# 凸錐上のΓ型積分

伊師　英之　(名古屋大学／JST さきがけ)*

**概　　要**

直線を含まない開凸錐上の連続函数で, その巾乗のラプラス変換が斉次多項式の負ベキになるものを考える. この斉次多項式をシンボルとする微分作用素の基本解は, ここで得られた Γ 型積分公式から Riesz の方法によって構成することができる. Gindikin は全ての等質錐に対して相対不変函数に関する Γ 型積分公式を証明したが, 一方で数理統計においてはグラフィカルモデルに付随する或る種の非等質錐について同種の積分公式が知られていた. 我々は両者を統合するものとして, 新しく導入した広範なクラスの凸錐に対して Γ 型積分公式を確立し, 関連する結果を論じる.

## 1. はじめに

内積の定義された有限次元ベクトル空間 $V$ の中の正則凸錐 (直線を含まない開凸錐) $\Omega \subset V$ に対し, 我々は $\Omega$ 上の正値連続函数 $f$ と $V$ 上の斉次多項式 $F$ で

$$\int_\Omega e^{-(x|\xi)} f(x)^\alpha \, d\mu_\Omega(x) = \Gamma_f(\alpha) F(\xi)^{-\alpha} \quad (\Re\alpha > M_f,\ \xi \in \Omega^*) \tag{1}$$

が成り立つものを考える. ここで $d\mu_\Omega$ は $\Omega$ 上の標準測度 (後述), $\Omega^*$ は $\Omega$ の双対錐 $\left\{ \xi \in V\,;\, (x|\xi) > 0\ (\forall x \in \overline{\Omega} \setminus \{0\}) \right\}$ を表し, $M_f$ は或る実数, $\Gamma_f(\alpha)$ は $\alpha$ の有理型函数である. たとえば $\Omega = \mathbb{R}_{>0} \subset V = \mathbb{R}$ のとき $d\mu_\Omega$ は半直線上の不変測度 $\frac{dx}{x}$ であり, $f(x) = F(x) = x$ とすると (1) はよく知られた Γ 積分の公式

$$\int_0^{+\infty} e^{-x\xi} x^{\alpha-1}\, dx = \Gamma(\alpha)\xi^{-\alpha} \qquad (\Re\alpha > 0,\ \xi > 0)$$

に他ならない. さらに $\Omega$ が二次錐 $\Lambda_n = \left\{ x \in \mathbb{R}^n\,;\, x_1 > \sqrt{x_2^2 + \cdots + x_n^2} \right\}$ のときは $f(x) = F(x) = x_1^2 - x_2^2 - \cdots - x_n^2$ として M. Riesz [21] が, $\Omega$ が $N \times N$ 正定値実対称行列のなす錐 $\mathcal{P}_N \subset \mathrm{Sym}(N, \mathbb{R})$ のときは $f(x) = F(x) = \det x$ として Wishart [26] および Siegel [24] が, それぞれの研究 (偏微分方程式, 多変量解析, 解析数論) において積分公式 (1) を活用している. そのうち Riesz のアイディアは次のように敷衍できる. 実部が十分大きな $\alpha$ に対して, $\mathcal{R}_f^\alpha := \Gamma_f(\alpha)^{-1} f^\alpha\, d\mu_\Omega$ が $V$ 上の緩増加超函数を定めるとする (なお $\Re\alpha > M_f$ ならば $\mathcal{R}_f^\alpha \in \mathcal{D}'(V)$ は成り立つ). このとき (1) から

$$\langle \mathcal{R}_f^\alpha, e^{-(x|\xi)} \rangle_x = F(\xi)^{-\alpha} \quad (\xi \in \Omega^*)$$

が成り立ち, これとラプラス変換の一意性から

$$\Delta\Big(\frac{\partial}{\partial x}\Big)^m \mathcal{R}_{\alpha+m} = \mathcal{R}_\alpha$$

本研究は科研費 (課題番号:16K05174) および JST さきがけの助成を受けたものである。
2010 Mathematics Subject Classification: 15B48, 43A35, 43A05
キーワード：ラプラス変換, 正則凸錐

* 〒464-8602 名古屋市千種区不老町 名古屋大学大学院多元数理科学研究科 ／〒312-0012 川口市本町 4-1-8 国立研究開発法人科学技術振興機構 さきがけ
e-mail: hideyuki@math.nagoya-u.ac.jp

が $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ について成り立つ. これから任意のテスト函数 $\psi \in \mathcal{S}(V)$ に対して $\langle \mathcal{R}_f^\alpha, \psi \rangle$ が $\alpha \in \mathbb{C}$ の整函数として解析接続できることが分かり, $\mathcal{R}_f^\alpha \in \mathcal{S}'(V)$ が全ての $\alpha \in \mathbb{C}$ に対して定義され, 次が成り立つ.

