdot \nabla)u$ のみよりも、 $(u \cdot \nabla)u + \frac{\rho}{1+\rho} \mathcal{L}u$ の方が少しだけ良い正則性を有することを説明する。

2. 正則性が最も低い項の同定

u に対する積分方程式は以下である。

$$u(t) = e^{t\mathcal{L}}u_0 - \int_0^t e^{(t-\tau)\mathcal{L}} \left((u \cdot \nabla)u + \frac{\nabla P(1+\rho)}{1+\rho} + \frac{\rho}{1+\rho} \mathcal{L}u \right) d\tau.$$

圧力 ∇P は他の非線形項よりも良い正則性を持つものとして、 $(u \cdot \nabla)u$ と $\frac{\rho}{1+\rho} \mathcal{L}u$ について調べることにする。まずはじめに、 u を divergence free 条件および rotation free 条件を満たすものに分解するために、射影作用素 P_σ, P_π を以下で定義する：

$$P_\sigma = 1 + \nabla(-\Delta)^{-1}\operatorname{div}, \quad P_\pi = \nabla(-\Delta)^{-1}\operatorname{div}.$$

これらの作用素は, Riesz 変換の有界性によって斉次 Besov 空間において有界線形作用素であるがあることがわかるため, 以下の分解を得る.

$$u = P_\sigma u + P_\pi u, \quad \mathcal{L} = \mu \Delta P_\sigma + (2\mu + \lambda) \Delta P_\pi. \quad (2)$$

さらに, 解 (ρ, u) の近似 (ρ_1, U) を以下のように導入する:

$$\rho_1(t) := - \int_0^t \operatorname{div} U \, d\tau, \quad U(t) := e^{t\mathcal{L}} u_0.$$

このとき, $(u \cdot \nabla)u$ について, u を U で近似し P_σ, P_π による分解から次を得る.

$$\begin{aligned} (u \cdot \nabla)u &\simeq (U \cdot \nabla)U \\ &= ((P_\sigma U + P_\pi U) \cdot \nabla)(P_\sigma U + P_\pi U) \\ &= \nabla \cdot (P_\sigma U \otimes P_\sigma U) + \nabla \cdot (P_\sigma U \otimes P_\pi U) + (P_\pi U \cdot \nabla)P_\sigma U + \frac{1}{2} \nabla |P_\pi U|^2. \end{aligned} \quad (3)$$

発散形式で書かれている項は非圧縮性の場合と同様に $p > 2n$ の場合でも適切性が得られるような構造であるため, 第3項 $(P_\pi U \cdot \nabla)P_\sigma U$ が最も正則性が低い項とみなすことにする.

一方, $\frac{\rho}{1+\rho} \mathcal{L}U$ について, (ρ, u) を (ρ_1, U) で近似し, ρ_1 の L^∞ -ノルムが小さいと仮定すると次を得る.

$$\begin{aligned} \frac{\rho}{1+\rho} \mathcal{L}u &\simeq \frac{\rho_1}{1+\rho_1} \mathcal{L}U \\ &\simeq \rho_1 \mathcal{L}U \\ &= -\mu \left(\int_0^t \operatorname{div} P_\pi U \, d\tau \right) \Delta P_\sigma U - (2\mu + \lambda) \left(\int_0^t \operatorname{div} P_\pi U \, d\tau \right) \Delta P_\pi U. \end{aligned}$$

時刻が $t = 0$ に近いならば, 上式最右辺の第2項は (3) の最右辺の $\nabla |P_\pi U|^2$ と同様に発散形式の構造をもつことが期待できる. したがって上式最右辺第1項の正則性が低いと予想されるため, 以下について初期値に対する連続性を考える.

$$\int_0^t e^{(t-\tau)\mathcal{L}} \left\{ (P_\pi U \cdot \nabla)P_\sigma U - \mu \left(\int_0^\tau \operatorname{div} P_\pi U \, d\tilde{\tau} \right) \Delta P_\sigma U \right\} d\tau.$$

さらに, 上式の精密な評価を行うため第2項を以下のように変形する.

