

多変数の行列・作用素平均

日合 文雄*

概要

久保-安藤の作用素平均を多変数の作用素の平均に拡張する研究がこの10年余りで非常に発展した。本講演では久保-安藤の作用素平均から多変数の平均への発展の流れを概観してから、多変数の作用素さらに確率測度に対する平均の研究において不動点を考える方法が如何に重要であるかを説明する。

1. 準備的事項と2変数の作用素平均

以下では、 $\mathcal{H}$ は Hilbert 空間とする。 $B(\mathcal{H})$ は $\mathcal{H}$ 上の有界線形作用素の全体とし、

$$B(\mathcal{H})^+ := \{A \in B(\mathcal{H}) : A \geq 0\}, \quad \mathbb{P} = \mathbb{P}(\mathcal{H}) := \{A \in B(\mathcal{H}) : A > 0\}$$

とする(ただし $A \geq 0$ は正作用素, $A > 0$ は可逆な正作用素を意味する). $\mathcal{H}$ が有限次元で $n = \dim \mathcal{H}$ なら, $A \in B(\mathcal{H})$ は n 次正方行列と同一視できるので, $B(\mathcal{H}), B(\mathcal{H})^+, \mathbb{P} = \mathbb{P}(\mathcal{H})$ は無限次元の $\mathcal{H}$ の場合とし, 有限次元の場合は代わりに $\mathbb{M}_n, \mathbb{M}_n^+, \mathbb{P}_n$ で表すことにする. つまり $\mathbb{M}_n^+$ は $n \times n$ 半正定値行列の全体, $\mathbb{P}_n$ は $n \times n$ 正定値行列の全体を表す.

I は $\mathcal{H}$ 上の恒等作用素または単位行列を表す. $X \in B(\mathcal{H})$ (または $X \in \mathbb{M}_n$) の作用素ノルムを $\|X\|_\infty$ で表す. $B(\mathcal{H})$ 上のノルム位相は作用素ノルムによる位相を意味する. また $B(\mathcal{H})$ 上の強作用素位相を SOT と略記する. もちろん, $\mathbb{M}_n$ 上ではノルム位相 = SOT. $A, B \in \mathbb{P}$ の Thompson 距離は

$$d_T(A, B) := \|\log A^{-1/2} B A^{-1/2}\|_\infty = \log \max\{M(A/B), M(B/A)\}.$$

ここで $M(A/B) := \inf\{\alpha > 0 : A \leq \alpha B\}$. $(\mathbb{P}, d_T)$ は完備距離空間であり, $\mathbb{P}$ 上でノルム位相と d_T -位相は一致する ([51]). Thompson 距離は多変数の作用素の平均を議論する上で重要な役割を果たす.

1.1. 2変数の作用素平均: 久保-安藤理論

半直線 $[0, \infty)$ 上の (連続) 実数値関数 f が作用素単調であるとは, $A, B \in B(\mathcal{H})^+$ に対し

$$A \leq B \implies f(A) \leq f(B)$$

のときをいう. このとき, Löwner による f の積分表示は

$$f(x) = a + bx + \int_{(0, \infty)} \frac{x(1+t)}{x+t} dm(t), \quad x \in [0, \infty). \quad (1.1)$$

ここで, m は $(0, \infty)$ 上の有限正測度であり, $a = f(0), b \geq 0$. 作用素単調関数に関する Löwner の理論 (詳しくは [1, 8, 24] など) は $\mathbb{R}$ の任意の区間上の関数に対するものであるが, ここでは作用素平均との関連で, $[0, \infty)$ 上の場合に限定した.

1980 年に久保-安藤 [38] は (2 変数) 作用素平均の公理的な定義を与えた. $B(\mathcal{H})^+$ 上の 2 項演算 $\sigma : B(\mathcal{H})^+ \times B(\mathcal{H})^+ \rightarrow B(\mathcal{H})^+$ が次の 4 つの性質を満たすとき, σ を作用素平均という: $A, B, A', B', C, A_k, B_k \in B(\mathcal{H})^+ (k \in \mathbb{N})$ とする.

本研究は科研費 (課題番号: (C)17K05266) の助成を受けたものである.

2010 Mathematics Subject Classification: 47A64, 47B65, 47L07, 15A39, 15A42

キーワード: 作用素, 行列, 作用素単調関数, 作用素平均, 算術平均, 調和平均, 幾何平均, ベキ平均, AGM 平均不等式, ALM 平均, Thompson 距離, リーマン・トレース計量, NPC 空間, Karcher 方程式, Karcher 平均, Cartan 重心, Wasserstein 距離, マジョリゼーション, 対数マジョリゼーション, ユニタリ不変ノルム, Lie-Trotter 公式, 安藤-日合の不等式, 変形平均

* e-mail: hiai.fumio@gmail.com

(I) **単調性**: $A \leq A', B \leq B' \implies A\sigma B \leq A'\sigma B'$.

(II) **トランス不等式**: $C(A\sigma B)C \leq (CAC)\sigma(CBC)$.