**命題 1.** (i) $\mathcal{R}_f^\alpha * \mathcal{R}_f^\beta = \mathcal{R}_f^{\alpha+\beta} \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{C})$.
(ii) $\mathcal{R}_f^0 = \delta$ (Dirac のデルタ函数).
(ii) $F(\frac{\partial}{\partial x})^m \mathcal{R}_f^\alpha = \mathcal{R}_f^{\alpha-m}$.
(iv) $\mathcal{R}_f^m$ は $F(\frac{\partial}{\partial x})^m$ の基本解.
(v) $\operatorname{supp} \mathcal{R}_f^\alpha \subset \overline{\Omega}$ であり, $\operatorname{supp} \mathcal{R}_f^\alpha \subset \partial\Omega$ の必要十分条件は $\Gamma_f(\alpha)^{-1} = 0$.

以上の議論により, Riesz は波動方程式の基本解を構成し, 空間の次元の偶奇によって波の伝播の様子が異なるというホイヘンスの原理を説明した. その後 Gindikin [6, 7] は 凸錐 $\Omega$ が等質のとき (すなわち或るリー群が線型かつ推移的に $\Omega$ に作用しているとき), 群作用について相対不変な $f$ と $F$ について $\Gamma$ 型積分公式 (1) を証明し, Riesz の方法を適用した.

空間を統制する大きな群作用があれば (1) のような美しい公式が成り立つのは自然である (概均質ベクトル空間の理論の創始時にも同じ思想が背景にあったようである [16, pp. 166–167]). そして, 群作用がなければ美しい積分公式はありえないと信じる立場からすれば, Gindikin の研究は最大限に一般的な枠組みのように見えた. それゆえに, 等質錐でなくても (1) が成り立つ例が多変量解析（とくにグラフィカルモデル理論）において研究されている ([18, 19, 23]) ことは私にとって衝撃的であった. しかも, それらの積分公式は統計的な議論に基づくもので, 外見はよく似ているにも関わらず, Gindikin の公式との関係は全く謎に包まれていたのである.

次節で述べる我々の結果 ([12]) により, 全ての等質錐は三つの条件 (V1)–(V3) を満たすベクトル空間の系から構成される正定値実対称行列の集合として実現され, Gindikin の研究をはじめとする既存の理論は見通しよく再構成できる. 類似の結果は [3, 22, 27, 28] など多くの研究者によって得られているが, それらに対する我々の方法の優位性は, その「拡張性」にあることが後になって判明した. すなわち三つの条件のうち (V3) を外して (V1) と (V2) のみを要請すると, 得られる凸錐はもはや等質錐ではないが, $\Gamma$ 型積分公式を含む幾つもの解析的公式は依然として成り立つ. しかも, ここに現れる新しいクラスの凸錐は上述のグラフィカルモデルに付随する凸錐を含む. このようにして, 等質錐の理論とグラフィカルモデル理論は統合され, 双方のアイディアが相互に利用可能となったのである. 二次錐 $\Lambda_n$ と 正定値対称行列の錐 $\mathcal{P}_N$ 上の豊かな数学は対称錐の理論として整理され, 上述の分野のほか表現論, 調和解析, 複素解析, 微分幾何, そして情報幾何, 最適化法といった多くの分野との関連において活発に研究されている ([4]). 本講演で紹介する新しい凸錐の理論もまた, 純粋・応用数学を問わず多くの分野の研究者が出会い, アイディアの交換が出来るような「場」として成長することを願ってやまない.

## 2. 等質錐の行列実現

以後 $N \times N$ 実対称行列全体のなすベクトル空間 $\mathrm{Sym}(N, \mathbb{R})$ を $V_N$ と書く. 対称行列 $x \in V_N$ に対し, 下三角行列 $\underset{\sim}{x} \in \mathrm{Mat}(N, \mathbb{R})$ を

$$(\underset{\sim}{x})_{ij} := \begin{cases} x_{ij} & (i > j) \\ x_{ii}/2 & (i = j) \\ 0 & (i < j) \end{cases}$$

によって定め, $V_N$ 上の双線型な積 $\triangle$ を

$$x \triangle y := \underset{\sim}{x} y + y\, {}^{\mathsf{t}}(\underset{\sim}{x}) \quad (x, y \in V_N)$$