$$\begin{aligned} & -\mu \left(\int_0^\tau \operatorname{div} P_\pi U \, d\tilde{\tau} \right) \Delta P_\sigma U \\ &= \mu \left(\int_0^\tau \nabla \operatorname{div} P_\pi U \, d\tilde{\tau} \right) \cdot \nabla P_\sigma U - \mu \nabla \cdot \left\{ \left(\int_0^\tau \operatorname{div} P_\pi U \, d\tilde{\tau} \right) \nabla P_\sigma U \right\}. \end{aligned}$$

第2項は発散形式であるためより大きい正則性を持つと期待できる. 第1項について $\nabla \operatorname{div} P_\pi e^{\tilde{\tau}\mathcal{L}} = (2\mu + \lambda)^{-1} \partial_{\tilde{\tau}} P_\pi e^{\tilde{\tau}\mathcal{L}}$ より $\tilde{\tau}$ に関する積分を実行して以下を得る.

$$\mu \left(\int_0^\tau \nabla \operatorname{div} P_\pi U \, d\tilde{\tau} \right) \cdot \nabla P_\sigma U = \frac{\mu}{2\mu + \lambda} \left(P_\pi U(\tau) - P_\pi u_0 \right) \cdot \nabla P_\sigma U.$$

したがって, 非線形項の近似として以下を考え, 初期値 u_0 に関する連続性を考える.

$$\int_0^t e^{(t-\tau)\mathcal{L}} \left\{ (P_\pi U \cdot \nabla)P_\sigma U + \frac{\mu}{2\mu + \lambda} \left(P_\pi U - P_\pi u_0 \right) \cdot \nabla P_\sigma U \right\} d\tau, \quad U(t) = e^{t\mathcal{L}} u_0. \quad (4)$$

ここで射影作用素 P_σ, P_π の性質 (2) より, $P_\sigma U(\tau)$ および $P_\pi U(\tau)$ を熱半群を使って以下のように書き表しておく.

$$P_\sigma U(\tau) = e^{\tau\mu\Delta} P_\sigma u_0, \quad P_\pi U(\tau) = e^{\tau(2\mu+\lambda)\Delta} P_\pi u_0.$$

3. 初期値の選択と証明の方針

R, δ は $R > 0, 0 < \delta < 1/8$ を満たす定数とし, 自然数 N に対して 初期値 $(\rho_0, u_0) = (\rho_{0,N}, u_{0,N})$ を以下で定める:

$$\begin{cases} \rho_0(x) = 0 \\ u_0(x) = (f_N(x), g_N(x), 0, \dots, 0). \end{cases} \quad (5)$$

ただし,

$$\begin{cases} f_N(x) = R \frac{2^{\frac{N}{2}}}{N^{\frac{1}{2n}}} \sum_{-\delta N \leq j \leq 0} 2^{-(n-\frac{1}{2})j} \phi_j(x - 2^{|j|+2N} e_1) \sin(2^N x_2), \\ g_N(x) = R \frac{2^{\frac{N}{2}}}{N^{\frac{1}{2n}}} \sum_{-\delta N \leq j \leq 0} 2^{-(n-\frac{1}{2})j} \phi_j(x - 2^{|j|+2N} e_1) \cos(2^N x_2). \end{cases}$$

証明の方針は, 上記初期値に対する解を考え, N を大きくしたとき速度の非線形部分に対する近似 (4) の $\dot{B}_{2n,1}^{-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^n)$ ノルムが発散し, それ以外は一様に有界であることを示す, というものである. 適切性が得られない空間における考察のため, (4) 以外の項の一様有界性を示すためには精密な評価が必要となるが, ここでは (4) の u_0 に関する連続性に焦点を絞る. (5) で与えられる初期値に関して以下が成り立つ.