(III) **下向き連続性**: $A_k \searrow A, B_k \searrow B \implies A_k\sigma B_k \searrow A\sigma B$. ただし $A_k \searrow A$ は $A_1 \geq A_2 \geq \dots$ かつ $A_k \rightarrow A$ (SOT) を意味する.

(IV) $I\sigma I = I$.

久保-安藤理論の主定理は

定理 1.1. [38] 作用素平均 σ の全体と $[0, \infty)$ 上の $f(1) = 1$ を満たす非負の作用素単調関数 f の全体との間の 1 対 1 の順序同型対応 $\sigma \leftrightarrow f$ が次により定まる:

$$f(x)I = I\sigma(xI), \quad x > 0,$$

$$A\sigma B = A^{1/2}f(A^{-1/2}BA^{-1/2})A^{1/2}, \quad A, B \in \mathbb{P} \quad (1.2)$$

作用素平均 σ に対し上定理で対応する作用素単調関数を f_σ と書き, σ の**表現関数**という. 上定理の要点は, 本来非可換である作用素の組 (A, B) に対する作用素平均 σ の議論が関数 f_σ のそれに帰着されることにある. 作用素平均の基本的な例は, $\alpha \in [0, 1]$ として

- 重み付き**算術平均**: $A\nabla_\alpha B := (1 - \alpha)A + \alpha B$, $f_{\nabla_\alpha}(x) = (1 - \alpha) + \alpha x$.
- 重み付き**調和平均**: $A!_\alpha B := [(1 - \alpha)A^{-1} + \alpha B^{-1}]^{-1}$, $f_{!_\alpha}(x) = \frac{x}{(1 - \alpha)x + \alpha}$.
- 重み付き**幾何平均**: $A\#_\alpha B := A^{1/2}(A^{-1/2}BA^{-1/2})^\alpha A^{1/2}$, $f_{\#_\alpha}(x) = x^\alpha$. 特に $A\#B = A\#_{1/2}B$ は Pusz-Woronowicz [47] が最初に導入した.

上記の3種類の α の重み付き平均はいずれも左, 右のトリビアルな作用素平均 l, r (i.e., $A!B = A$, $A\tau B = B$) を $\alpha = 0, 1$ で補間する.

次に, 作用素平均に関する基本性質をいくつか挙げる (詳しくは [38, 24] など):

(1) (III) より, 任意の $A, B \in B(\mathcal{H})^+$ に対し

$$A\sigma B = \lim_{\varepsilon \searrow 0} (A + \varepsilon I)\sigma(B + \varepsilon I). \quad (1.3)$$

これは σ が $\sigma|_{\mathbb{P} \times \mathbb{P}}$ から定まることをいう.

(2) 合同不変性: $C \in \mathbb{P}$ なら (II) は等式になる. さらに, $S \in B(\mathcal{H})$ が可逆なら

$$S^*(A\sigma B)S = (S^*AS)\sigma(S^*BS).$$

(3) 斉次性: $t(A\sigma B) = (tA)\sigma(tB)$ ($t \geq 0$). ((2) の特別の場合.)

(4) 同時凹性: $(A + B)\sigma(C + D) \geq A\sigma C + B\sigma D$ ($A, B, C, D \in B(\mathcal{H})^+$). 上記の斉次性より次と同じ:

$$\{tA + (1 - t)B\}\sigma\{tC + (1 - t)D\} \geq t(A\sigma C) + (1 - t)(B\sigma D), \quad 0 < t < 1.$$

(5) 不等式: $\alpha := f'_\sigma(1) \in [0, 1]$ であり,

$$\frac{x}{(1 - \alpha)x + \alpha} \leq f_\sigma(x) \leq (1 - \alpha) + \alpha x, \quad x > 0.$$

よって $!_\alpha \leq \sigma \leq \nabla_\alpha$. 特に, $!_\alpha \leq \#_\alpha \leq \nabla_\alpha$ (**AGH平均不等式**).

(6) 積分表示: (1.1) と (1.2) を合わせると次が得られる:

$$A\sigma B = aA + bB + \int_{(0,\infty)} \frac{1+t}{t} \{(tA) : B\} dm(t), \quad A, B \in \mathbb{P}. \quad (1.4)$$

ここで, $A : B := (A^{-1} + B^{-1})^{-1} = \frac{1}{2}(A!B)$ は A, B の**並列和**. m は $m(\{0\}) = a$, $m(\{\infty\}) = b$ とおいて, $[0, \infty]$ 上の確率測度になる.