によって定義する. 一般に $\mathbb{R}$ 代数 $(V_N, \triangle)$ は可換でも結合的でもないが, 次の関係式を満たす:

$$x \triangle (y \triangle z) - (x \triangle y) \triangle z = y \triangle (x \triangle z) - (y \triangle x) \triangle z \qquad (x, y, z \in V_N)$$

このような代数は左対称代数あるいは pre-Lie 代数 とよばれる ([2]). さらに $x \in V_N$ による左乗法作用素 $V_N \ni y \mapsto x \triangle y \in V_N$ を $L_x$ と書くものとすると,

- $\mathrm{Tr}\, L_{x \triangle x} > 0 \;\; (x \in V_N \setminus \{0\})$ (コンパクト性)
- 任意の $x \in V_N$ に対し, $L_x$ の固有値は実数のみ (正規性)

が成り立つ. 以上の性質をもつコンパクト正規左対称代数 (Compact Normal Left-symmetric Algebra, CLAN) は Vinberg [25] によって導入され, 単位元をもつ CLAN は等質錐と同型を除いて一対一に対応することが証明された. たとえば, 部分ベクトル空間 $\mathcal{Z} \subset V_N$ が

$$\mathcal{Z} \triangle \mathcal{Z} \subset \mathcal{Z}, \qquad I_N \in \mathcal{Z} \tag{2}$$

を満たすとき, $(\mathcal{Z}, \triangle)$ は単位元をもつ CLAN である.

**定理 2** ([14])**.** (i) 単位元をもつ任意のCLAN は (2) を満たす $(\mathcal{Z}, \triangle)$ と同型.
(ii) $H_{\mathcal{Z}} := \left\{ \underset{\sim}{x}\,;\, x \in \mathcal{Z},\ x_{ii} > 0 \;\, (i = 1, \ldots, N) \right\}$ は群をなし, 凸錐 $\mathcal{P}_{\mathcal{Z}} := \mathcal{P}_N \cap \mathcal{Z}$ に

$$\rho(T)x := T x\, {}^{\mathsf{t}}T \qquad (x \in \mathcal{P}_{\mathcal{Z}},\ T \in H_{\mathcal{Z}})$$

で定義される作用 $\rho$ によって単純推移的に作用している. 全ての等質錐は, このようにして得られる $\mathcal{P}_{\mathcal{Z}}$ と線型同値である.

分割 $N = n_1 + n_2 + \cdots + n_r$ を一つとり, 次の 3 つの条件をみたすベクトル空間 $\mathcal{V}_{lk} \subset \mathrm{Mat}(n_l, n_k; \mathbb{R})$ $(1 \le k < l \le r)$ の系 $\mathcal{V} = \{\mathcal{V}_{lk}\}_{1 \le k < l \le r}$ を考える:
(V1) $A \in \mathcal{V}_{lk},\ B \in \mathcal{V}_{ki} \Rightarrow AB \in \mathcal{V}_{li}$ $(1 \le i < k < l \le r)$,
(V2) $A \in \mathcal{V}_{li},\ B \in \mathcal{V}_{ki} \Rightarrow A\, {}^{\mathsf{t}}B \in \mathcal{V}_{lk}$ $(1 \le i < k < l \le r)$,
(V3) $A \in \mathcal{V}_{lk} \Rightarrow A\, {}^{\mathsf{t}}A \in \mathbb{R} I_{n_l}$ $(1 \le k < l \le r)$.
このとき, 次のような形の対称行列 $x$ からなる $V_N$ の部分ベクトル空間を $\mathcal{Z}_{\mathcal{V}}$ で表す:

$$x = \begin{pmatrix} X_{11} & {}^{\mathsf{t}}X_{21} & \cdots & {}^{\mathsf{t}}X_{r1} \\ X_{21} & X_{22} & & {}^{\mathsf{t}}X_{r2} \\ \vdots & & \ddots & \\ X_{r1} & X_{r2} & & X_{rr} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} X_{ll} = x_{ll} I_{n_l},\ x_{ll} \in \mathbb{R}\ (l = 1, \ldots, r) \\ X_{lk} \in \mathcal{V}_{lk}\ (1 \le k < l \le r) \end{pmatrix}. \tag{3}$$

**定理 3** ([14]). 部分空間 $\mathcal{Z}_{\mathcal{V}}$ は (2) を満たす. 逆に (2) を満たす $\mathcal{Z}$ に対して, 適当な置換行列 $\sigma \in \mathfrak{S}_N \subset GL(N, \mathbb{R})$ と $\mathcal{V} = \{\mathcal{V}_{lk}\}$ が存在して, $\rho(\sigma) : \mathcal{Z} \ni x \mapsto \sigma x\, {}^{\mathrm{t}}\sigma \in \mathcal{Z}_{\mathcal{V}}$ が代数同型となるようできる.