命題 1. $1 \leq q \leq \infty$ とする. (5) によって u_0 を定めると, 任意の $R > 0$, 自然数 N に対して以下が成り立つ.

$$\|u_0\|_{\dot{B}_{2n,q}^{-\frac{1}{2}}} \leq CR.$$

一方, ある $N_0 \in \mathbb{N}$ が存在して $N \geq N_0$ を満たす任意の自然数 N に対して以下が成り立つ. $U(t) = e^{t\mathcal{L}} u_0$, $t = 2^{-2N}$ とすると 任意の $R > 0$ に対して,

$$\left\| \int_0^t e^{(t-\tau)\mathcal{L}} \left\{ (P_\pi U \cdot \nabla) P_\sigma U + \frac{\mu}{2\mu + \lambda} (P_\pi U - P_\pi u_0) \cdot \nabla P_\sigma U \right\} d\tau \right\|_{\dot{B}_{2n,q}^{-\frac{1}{2}}} \geq C^{-1} N^{\frac{1}{q} - \frac{1}{n}} R^2.$$

注意. 命題 1 において, $R = (\log N)^{-1}$ とすれば $q < n$ の場合に初期値 u_0 に対する (4) の不連続性を得る. 証明は左辺のノルムを直接的に評価することによる.

非線形項の近似 (4) の $\dot{B}_{2n,q}^{-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^n)$ における連続性を説明するため, より単純なスカラー値関数の場合を考えることにする.

命題 2. $1 \leq q \leq \infty$ とする. 正定数 A, B, c に対して $I[f, g]$ を以下で定義する.

$$I[f, g](t) := - \int_0^t e^{c(t-\tau)\Delta} \left\{ e^{A\tau\Delta} f \nabla e^{B\tau\Delta} g + \frac{B}{A} (e^{A\tau\Delta} f - f) \nabla e^{B\tau\Delta} g \right\} d\tau. \quad (6)$$

このとき、ある正定数 $C = C_{n,q}$ が存在し、

$$\sup_{t>0} \|I[f, g](t)\|_{\dot{B}_{2n,q}^{-\frac{1}{2}}} \leq C \|f\|_{\dot{B}_{2n,q}^{-\frac{1}{2}}} \|g\|_{\dot{B}_{2n,q}^{-\frac{1}{2}}} \quad \text{for any } f, g \in \dot{B}_{2n,q}^{-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^n)$$

が成り立つための必要十分条件は $n \leq q \leq \infty$ である。

注意. A, B, C を $A = 2\mu + \lambda$, $B = \mu$, $c = \mu$ あるいは $2\mu + \lambda$, f を $P_\pi u_0$, g を $P_\sigma u_0$ として対応させると、 $I[f, g]$ は (4) の一部分とみなすことができる。

命題 2 の証明について、 $1 \leq q < n$ の場合は命題 1 と同様に示される。一方、 $n \leq q \leq \infty$ の場合は積 fg に対する周波数分解を用いる。

$$I[f, g] = \left(\sum_{k \leq l-3} + \sum_{l \leq k-3} + \sum_{|k-l| \leq 2} \right) I[\phi_k * f, \phi_l * g] =: I_1 + I_2 + I_3.$$

I_1, I_2 については、 $\phi_k * f$ と $\phi_l * g$ の周波数が十分に離れているため非圧縮性条件を課したときと同様に閉じる評価式を得ることができる。一方、 I_3 については $\phi_k * f$ と $\phi_l * g$ が同程度の周波数をもっていることから、良い正則性を期待できないため精密に評価していく必要がある。本稿では $I[f, g]$ の Fourier 変換を考え、初期値連続依存性が破綻する原因となる項について説明することにする。

補題 3. $I[f, g]$ を (6) で定義する。 $I[f, g]$ の Fourier 変換について以下が成り立つ。

$$\widehat{I[f, g]}(t) = -\frac{B}{A} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1 - e^{-At|\xi-\eta|^2}}{B|\eta|^2 - c|\xi|^2} e^{-Bt|\eta|^2} i\eta \widehat{f}(\xi - \eta) \widehat{g}(\eta) d\eta + \widehat{R[f, g]}(t). \quad (7)$$