(7) 変分表示: $A, B \in B(\mathcal{H})^+$ に対し

$$A\#B = \max \left\{ X \in B(\mathcal{H})^+ : \begin{bmatrix} A & X \\ X & B \end{bmatrix} \geq 0 \right\},$$

$$A!B = \max \left\{ X \in B(\mathcal{H})^+ : \begin{bmatrix} 2A & 0 \\ 0 & 2B \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} X & X \\ X & X \end{bmatrix} \right\}.$$

作用素平均 σ に対し, **転置** σ' , **随伴** σ^* , **双対** $\sigma^\perp$ を

$$A\sigma' B := B\sigma A, \quad A\sigma^* B := (A^{-1}\sigma B^{-1})^{-1}, \quad \sigma^\perp := (\sigma')^* = (\sigma^*)'$$

と定める. これらは再び作用素平均であり, 表現関数は

$$f_{\sigma'}(x) = xf_\sigma(x^{-1}), \quad f_{\sigma^*}(x) = f_\sigma(x^{-1})^{-1}, \quad f_{\sigma^\perp}(x) = x/f_\sigma(x), \quad x > 0.$$

作用素平均 σ は $\sigma = \sigma'$ なら**対称**, $\sigma = \sigma^*$ なら**自己随伴**といわれる.

1.2. 安藤-日合の不等式とマジョリゼーション

この節では, 主に行列の固有値に対するマジョリゼーションについて説明する. (無限次元の $B(\mathcal{H})$ での議論は [23] にある. さらに von Neumann 環の設定での研究も多い.) 以下の議論は半正定値行列の固有値のなす非負ベクトルに関するマジョリゼーションに関することなので, まず非負ベクトルに限定して, いくつかのマジョリゼーションの定義を与える. (マジョリゼーション理論全般については [43, 3, 4, 24] が詳しい.)

定義 1.2. n 次元の非負ベクトル $a = (a_1, \dots, a_n)$, $b = (b_1, \dots, b_n) \in (\mathbb{R}^+)^n$ (ただし, $\mathbb{R}^+ := [0, \infty)$) に対し, $a^\downarrow = (a_1^\downarrow, \dots, a_n^\downarrow)$ は a の減少再配列とする. このとき

- **弱マジョリゼーション** (または**劣マジョリゼーション**) $a \prec_w b$ が成立するとは

$$\sum_{i=1}^k a_i^\downarrow \leq \sum_{i=1}^k b_i^\downarrow, \quad 1 \leq k \leq n.$$

マジョリゼーション $a \prec b$ は $a \prec_w b$ かつ $\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^n b_i$ (i.e., 上で $k = n$ のとき等号成立) の場合をいう.

- **対数弱マジョリゼーション** $a \prec_{w \log} b$ が成立するとは

$$\prod_{i=1}^k a_i^\downarrow \leq \prod_{i=1}^k b_i^\downarrow, \quad 1 \leq k \leq n.$$

また, **対数マジョリゼーション** $a \prec_{\log} b$ は $a \prec_{w \log} b$ かつ $\prod_{i=1}^n a_i = \prod_{i=1}^n b_i$ の場合をいう.

一般に, $a \prec_{w \log} b \implies a \prec_w b$. さらに, a, b が正ベクトルなら,

$$a \prec_{\log} b \iff \log a \prec \log b \implies a \prec_w b.$$

$A, B \in \mathbb{M}_n^+$ とする. $\lambda(A) = (\lambda_1(A), \dots, \lambda_n(A))$ は A の固有値を重複度込みで大きい順に並べたベクトルとする. $\lambda(A) \prec_w \lambda(B)$, $\lambda(A) \prec \lambda(B)$, $\lambda(A) \prec_{\log} \lambda(B)$ のとき, それぞれ $A \prec_w B$, $A \prec B$, $A \prec_{\log} B$ と書くことにする.

$\mathbb{M}_n$ 上のノルム $\|\cdot\|$ は, 任意のユニタリ $U, V \in \mathbb{M}_n$ に対し $\|UXV\| = \|X\|$ を満たすとき, **ユニタリ不変ノルム** (または**対称ノルム**) といわれる. 行列の固有値に対する上述のマジョリゼーションは, ユニタリ不変ノルムに対する不等式を導くための有力な方法である. 次の結果が基本的である. これについては [24] が詳しい.

命題 1.3. $A, B \in \mathbb{M}_n^+$ とするとき, 以下の条件について次が成立:

$$\begin{array}{c} \text{(i)} \iff \text{(ii)} \implies \text{(iii)} \iff \text{(iv)} \\ \Downarrow \\ \text{(v)} \iff \text{(vi)} \implies \text{(vii)} \iff \text{(viii)} \iff \text{(ix)}. \end{array}$$

- (i) $A \prec_{\log} B$.
- (ii) すべてのユニタリ不変ノルム $\|\cdot\|$ と $f(e^x)$ が $\mathbb{R}$ 上で凸である $[0, \infty)$ 上の非負連続関数 f に対し $\|f(A)\| \leq \|f(B)\|$.
- (iii) $A \prec_{w \log} B$.
- (iv) すべてのユニタリ不変ノルム $\|\cdot\|$ と $f(e^x)$ が $\mathbb{R}$ 上で凸である $[0, \infty)$ 上の単調非減少な非負連続関数 f に対し $\|f(A)\| \leq \|f(B)\|$.
- (v) $A \prec B$.
- (vi) すべてのユニタリ不変ノルム $\|\cdot\|$ と $[0, \infty)$ 上の連続な非負凸関数 f に対し $\|f(A)\| \leq \|f(B)\|$.
- (vii) $A \prec_w B$.
- (viii) すべてのユニタリ不変ノルム $\|\cdot\|$ に対し $\|A\| \leq \|B\|$.
- (ix) すべてのユニタリ不変ノルム $\|\cdot\|$ と $[0, \infty)$ 上の単調非減少な非負凸関数 f に対し $\|f(A)\| \leq \|f(B)\|$.