定理 2 と定理 3 により, 以後等質錐としては (3) の形の正定値対称行列からなる錐 $\mathcal{P}_{\mathcal{V}} := \mathcal{Z}_{\mathcal{V}} \cap \mathcal{P}_N$ を考えても一般性は失わない (このようにブロック分解をもつ正定値対称行列の集合として等質錐を実現するという結果は様々な形で得られている [3, 22, 27, 28]).

定理 2 (ii) より, $\mathcal{P}_{\mathcal{V}}$ には

$$T = \begin{pmatrix} T_{11} & & & \\ T_{21} & T_{22} & & \\ \vdots & & \ddots & \\ T_{r1} & T_{r2} & & T_{rr} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} T_{ll} = t_{ll} I_{n_l},\ t_{ll} > 0\ (l = 1, \ldots, r) \\ T_{lk} \in \mathcal{V}_{lk} \quad (1 \le k < l \le r) \end{pmatrix}, \tag{4}$$

という形の下三角行列からなる群 $H_{\mathcal{V}} := H_{\mathcal{Z}_{\mathcal{V}}}$ が $\rho$ によって $\mathcal{P}_{\mathcal{V}}$ に単純推移的に作用している. この作用に関する $\mathcal{P}_{\mathcal{V}}$ 上の相対不変函数は次のように記述される. 対称行列 $x = (x_{\alpha\beta}) \in V_N$ と $M = 1, \ldots, N$ に対し, $x^{[M]} := (x_{\alpha\beta})_{\alpha,\beta \le M} \in V_M$ と書くものとし, パラメータ $\underline{s} = (s_1, \ldots, s_r) \in \mathbb{C}^r$ に対し $\Delta_{\underline{s}} : \mathcal{P}_{\mathcal{V}} \to \mathbb{C}$ を

$$\Delta_{\underline{s}}(x) := (\det x)^{s_r/n_r} \prod_{k=1}^{r-1} (\det x^{[N_k]})^{s_k/n_k - s_{k+1}/n_{k+1}} \quad (x \in \mathcal{P}_{\mathcal{V}}) \tag{5}$$

によって定める (ただし $N_k := \sum_{i=1}^{k} n_i\ \ (k = 1, \ldots, r)$). このとき $\Delta_{\underline{s}}$ は, $H_{\mathcal{V}}$ の 1 次元表現 $\chi_{\underline{s}} : H_{\mathcal{V}} \ni T \mapsto \prod_{k=1}^{r} t_{kk}^{2s_k} \in \mathbb{C}$ に関して相対不変である:

$$\Delta_{\underline{s}}(\rho(T)x) = \chi_{\underline{s}}(T) \Delta_{\underline{s}}(x) \qquad (x \in \mathcal{P}_{\mathcal{V}},\, T \in H_{\mathcal{V}}).$$

とくに $s_k = n_k \alpha\ (k = 1, \ldots, r)$ のとき $\Delta_{\underline{s}}(x) = (\det x)^{\alpha},\ \chi_{\underline{s}}(T) = (\det T)^{2\alpha}$ であることに注意する. 相対不変函数 $\Delta_{\underline{s}}$ がいつ多項式になるかという問題は [12] において考察され, [20] によって完全に解決された.

## 3. 双対錐の記述

条件 (V1) より, 各 $\mathcal{V}_{lk}$ $(1 \le k < l \le r)$ 上には内積が

$$A^{\mathrm{t}}B + B^{\mathrm{t}}A = 2(A|B)_{\mathcal{V}_{lk}} I_{n_l} \quad (A, B \imath \mathcal{V}_{lk})$$

となるように定まる. これを用いて $\mathcal{Z}_{\mathcal{V}}$ 全体には

$$(x|x') := \sum_{k=1}^{r} x_{kk} x'_{kk} + 2 \sum_{1 \le k < l \le r} (X_{lk}|X'_{lk})_{\mathcal{V}_{lk}} \quad (x, x' \in \mathcal{Z}_{\mathcal{V}})$$