ただし、

$$\begin{aligned} & \widehat{R[f, g]}(t) \\ &:= \int_{\mathbb{R}^n} \left\{ \frac{\{(B+c)|\xi|^2 - 2B\xi \cdot \eta\}(e^{-ct|\xi|^2} + e^{-At|\xi-\eta|^2 - Bt|\eta|^2})}{(A|\xi-\eta|^2 + B|\eta|^2 - c|\xi|^2)(B|\eta|^2 - c|\xi|^2)} \right\} i\eta \widehat{f}(\xi - \eta) \widehat{g}(\eta) d\eta. \end{aligned}$$

注意. f と g が特定の周波数を持つ場合を考え、上記補題を用いて $I[f, g]$ と移流項に由来する項を比較し、(7) の右辺に現れている $e^{-Bt|\eta|^2}$ のおかげで $I[f, g]$ は移流項より良い正則性を持つことを説明する。 f, g は

$$\text{supp } \widehat{f}, \text{supp } \widehat{g} \subset \{\xi \in \mathbb{R}^n \mid |\xi| \simeq 2^N\}, \quad N \gg 1$$

を満たすとする。 $|\xi| \leq 1$, $|\xi - \eta| \simeq 2^N$, $|\eta| \simeq 2^N$ ならば (7) において $\widehat{R[f, g]}$ は発散形式であるため右辺第 1 項が $I[f, g]$ の主要項となり次を得る。

$$\begin{aligned} \widehat{I[f, g]}(t) &\simeq -\frac{B}{A} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1 - e^{-At2^{2N}}}{B \cdot 2^{2N} - c \cdot 1^2} e^{-Bt2^{2N}} i2^N \widehat{f}(\xi - \eta) \widehat{g}(\eta) d\eta \\ &\simeq -\frac{B}{A} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{2^{2N}} e^{-Bt2^{2N}} i2^N \widehat{f}(\xi - \eta) \widehat{g}(\eta) d\eta \quad \text{for } t \simeq 2^{-2N}. \end{aligned} \quad (8)$$

一方で移流項 $(u \cdot \nabla)u$ にのみ関係する項として $e^{A\tau\Delta} f \nabla e^{B\tau\Delta} g$ を考えると、以下を得る。

$$\begin{aligned} & \mathcal{F} \left[\int_0^t e^{c(t-s)\Delta} e^{A\tau\Delta} f \nabla e^{B\tau\Delta} g d\tau \right] (\xi) \\ &= e^{-ct|\xi|^2} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1 - e^{-At|\xi-\eta|^2 - Bt|\eta|^2 + ct|\xi|^2}}{A|\xi-\eta|^2 + B|\eta|^2 - c|\xi|^2} i\eta \widehat{f}(\xi - \eta) \widehat{g}(\eta) d\eta \\ &\simeq \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{2^{2N}} i2^N \widehat{f}(\xi - \eta) \widehat{g}(\eta) d\eta \quad \text{for } t \simeq 2^{-2N}. \end{aligned}$$

上の2式を比べると (8) には $e^{-Bt2^{2N}}$ が現れるため移流項よりも良い正則性があると期待できる. 実際 $n \geq 3$ ならば, $I[f, g]$ については $n \leq q \leq \infty$ に対して命題2にある閉じる評価式を得ることができるが, 一方で, 移流項のみでは任意の $1 \leq q \leq \infty$ に対して閉じる評価式を得ることができない.

補題 3 の証明. はじめに $I[f, g]$ の Fourier 変換を考えると以下を得る.

$$\begin{aligned}
& \widehat{I[f, g]}(t) \\
&= - \int_0^t e^{-c(t-\tau)|\xi|^2} \int_{\mathbb{R}^n} \left\{ e^{-A\tau|\xi-\eta|^2} \widehat{f}(\xi-\eta) i\eta e^{-B\tau|\eta|^2} \widehat{g}(\eta) \right. \\
&\quad \left. + \frac{B}{A} \left(e^{-A\tau|\xi-\eta|^2} \widehat{f}(\xi-\eta) - \widehat{f}(\xi-\eta) \right) i\eta e^{-B\tau|\eta|^2} \widehat{g}(\eta) \right\} d\eta d\tau \quad (9) \\
&= - \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ct|\xi|^2} \int_0^t e^{c\tau|\xi|^2} \left\{ e^{-\tau(A|\xi-\eta|^2+B|\eta|^2)} + \frac{B}{A} \left(e^{-A\tau|\xi-\eta|^2} - 1 \right) e^{-B\tau|\eta|^2} \right\} d\tau \\
&\quad \times \widehat{f}(\xi-\eta) i\eta \widehat{g}(\eta) d\eta.
\end{aligned}$$