さて, この節のタイトルにいう定理を次に述べる.

定理 1.4. [6] $0 \leq \alpha \leq 1$ とする.

- (1) **安藤-日合の不等式** (以下 AH 不等式): $A, B \in \mathbb{P}(\mathcal{H})$ について

$$A \#_{\alpha} B \leq I \implies A^r \#_{\alpha} B^r \leq I, \quad r \geq 1. \quad (1.5)$$

逆作用素をとれば次と同じ: $A \#_{\alpha} B \geq I \implies A^r \#_{\alpha} B^r \geq I, \quad r \geq 1$.

- (2) **対数マジョリゼーション**: 任意の $A, B \in \mathbb{M}_n^+$ に対し

$$A^r \#_{\alpha} B^r \prec_{\log} (A \#_{\alpha} B)^r, \quad r \geq 1. \quad (1.6)$$

これは次と同じ: $p \geq q > 0$ なら $(A^p \#_{\alpha} B^p)^{1/p} \prec_{\log} (A^q \#_{\alpha} B^q)^{1/q}$.

AH 不等式 (1.5) がいえると, (1.6) は反対称テンソル積の手法で容易に示せる. 実際, (1.5) は作用素ノルムの不等式

$$\|A^r \#_{\alpha} B^r\|_{\infty} \leq \|(A \#_{\alpha} B)^r\|_{\infty}, \quad i.e., \quad \lambda_1(A^r \#_{\alpha} B^r) \leq \lambda_1((A \#_{\alpha} B)^r)$$

と同値である. A, B を k 重**反対称テンソル積** $\wedge^k A, \wedge^k B$ ($1 \leq k \leq n$) で置き換えると

$$\lambda_1((\wedge^k A)^r \#_{\alpha} (\wedge^k B)^r) \leq \lambda_1(((\wedge^k A) \#_{\alpha} (\wedge^k B))^r).$$

ここで

$$\begin{aligned} \text{左辺} &= \lambda_1(\wedge^k(A^r \#_{\alpha} B^r)) = \prod_{i=1}^k \lambda_i(A^r \#_{\alpha} B^r), \\ \text{右辺} &= \lambda_1(\wedge^k((A \#_{\alpha} B)^r)) = \prod_{i=1}^k \lambda_i((A \#_{\alpha} B)^r) \end{aligned}$$

であり, $k = n$ のとき両辺 $= (\det A)^{r(1-\alpha)} (\det B)^{r\alpha}$ で等しいから, (1.6) がいえる.

次に, $0 \leq \alpha \leq 1$ に対し, $A, B \in \mathbb{P}(\mathcal{H})$ の (重み付き) *Log-Euclidean 平均* (chaotic 平均とも呼ばれる) は

$$LE_{\alpha}(A, B) := \exp\{(1 - \alpha) \log A + \alpha \log B\}$$

と定義される. これは A, B に対する単調性を満たさないので作用素平均ではない. 無限次元の場合, $LE_{\alpha}(A, B)$ を一般の $A, B \in B(\mathcal{H})^+$ に拡張することはやや面倒であるが, 行列 $A, B \in \mathbb{M}_n^+$ の場合は簡単である. 結果的には, $\alpha = 0, 1$ なら $LE_0(A, B) = A$, $LE_1(A, B) = B$ であり, $0 < \alpha < 1$ なら A, B の値域の共通部分への直交射影を P_0 として,

$$LE_{\alpha}(A, B) := P_0 \exp\{(1 - \alpha)P_0(\log A)P_0 + \alpha P_0(\log B)P_0\}$$

とすればよい. $AB = BA$ なら $A \#_{\alpha} B = LE_{\alpha}(A, B) = A^{1-\alpha} B^{\alpha}$ に注意する. よく知られた *Lie-Trotter 極限公式* は

$$\lim_{p \searrow 0} (A^{p(1-\alpha)/2} B^{p\alpha} A^{p(1-\alpha)/2})^{1/p} = LE_{\alpha}(A, B), \quad A, B \in \mathbb{M}_n^+.$$

さらに, 次の作用素平均版の Lie-Trotter 公式も知られている.