と内積を定義し, この内積に関する $\mathcal{P}_{\mathcal{V}}$ の双対錐を $\mathcal{Q}_{\mathcal{V}}$ とする. 群 $H_{\mathcal{V}}$ の $\mathcal{Q}_{\mathcal{V}}$ への推移的な右作用 $\rho^*$ が

$$(x|\rho^*(T)\xi) := (\rho(T)x|\xi) \quad (x, \xi \in \mathcal{Z}_{\mathcal{V}},\, T \in H_{\mathcal{V}})$$

によって与えられる. とくに $\mathcal{Q}_{\mathcal{V}}$ は等質錐である. さて $k = 1, \ldots, r-1$ に対し, 次のような形の行列 $w$ からなるベクトル空間を $\mathcal{W}_k$ とする:

$$w = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ T_{k+1,k} \\ \vdots \\ T_{rk} \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(N, n_k) \quad (T_{lk} \in \mathcal{V}_{lk}\ (l > k)).$$

このとき $\mathcal{W}_k \simeq \sum_{l>k}^{\oplus} \mathcal{V}_{lk}$ であることを踏まえて $m_k := \dim \mathcal{W}_k = \sum_{l>k} \dim \mathcal{V}_{lk}$ とおき, $m_r := 0$ とする. もし $m_k > 0$ ならば $\mathcal{W}_k$ の正規直交基底を一つとって, 線型同型 $\mathcal{W}_k \ni w \mapsto \mathrm{vect}(w) \in \mathbb{R}^{m_k}$ を定める. 条件 (V1) と (V2) より $w \in \mathcal{W}_k$ に対し $w\,{}^{\mathsf{t}}w \in \mathcal{Z}_{\mathcal{V}}$ であるから, 線型写像 $\phi_k : \mathcal{Z}_{\mathcal{V}} \to \mathrm{Sym}(m_k, \mathbb{R})$ が

$${}^{\mathsf{t}}\mathrm{vect}(w)\,\phi_k(\xi)\,\mathrm{vect}(w) = (w\,{}^{\mathsf{t}}w|\xi) \quad (\xi \in \mathcal{Z}_{\mathcal{V}},\, w \in \mathcal{W}_k)$$

となるように定義できる. 元 $x \in \mathcal{Z}_{\mathcal{V}}$ と $k = 1, \ldots, r-1$ に対し

$$w_k := \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ X_{k+1,k} \\ \vdots \\ X_{rk} \end{pmatrix} \in \mathcal{W}_k$$

とおき,

$$f_k(x) := \begin{cases} x_{kk} & (m_k = 0) \\ x_{kk} - {}^{\mathsf{t}}\mathrm{vect}(w_k)\phi_k(x)^{-1}\mathrm{vect}(w_k) & (m_k > 0) \end{cases}$$

と定義し, $f_r(x) := 0$ とする.

**命題 4** (cf. [8])**.** (1) もし $f_k(\xi) > 0, \ldots, f_r(\xi) > 0$ ならば $\phi_{k-1}(\xi)$ は正定値であり, $f_{k-1}(\xi)$ が定義できる.
(2) $\mathcal{Q}_{\mathcal{V}} = \{\, \xi \in \mathcal{Z}_{\mathcal{V}}\,;\, f_k(\xi) > 0\ (k = 1, \ldots, r)\,\}$.

パラメータ $\underline{s} = (s_1, \ldots, s_r) \in \mathbb{C}^r$ に対し, $\delta_{\underline{s}} : \mathcal{Q}_{\mathcal{V}} \to \mathbb{C}$ を

$$\delta_{\underline{s}}(\xi) := \prod_{k=1}^{r} f_k(\xi)^{s_k} \quad (\xi \in \mathcal{Q}_{\mathcal{V}})$$

と定義すると, $\delta_{\underline{s}}$ は $H_{\mathcal{V}}$ の作用 $\rho^*$ に関して相対不変である:

$$\delta(\rho^*(T)\xi) = \chi_{\underline{s}}(T)\delta(\xi) \quad (\xi \in \mathcal{Q}^*,\ T \in H_{\mathcal{V}}).$$

函数 $\Delta_{\underline{s}} : \mathcal{P}_{\mathcal{V}} \to \mathbb{C}$ と $\delta_{\mathcal{V}} : \mathcal{Q}_{\mathcal{V}} \to \mathbb{C}$ の相対不変性から次が従う.