上式の $\tau \in (0, t)$ 積分を実行し以下のように整理する.

$$\begin{aligned}
& \int_0^t e^{c\tau|\xi|^2} \left\{ e^{-\tau(A|\xi-\eta|^2+B|\eta|^2)} + \frac{B}{A} \left(e^{-A\tau|\xi-\eta|^2} - 1 \right) e^{-B\tau|\eta|^2} \right\} d\tau \\
&= \int_0^t \left\{ \frac{A+B}{A} e^{-\tau(A|\xi-\eta|^2+B|\eta|^2-c|\xi|^2)} - \frac{B}{A} e^{-\tau(B|\eta|^2-c|\xi|^2)} \right\} d\tau \\
&= \frac{A+B}{A} \cdot \frac{1 - e^{-t(A|\xi-\eta|^2+B|\eta|^2-c|\xi|^2)}}{A|\xi-\eta|^2+B|\eta|^2-c|\xi|^2} - \frac{B}{A} \cdot \frac{1 - e^{-t(B|\eta|^2-c|\xi|^2)}}{B|\eta|^2-c|\xi|^2} \quad (10) \\
&= \left\{ \frac{A+B}{A} \cdot \frac{1}{A|\xi-\eta|^2+B|\eta|^2-c|\xi|^2} - \frac{B}{A} \cdot \frac{1}{B|\eta|^2-c|\xi|^2} \right\} \\
&\quad + e^{ct|\xi|^2} \left\{ \frac{A+B}{A} \cdot \frac{-e^{-t(A|\xi-\eta|^2+B|\eta|^2)}}{A|\xi-\eta|^2+B|\eta|^2-c|\xi|^2} - \frac{B}{A} \cdot \frac{-e^{-tB|\eta|^2}}{B|\eta|^2-c|\xi|^2} \right\} \\
&=: J_1 + e^{ct|\xi|^2} J_2.
\end{aligned}$$

J_1 に含まれる2つの項を通分すると以下を得る.

$$\begin{aligned}
J_1 &= \frac{1}{A} \cdot \frac{(A+B)(B|\eta|^2-c|\xi|^2) - B(A|\xi-\eta|^2+B|\eta|^2-c|\xi|^2)}{(A|\xi-\eta|^2+B|\eta|^2-c|\xi|^2)(B|\eta|^2-c|\xi|^2)} \\
&= \frac{1}{A} \cdot \frac{-A\{(B+c)|\xi|^2 - 2B\xi \cdot \eta\}}{(A|\xi-\eta|^2+B|\eta|^2-c|\xi|^2)(B|\eta|^2-c|\xi|^2)} \quad (11) \\
&= - \frac{(B+c)|\xi|^2 - 2B\xi \cdot \eta}{(A|\xi-\eta|^2+B|\eta|^2-c|\xi|^2)(B|\eta|^2-c|\xi|^2)}.
\end{aligned}$$

一方, J_2 に関しては, $-e^{-t(A|\xi-\eta|^2+B|\eta|^2)}$ と $-e^{-tB|\eta|^2}$ の差を考えることによって以下のように変形できる.

$$\begin{aligned}
J_2 &= \left\{ \frac{A+B}{A} \cdot \frac{-e^{-t(A|\xi-\eta|^2+B|\eta|^2)}}{A|\xi-\eta|^2+B|\eta|^2-c|\xi|^2} - \frac{B}{A} \cdot \frac{-e^{-t(A|\xi-\eta|^2+B|\eta|^2)}}{B|\eta|^2-c|\xi|^2} \right\} \\
&\quad + \left\{ \frac{B}{A} \cdot \frac{-e^{-t(A|\xi-\eta|^2+B|\eta|^2)}}{B|\eta|^2-c|\xi|^2} - \frac{B}{A} \cdot \frac{-e^{-tB|\eta|^2}}{B|\eta|^2-c|\xi|^2} \right\} \quad (12) \\
&= -e^{-t(A|\xi-\eta|^2+B|\eta|^2)} J_1 + \frac{B}{A} \cdot \frac{-e^{-tA|\xi-\eta|^2} + 1}{B|\eta|^2-c|\xi|^2} \cdot e^{-tB|\eta|^2}.
\end{aligned}$$