命題 1.5. [23, 31] 任意の作用素平均 σ に対し, $\alpha := f'_{\sigma}(1)$ とすると

$$\lim_{p \searrow 0} (A^p \sigma B^p)^{1/p} = LE_{\alpha}(A, B), \quad A, B \in \mathbb{M}_n^+.$$

これより, Log-Euclidean 平均は作用素平均でないが, すべての作用素平均の Lie-Trotter 極限であるという意味で最も普遍的な平均といえる. Araki [7] の対数マジョリゼーション (*Lieb-Thirring 不等式* の拡張) と定理 1.4 (2) を合わせて

定理 1.6. 任意の $A, B \in \mathbb{M}_n^+$ に対し, $p \geq q > 0$ なら

$$\begin{aligned} (A^p \#_{\alpha} B^p)^{1/p} &\prec_{\log} (A^q \#_{\alpha} B^q)^{1/q} \\ &\prec_{\log} LE_{\alpha}(A, B) \\ &\prec_{\log} (A^{q(1-\alpha)/2} B^{q\alpha} A^{q(1-\alpha)/2})^{1/q} \\ &\prec_{\log} (A^{p(1-\alpha)/2} B^{p\alpha} A^{p(1-\alpha)/2})^{1/p}. \end{aligned}$$

さて, 和田 [54] は定理 1.4 の (1) を特徴付け定理に精密化した.

定理 1.7. [54] 作用素平均 σ について、次の (i), (ii) は同値:

$$(i) f_{\sigma}(x^r) \geq f_{\sigma}(x)^r \quad (x > 0), r \geq 1;$$

$$(ii) \text{ 任意の } A, B \in \mathbb{P}_n \text{ に対し, } A\sigma B \geq I \implies A^r\sigma B^r \geq I, r \geq 1.$$

また、次の (i'), (ii') も同値:

$$(i') f_{\sigma}(x^r) \leq f_{\sigma}(x)^r \quad (x > 0), r \geq 1;$$

$$(ii') \text{ 任意の } A, B \in \mathbb{P}_n \text{ に対し, } A\sigma B \leq I \implies A^r\sigma B^r \leq I, r \geq 1.$$

幾何平均 $\#_{\alpha}$ は明らかに上の (i), (i') の両方を満たす. 算術, 幾何, 調和平均を組み合わせた作用素平均として, $0 \leq \alpha \leq 1, r \in [-1, 1] \setminus \{0\}$ に対して定義される (重み付き) **ベキ平均**

$$A\mathfrak{p}_{\alpha,r}B := A^{1/2}\{(1-\alpha)I + \alpha(A^{-1/2}BA^{-1/2})^r\}^{1/r}A^{1/2}, \quad f_{\mathfrak{p}_{\alpha,r}}(x) = (1-\alpha + \alpha x^r)^{1/r}$$

がある. 特に $\mathfrak{p}_{\alpha,1} = \nabla_{\alpha}$, $\mathfrak{p}_{\alpha,-1} = !_\alpha$ である. $\sigma = \mathfrak{p}_{\alpha,r}$ について, $r \in (0, 1]$ なら (i) を満たすから (ii) が成立し, $r \in [-1, 0)$ なら (i') を満たすから (ii') が成立する.

ところで, 和田は最近の論文 [55] で AH 不等式が成立するのは $0 < r < 1$ に限られることを示している. つまり, $0 < r < 1$ で $0 < \alpha < 1$ なら $A, B > 0, A\#_{\alpha}B \geq I \not\Rightarrow A^r\#_{\alpha}B^r \geq I$. さらに, $0 < r < 1$ で作用素平均 σ が定理 1.7 の (i) を満たし $\sigma \neq \nabla, !$ なら $A, B > 0, A\sigma B \geq I \not\Rightarrow A^r\sigma B^r \geq I$. 他方, 瀬尾 [48] は $0 < r \leq 1$ の場合の補完型 AH 不等式を次の通り示した: $0 \leq \alpha \leq 1$ とすると

$$A\#_{\alpha}B \leq I \implies A^r\#_{\alpha}B^r \leq \|A^{-1}\#_{\alpha}B^{-1}\|_{\infty}^{1-r}I, \quad 0 < r \leq 1.$$

この節の最後に, すべての作用素平均に対して成立するノルム不等式と弱マジョリゼーションに触れておく. 次の命題の (1) は $\|A : B\| \leq \|A\| : \|B\|$ を示してから積分表示 (1.4) を使うと証明できる. (2) の証明も Ky Fan のマジョリゼーションと (1.4) から容易である. ユニタリ不変ノルムに対する (1) は [4] に書いてある. (2) も知られていると思われるが, 適当な文献が見当たらない.

命題 1.8. σ を任意の作用素平均とする.

- (1) $\mathbb{M}_n$ 上のノルム $\|\cdot\|$ が単調ノルム (i.e., $A \geq B \geq 0 \implies \|A\| \geq \|B\|$ を満たす) なら, 特にユニタリ不変ノルムなら

$$\|A\sigma B\| \leq \|A\|\sigma\|B\|, \quad A, B \in \mathbb{M}_n^+.$$

- (2)

$$\lambda(A\sigma B) \prec_w \lambda(A)\sigma\lambda(B), \quad A, B \in \mathbb{M}_n^+.$$

よってユニタリ不変ノルムに対し, $\|A\sigma B\| \leq \|\lambda(A)\sigma\lambda(B)\| \leq \|A\|\sigma\|B\|$.