**命題 5.** (i) $\underline{s} \in (\mathbb{C}^{\times})^r$ のとき $\log \Delta_{\underline{s}}$ と $\log \delta_{\underline{s}}$ は, 定数の差を除いて互いの Legendre 変換となっている.
(ii) $\underline{s} \in (\mathbb{R}_{>0})^r$ のとき $\mathrm{grad} \log \Delta_{-\underline{s}} : \mathcal{P}_{\mathcal{V}} \to \mathcal{Q}_{\mathcal{V}}$ と $\mathrm{grad} \log \delta_{-\underline{s}} : \mathcal{Q}_{\mathcal{V}} \to \mathcal{P}_{\mathcal{V}}$ は互いに逆写像の関係になっている.

## 4. 等質錐上の$\Gamma$ 型積分公式

一般に, 内積の定義されているベクトル空間 $V$ の中の正則凸錐 $\Omega \subset V$ に対し,

$$\varphi_\Omega(x) := \int_{\Omega^*} e^{-(x|\xi)}\, d\xi$$

を $\Omega$ 上の Koszul-Vinberg 特性函数という ([1, 17, 25]). ここで $d\xi$ は内積から定まるユークリッド測度である. 双対錐 $\Omega^*$ と測度 $dx$ は内積によって定まるので $\varphi_\Omega(x)$ も内積に依存するが, $\Omega$ 上の標準測度 (canonical measure) $d\mu_\Omega(x) := \varphi(x)\, dx$ は内積に依らずに定まり, $\Omega$ を保存する任意の線型変換に関して不変である.

以後 $\Omega = \mathcal{Q}_\mathcal{V}$, $\Omega^* = \mathcal{P}_\mathcal{V}$ の場合を考える (よって上の議論とは $x$ と $\xi$ の役割が異なることに注意).

**命題 6** ([6])**.** 錐 $\mathcal{Q}_\mathcal{V}$ の Koszul-Vinberg 特性函数

$$\varphi_\mathcal{V}(\xi) := \int_{\mathcal{P}_\mathcal{V}} e^{-(x|\xi)}\, dx \quad (\xi \in \mathcal{Q}_\mathcal{V})$$

は

$$C_\mathcal{V} \prod_{k=1}^{r} f_k(\xi)^{-1-m_k/2} \prod_{m_k>0} (\det \phi_k(\xi))^{-1/2}$$

(ただし $C_\mathcal{V} := \prod_{k=1}^{r} \{(2\pi)^{m_k} \Gamma(1 + \frac{m_k}{2}))$ で与えられる.

錐 $\mathcal{Q}_\mathcal{V}$ 上の標準測度 $\varphi_\mathcal{V}(\xi)\, d\xi$ を $d\mu_\mathcal{V}(\xi)$ と書くものとする. このとき $\varphi_\mathcal{V}$ は $\rho^*(H_\mathcal{V})$-不変である.

**定理 7** ([6])**.** (i) 積分 $\Gamma_\mathcal{V}(\underline{s}) := \int_{\mathcal{Q}_\mathcal{V}} e^{-(I_n|\xi)} \delta_{\underline{s}}(\xi) d\mu_\mathcal{V}(\xi)$ が収束する必要十分条件は $\Re s_k > m_k/2$ $(k = 1, \ldots, r)$ であり, このとき $\Gamma_\mathcal{V}(\underline{s}) = C_\mathcal{V} \prod_{k=1}^{r} \{(2\pi)^{m_k/2} \Gamma(s_k - \frac{m_k}{2})$.
(ii) $\Re s_k > m_k/2$ $(k = 1, \ldots, r)$ のとき

$$\int_{\mathcal{Q}_\mathcal{V}} e^{-(x|\xi)} \delta_{\underline{s}}(\xi)\, d\mu_\mathcal{V}(\xi) = \Gamma_\mathcal{V}(\underline{s}) \Delta_{-\underline{s}}(x) \qquad (x \in \mathcal{P}_\mathcal{V}). \tag{6}$$

いま $\Delta_{\underline{\sigma}}(x)$ が多項式となるような $\underline{\sigma} \in \mathbb{R}^r$ を一つとり, $f := \delta_{\underline{\sigma}}$, $F := \Delta_{\underline{\sigma}}$ とすると (6) において $\underline{s} = \alpha\underline{\sigma}$ とすることで (1) の形の公式が得られる.

## 5. 主結果

以後 $\mathcal{V} = \{\mathcal{V}_{lk}\}$ については条件 (V1), (V2) のみを仮定する. このとき正則凸錐 $\mathcal{P}_\mathcal{V}$ および $\mathcal{Q}_\mathcal{V}$ は等質とは限らないが, $\Delta_{\underline{s}}$ や $\delta_{\underline{s}}$ はこれまで同様に定義できる.