以上から, (7) の右辺第 1 項は (12) の最右辺第 2 項と一致しており, さらに残りの項 $R[f, g]$ は (11) の J_1 と (12) の最右辺第 1 項から構成されることがわかる. したがって等式 (7) が証明された.

参考文献

- [1] Bourgain, J., Pavlović, N., *Ill-posedness of the Navier-Stokes equations in a critical space in $3D$* , J. Funct. Anal., **255** (2008), no. 9, 2233–2247.
- [2] Chen, Q., Miao, C., Zhang, Z., *On the ill-posedness of the compressible Navier-Stokes equations in the critical Besov spaces*, Rev. Mat. Iberoam. **31** (2015), no. 4, 137–1402.
- [3] Danchin, R., *Global existence in critical spaces for compressible Navier-Stokes equations*, Invent. Math. **141** (3) (2000) 579–614.
- [4] Danchin, R., *Global existence in critical spaces for flows of compressible viscous and heat-conductive gases*, Arch. Ration. Mech. Anal. **160** (2001), no. 1, 1–39.
- [5] Danchin, R., *Local theory in critical spaces for compressible viscous and heat-conductive gases*, Comm. Partial Differential Equations **26** (2001) 1183–1233.
- [6] Danchin, R., *Well-posedness in critical spaces for barotropic viscous fluids with truly not constant density*, Comm. Partial Differential Equations **32** (2007), no. 9, 1373–1397.
- [7] Danchin, R., *A survey on Fourier analysis methods for solving the compressible Navier-Stokes equations*, Sci. China Math. **55** (2012), no. 2, 245–275.
- [8] Haspot, B., *Well-posedness in critical spaces for the system of compressible Navier-Stokes in larger spaces*, J. Differential Equations, **251** (2011), 2262–2295.
- [9] Hoff, D., Zumbrun, K., *Multi-dimensional diffusion waves for the Navier-Stokes equations of compressible flow*, Indiana Univ. Math. J. **44** (1995), no. 2, 603–676.
- [10] Itaya, N., *On the Cauchy problem for the system of fundamental equations describing the movement of compressible viscous fluid*, Kōdai Math. Sem. Rep., **23** (1971), 60–120.
- [11] Iwabuchi, T., Ogawa, T., *Ill-posedness for compressible Navier-Stokes equations under the barotropic condition in the limiting Besov spaces*, preprint.
- [12] Lions, P.-L., *Mathematical topics in fluid mechanics. Vol. 2. Compressible models*, Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications 10, Oxford Science Publications, The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1998.
- [13] Matsumura, A., Nishida, N., *The initial value problem for the equations of motion of viscous and heat-conductive gases*, J. Math. Kyoto Univ. **20** (1980), no. 1, 67–104.
- [14] Matsumura, A., Nishida, N., *Initial-boundary value problems for the equations of motion of compressible viscous and heat-conductive fluids*, Comm. Math. Phys. **89** (1983), no. 4, 445–464.
- [15] Nash, J., *Le problème de Cauchy pour les équations différentielles d'un fluide général*, Bull. Soc. Math. France **90** (1962), 487–497.
- [16] Serrin, J., *On the uniqueness of compressible fluid motions*, Arch. Rational Mech. Anal. **3** (1959) 271–288.
- [17] Tani, A., *The existence and uniqueness of the solution of equations describing compressible viscous fluid flow in a domain*, Proc. Japan Acad. **52** (1976), no. 7, 334–337.
- [18] Wang, B., *Ill-posedness for the Navier-Stokes equations in critical Besov spaces $\dot{B}_{\infty, q}^{-1}$* , Adv. Math. **268** (2015), 350–372.