1.3. 補足

前節に書き入れなかったいくつかの補足事項を以下にまとめる.

1.3.1. AH 不等式 vs. 古田不等式

有名な古田不等式 [21] は, $r, p \geq 0$ と $q \geq 1$ が $(1+r)q \geq p+r$ を満たすとき, $A, B \in B(\mathcal{H})^+$ について

$$A \geq B \implies (A^{r/2}B^pA^{r/2})^{\frac{1}{q}} \leq A^{\frac{p+r}{q}}.$$

AH 不等式 (1.5) はこれと似た趣きあり, どちらの証明でも反復法が使われのも似ているが, 当初は別種の不等式と思われていた. しかし, 藤井-亀井 [19] は両者がお互いに他を使ってショートカットに証明できることを示した. 結局のところ, 2つの不等式は親和性が強いといえる. 和田 [54] は定理 1.7 から古田不等式の拡張版を得ている.

1.3.2. 作用素平均の一般化

作用素平均の表示式 (1.2) は $[0, \infty)$ 上の関数 f が非負作用素単調でなくても意味をもつ。藤井-藤井-瀬尾 [17] は非負とは限らない作用素単調関数で (1.2) と表されるような $\mathbb{P}(\mathcal{H})$ 上の 2 項演算の (久保-安藤のより弱い) 公理系を与え、**ソリダリティ** と名付けた。最近では、 f が $(0, \infty)$ 上の一般の関数のとき、 $A, B \in \mathbb{P}(\mathcal{H})$ に対し $P_f(A, B) := B^{1/2} f(B^{-1/2} A B^{-1/2}) B^{1/2}$ ((1.2) と A, B の順序が逆であることに注意) と定義して、 f の**作用素パースペクティブ**と呼ばれることが多い。この用語は凸関数 $f(x)$ を 2 変数化した $(x, y) \mapsto y f(x/y)$ が自動的に同時凸関数になるという事実 (凸解析の分野で有用) があり、これを f のパースペクティブと呼ぶことから来ている。この事実の作用素版が知られている。つまり f が $(0, \infty)$ 上の作用素凸関数なら、 $P_f(A, B)$ は $\mathbb{P} \times \mathbb{P}$ 上で同時作用素凸である ([14, 15])。このトレースを取った $\text{Tr } P_f(A, B)$ は量子情報理論で量子 f -ダイバージェンスと呼ばれるものの一種である。(作用素凸関数については [22] が詳しい。)

1.3.3. 反対称テンソル積の手法

定理 1.4 のところで述べたように、反対称テンソル積の手法は対数マジョリゼーションの証明に非常に有効である。しかし、適用できる行列関数形が $|A^p B^q \cdots|^r$ のように、積、絶対値、ベキからなるものに限られるのが難点である。反対称テンソル積の手法が使えるのは、論文 [26] のように、せいぜい固有値または特異値関数を対数積分した形までである。したがって、定理 1.7 で AH 不等式が拡張されても、対数マジョリゼーションの拡張にはならない。

1.3.4. チャレンジ問題

(半)有限 von Neumann 環の τ -可測作用素に対する一般化された特異値の概念 [16] を使って、各種のマジョリゼーションを von Neumann 環の設定で議論することができる。幸崎 [37] は定理 1.6 で取り上げた荒木 (-Lieb-Thirring) の対数マジョリゼーションを von Neumann 環の場合に拡張した。von Neumann 環の場合、反対称テンソル積の手法が使えないので、証明は簡単ではない。対数マジョリゼーション (1.6) を von Neumann 環の設定に拡張することは興味深いチャレンジ問題である。

2. 多変数の平均

久保-安藤の論文 [38] 以降、長年未解決であった問題は 2 変数の幾何平均 $A \# B$ を 3 変数以上に拡張することであった。この突破口を開いたのは、反復近似の方法で多変数の幾何平均を導入した安藤-Li-Mathias の 2004 年の論文 [5] とリーマン幾何の方法で多変数の幾何平均が定義できることを発見した 2005, 6 年の Moaker [44] と Bhatia-Holbrook [10] の論文であった。2.1 節で安藤-Li-Mathias の方法を概説した後、2.2 節以降でリーマン幾何のアプローチによる多変数の平均に関する最近の発展を解説する。

2.1. ALM 平均

論文 [5] で導入された多変数の幾何平均は **ALM 平均** と呼ばれる。論文では行列の場合を議論しているが、無限次元の作用素でもそのまま当てはまる。まず 3 変数の $A, B, C \in \mathbb{P}$ に対する ALM 平均 $G(A, B, C)$ の定義を見よう。

$$(A_1, B_1, C_1) := (A, B, C),$$
$$(A_{r+1}, B_{r+1}, C_{r+1}) := (B_r \# C_r, A_r \# C_r, A_r \# B_r), \quad r = 1, 2, \dots$$