**定理 8** ([15])**.** 凸錐 $\mathcal{P}_\mathcal{V}$ と $\mathcal{Q}_\mathcal{V}$ について, 命題 4, 5, 6 および定理 7 が成り立つ

証明のアイディアは次の通りである. 集合 $H_\mathcal{V}$ は群をなすとは限らないが,

$$H'_\mathcal{V} := \{\, T \in H_\mathcal{V}\,;\, t_{kk} = 1 (k = 1, \ldots, r), T_{lk} = 0\ (2 \le k < l \le r)\,\}$$

は群をなし, その作用 $\rho(H'_\mathcal{V})$ によって, 任意の $x \in \mathcal{P}_\mathcal{V}$ は, $(l, 1)$-成分 $(l > 1)$ が 0 であるような元に移すことができる. これによって議論は部分系 $\mathcal{V}' := \{\mathcal{V}_{lk}\}_{2 \le k < l \le r}$ に帰着できるので, 種々の議論は $r$ に関する帰納法によって証明される.

具体例を一つ挙げる．$\mathcal{Z}_{\mathcal{V}} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & 0 & x_4 & 0 \\ 0 & x_1 & 0 & x_5 \\ x_4 & 0 & x_2 & x_6 \\ 0 & x_5 & x_6 & x_3 \end{pmatrix} ; x_1, \dots x_6 \in \mathbb{R} \right\}$ のとき $\mathcal{Q}_{\mathcal{V}}$ は

$$\xi_1 - \frac{\xi_4^2}{\xi_2} - \frac{\xi_5^2}{\xi_3} > 0, \quad \xi_2 - \frac{\xi_6^2}{\xi_3} > 0, \quad \xi_3$$

を満たすような $\xi \in \mathcal{Z}_{\mathcal{V}}$ の集合であり，

$$\varphi_{\mathcal{V}}(\xi) = \sqrt{2}\pi^2 \begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_4 & \xi_5 \\ \xi_4 & \xi_2 & 0 \\ \xi_5 & 0 & \xi_3 \end{vmatrix}^{-2} \begin{vmatrix} \xi_2 & \xi_6 \\ \xi_6 & \xi_3 \end{vmatrix}^{-3/2} \xi_2^{3/2} \xi_3^{3/2},$$

$$\delta_{\underline{s}}(\xi) = \begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_4 & \xi_5 \\ \xi_4 & \xi_2 & 0 \\ \xi_5 & 0 & \xi_3 \end{vmatrix}^{s_1} \begin{vmatrix} \xi_2 & \xi_6 \\ \xi_6 & \xi_3 \end{vmatrix}^{s_2} \xi_2^{-s_1} \xi_3^{s_3 - s_1 - s_2} \quad (\xi \in \mathcal{Q}_{\mathcal{V}}),$$

$$\Delta_{\underline{s}}(x) = x_1^{s_1 - s_2 - s_3} \begin{vmatrix} x_1 & x_4 \\ x_4 & x_2 \end{vmatrix}^{s_2 - s_3} (\det x)^{s_3} \quad (x \in \mathcal{P}_{\mathcal{V}})$$

である．

最後にグラフィカルモデル理論との関係を述べる．単純グラフ $\mathcal{G} = (\mathfrak{V}_{\mathcal{G}}, \mathfrak{E}_{\mathcal{G}})$ ($\mathfrak{V}_{\mathcal{G}} = \{1, \dots N\}$, $\mathfrak{E}_{\mathcal{G}} \subset \mathfrak{V}_{\mathcal{G}} \times \mathfrak{V}_{\mathcal{G}}$) に対し，

$$\mathcal{Z}_{\mathcal{G}} := \{\, x = (x_{ij}) \in \mathrm{Sym}(N, \mathbb{R}) \,;\, x_{ij} = 0 \text{ if } i \neq j \text{ and } i \not\sim j \,\}$$

とする．グラフ $\mathcal{G}$ が chordal のとき，すなわち $\mathcal{G}$ における長さが 4 以上のサイクルは必ず chord (弦) をもつとき，$\mathcal{P}_{\mathcal{G}} := \mathcal{P}_N \cap \mathcal{Z}_{\mathcal{G}}$ に対して様々な解析的公式が成り立つことが知られてきた ([18, 19])．実は，頂点集合 $\mathfrak{V}_{\mathcal{G}}$ の番号を適切につけかえれば，このような $\mathcal{P}_{\mathcal{G}}$ は，我々の $\mathcal{P}_{\mathcal{V}}$ において $n_1 = \cdots = n_r = 1$ とした場合に対応する (詳しくは [15] 参照)．これによって $\mathcal{P}_{\mathcal{G}}$ についても新しい知見を得ることができた．

# 参考文献


[1] F. Barbaresco, *Koszul information geometry and Souriau geometric temperature/capacity of Lie group thermodynamics*, Entropy **16** (2014), 4524–4565.