とすると

$$\lim_{r \rightarrow \infty} A_r = \lim_{r \rightarrow \infty} B_r = \lim_{r \rightarrow \infty} C_r$$

がいえる。そこで、この共通の極限を $G(A, B, C)$ と定める。このやり方を反復することで、任意の m 個の $A_1, \dots, A_m \in \mathbb{P}$ に対する $G(A_1, \dots, A_m)$ を次に定義する。

定義 2.1. $m = 2$ の場合 $G(A_1, A_2) := A_1 \# A_2$. $m (\geq 2)$ の場合が既に定義されたとして, $m + 1$ 個の $A_1, A_2, \dots, A_{m+1} \in \mathbb{P}$ に対し

$$\begin{aligned} (A_1^{(1)}, A_2^{(1)}, \dots, A_{m+1}^{(1)}) &:= (A_1, A_2, \dots, A_{m+1}), \\ (A_1^{(r+1)}, A_2^{(r+1)}, \dots, A_{m+1}^{(r+1)}) &:= (G(A_j^{(r)})_{j \neq 1}, G(A_j^{(r)})_{j \neq 2}, \dots, G(A_j^{(r)})_{j \neq m+1}), \quad r = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

とすると, $(\star) j = 1, \dots, m + 1$ に対し $\lim_{r \rightarrow \infty} A_j^{(r)}$ が存在して極限が j に依らないなら

$$G(A_1, \dots, A_{m+1}) := \lim_{r \rightarrow \infty} A_j^{(r)}$$

と定める.

上の定義が成立するには, $(\star)$ を示さなければならない. これを証明する中で, 安藤-Li-Mathias は多変数の $G(A_1, \dots, A_m)$ が満たすべき次の 10 個の性質を提案した: $A_j, B_j, A_{jk} \in \mathbb{P}$ ($k \in \mathbb{N}$) とする.

- (P1) A_j が互いに可換なら $G(A_1, \dots, A_m) = (A_1 \cdots A_m)^{1/m}$.
- (P2) 同時斉次性: $G(t_1 A_1, \dots, t_m A_m) = (t_1 \cdots t_m)^{1/m} G(A_1, \dots, A_m)$, $t_j > 0$.
- (P3) $\{1, \dots, m\}$ 上の任意の置換 π に対し $G(A_{\pi(1)}, \dots, A_{\pi(m)}) = G(A_1, \dots, A_m)$.
- (P4) 単調性: $A_j \leq B_j$ なら $G(A_1, \dots, A_m) \leq G(B_1, \dots, B_m)$.
- (P5) 下向き連続性: $1 \leq j \leq m$ に対し $A_{jk} \searrow A_j$ ($k \rightarrow \infty$) なら $G(A_{1k}, \dots, A_{mk}) \rightarrow G(A_1, \dots, A_m)$ (SOT).
- (P6) 合同不変性: 可逆な $S \in B(\mathcal{H})$ に対し $G(S^* A_1 S, \dots, S^* A_m S) = S^* G(A_1, \dots, A_m) S$.
- (P7) 同時凹性: $(A_1, \dots, A_m) \mapsto G(A_1, \dots, A_m)$ は凹.
- (P8) 自己随伴性: $G(A_1, \dots, A_m) = G(A_1^{-1}, \dots, A_m^{-1})^{-1}$.
- (P9) 行列式等式: $\det G(A_1, \dots, A_m) = (\det A_1 \cdots \det A_m)^{1/m}$.
- (P10) AGH 平均不等式: $\mathcal{H}(A_1, \dots, A_m) \leq G(A_1, \dots, A_m) \leq \mathcal{A}(A_1, \dots, A_m)$. ここで

$$\mathcal{A}(A_1, \dots, A_m) := \frac{A_1 + \cdots + A_m}{m}, \quad \mathcal{H}(A_1, \dots, A_m) := \left(\frac{A_1^{-1} + \cdots + A_m^{-1}}{m} \right)^{-1}.$$

定義 2.1 に基づき, m に関する帰納法により次が示された.

定理 2.2. [5] 任意の $m \geq 2$, $A_1, \dots, A_{m+1} \in \mathbb{P}$ に対し, 定義 2.1 の $(\star)$ が成立する. したがって $G(A_1, \dots, A_m)$ がすべての $m \geq 2$ に対し定義され, それは (P1)–(P10) と次を満たす:

$$d_T(G(A_1, \dots, A_m), G(B_1, \dots, B_m)) \leq \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m d_T(A_j, B_j), \quad A_j, B_j \in \mathbb{P}, \quad m \geq 2.$$

ALM 平均は理論面だけでなく, 近似計算の方法を与えるので数値計算の観点からも重要である. 数値計算速度の観点から, ALM 平均の改訂版がいくつか提案されている (例えば [12]). さらに幾何平均 $\#$ だけでなく, 一般の作用素平均 σ から反復近似の方法で多変数の作用素の重み付き平均が導入されている ([46]).