[2] D. Burde, *Left-symmetric algebras, or pre-Lie algebras in geometry and physics*, Cent. Eur. J. Math. **4** (2006), 323–357.

[3] C. B. Chua, *Relating homogeneous cones and positive definite cones via $T$-algebras*, SIAM J. Optim. **14** (2003), 500–506.

[4] J. Faraut and A. Korányi, “Analysis on symmetric cones,” Clarendon Press, 1994.

[5] L. Gårding, *The solution of Cauchy’s problem for two totally hyperbolic linear differential equations by means of Riesz integrals*, Ann. of Math. **48** (1947), 785–826.

[6] S. G. Gindikin, *Analysis in homogeneous domains*, Russian Math. Surveys **19** (1964), 1–89.

[7] S. G. Gindikin, “Tube domains and the Cauchy problem,” Transl. Math. Monogr. **11**, Amer. Math. Soc., 1992.

[8] P. Graczyk and H. Ishi, *Riesz measures and Wishart laws associated to quadratic maps*, J. Math. Soc. Japan **66** (2014), 317–348.

[9] P. Graczyk, H. Ishi and S. Mamane, *Wishart exponential families on cones related to $A_n$ graphs*, submitted.

[10] H. Ishi, *Positive Riesz distributions on homogeneous cones*, J. Math. Soc. Japan **52** (2000), 161–186.

[11] H. Ishi, *Basic relative invariants associated to homogeneous cones and applications*, J. Lie Theory **11** (2001), 155–171.

[12] H. Ishi, *On symplectic representations of normal $j$-algebras and their application to Xu's realizations of Siegel domains*, Differ. Geom. Appl. **24** (2006), 588–612.

[13] H. Ishi, *On a class of homogeneous cones consisting of real symmetric matrices*, Josai Mathematical Monograph **6** (2013), 71–80.

[14] H. Ishi, *Matrix realization of homogeneous cones*, in Lecture Notes of Computer Science **9389**, pp. 248–256, Springer, 2015.

[15] H. Ishi, *Explicit formula of Koszul-Vinberg characteristic functions for a wide class of regular convex cones*, Entropy **18** (2016), Issue 11, 383; doi:10.3390/e18110383.

[16] 木村達雄 編, 佐藤幹夫の数学, 日本評論社, 2007.

[17] J. L. Koszul, *Ouverts convexes homogènes des espaces affines*, Math. Z. **79** (1962), 254–259.

[18] S. L. Lauritzen, "Graphical models," Clarendon Press, Oxford, 1996.

[19] G. Letac and H. Massam, *Wishart distributions for decomposable graphs*, The Annals of Statistics **35** (2007), 1278–1323.

[20] H. Nakashima, *Basic relative invariants of homogeneous cones*, J. Lie Theory **24** (2014), 1013–1032.

[21] M. Riesz, *L'intégrale de Riemann-Liouville et le problème de Cauchy*, Acta Math. **81** (1949), 1–223.

[22] O. S. Rothaus, *The construction of homogeneous convex cones*, Ann. of Math. **83** , 358–376, Correction: ibid **87** (1968), 399.

[23] A. Roverato, *Cholesky decomposition of a hyper inverse Wishart matrix*, Biometrika **87** (2000), 99–112.

[24] G. L. Siegel, *Über die analytische tehorie der quadratische Formen*, Ann. of Math. **36** (1935), 527–606.

[25] E. B. Vinberg, *The theory of convex homogeneous cones*, Trans. Moscow Math. Soc. **12** (1963), 340–403.

[26] J. Wishart, *The generalized product monent distribution in samples from a normal multivariate population*, Biometrika **20A** (1928), 32–52.

[27] Y. C. Xu, "Theory of complex homogeneous bounded domains," Kluwer, Dordrecht, 2005.

[28] T. Yamasaki and T. Nomura, *Realization of homogeneous cones through oriented graphs*, Kyushu J. Math., **69** (2015), 11–48.