2.2. 多変数の幾何平均: Karcher 平均

Mokher [44] と Bhatia-Holbrook [10] が導入した多変数の幾何平均は $n \times n$ 正定値行列からなる $\mathbb{P}_n$ のリーマン多様体としての構造に基づいている. $n \times n$ エルミート行列全体 $\mathbb{M}_n^{sa}$ は *Hilbert-Schmidt ノルム* $\|X\|_2 := (\text{Tr } X^2)^{1/2}$ により n^2 -次元ユークリッド空間である. $\mathbb{P}_n$ は $\mathbb{M}_n^{sa}$ の開集合だから, 自然にリーマン多様体となり, 各 $A \in \mathbb{P}_n$ の接平面は $\mathbb{M}_n^{sa}$ と同一視できる. $\mathbb{P}_n$ には **リーマン・トレース計量** と呼ばれる標準的なリーマン計量

$$\langle X, Y \rangle_A := \text{Tr } A^{-1} X A^{-1} Y, \quad A \in \mathbb{P}_n, \quad X, Y \in \mathbb{M}_n^{sa}$$

が入る. $\|X\|_A = \|A^{-1/2} X A^{-1/2}\|_2$ だから, (区分的) 微分可能な曲線 $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{P}_n$ の長さは

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\gamma(t)^{-1/2} \gamma'(t) \gamma(t)^{-1/2}\|_2 dt$$

で与えられる. $A, B \in \mathbb{P}_n$ の**測地距離**は

$$d(A, B) := \inf \{ L(\gamma) : \gamma \text{ は } A, B \text{ を結ぶ微分可能な曲線} \}$$

と定まる. リーマン多様体 $\mathbb{P}_n$ について基本的な事柄を次に挙げる ([9] に詳しい):

- 任意の可逆な $S \in \mathbb{M}_n$ に対し $d(S^* A S, S^* B S) = d(A, B)$. また $d(A^{-1}, B^{-1}) = d(A, B)$.
- $A, B \in \mathbb{P}_n$ を結ぶ (パラメータのとり方を除き) 唯一つの測地線

$$\gamma_{A,B}(t) := A \#_t B = A^{1/2} (A^{-1/2} B A^{-1/2})^t A^{1/2}, \quad t \in [0, 1]$$

が存在する. つまり測地線が重み付き幾何平均で与えられる. さらに

$$d(A, B) = \|\log A^{-1/2} B A^{-1/2}\|_2 \geq \|\log A - \log B\|_2.$$

上の不等式は $d(e^X, e^Y) \geq \|X - Y\|_2$ ($X, Y \in \mathbb{M}_n^{sa}$) と同じで, **EMI性** (exponential metric increasing) と呼ばれる. これは対数マジョリゼーション (定理 1.6)

$$\exp(\log A^{-1} + \log B) \prec_{\log} A^{-1/2} B A^{-1/2}, \quad \text{i.e.,} \quad \log A^{-1} + \log B \prec \log A^{-1/2} B A^{-1/2}$$

の系と見なすことができる.

- $A, B \in \mathbb{P}_n$ の測地中点を $M := A \# B$ とすると, 任意の $C \in \mathbb{P}_n$ に対し

$$d^2(M, C) \leq \frac{d^2(A, C) + d^2(B, C)}{2} - \frac{d^2(A, B)}{4}. \quad (2.1)$$

この不等式は**半中線定理**と呼ばれる. (通常のユークリッド空間の中線定理は $\|\frac{a+b}{2} - c\|^2 = \frac{\|a-c\|^2 + \|b-c\|^2}{2} - \frac{\|a-b\|^2}{4}$ と書ける.)

- $A, B, C, D \in \mathbb{P}_n$ に対し $d(A \#_t B, C \#_t D) \leq (1-t)d(A, C) + td(B, D)$, $0 \leq t \leq 1$.
- $(\mathbb{P}_n, d)$ は可分な完備距離空間である.

上述の半中線定理 (2.1) を満たす距離空間は (大域的) **NPC 空間** (nonpositive curvature), **Hadamard 空間**, **CAT(0) 空間** などと呼ばれ, 近年活発に研究されている (サーベイ論文 [50] がお勧め).

さて、有限個の $A_1, \dots, A_m \in \mathbb{P}$ と確率ベクトル $w = (w_1, \dots, w_m)$ ($w_j \geq 0, \sum_{j=1}^m w_j = 1$) に対し、重み付き距離2乗和

$$f(Z) := \sum_{j=1}^m w_j d^2(Z, A_j), \quad Z \in \mathbb{P}_n \quad (2.2)$$

を最小化する問題を考える。NPC空間ではこの最小化問題の解が唯1つ存在することが知られている。2.4節でもう少し詳しく説明するが、この事実はもっと一般に $\mathbb{P}_n$ 上の確率測度の場合で成立する。そこで次が定義できる。

定義 2.3. [44, 10] 任意の $A_1, \dots, A_m \in \mathbb{P}$ と上記の w に対し

$$G_w(A_1, \dots, A_m) := \arg \min_{Z \in \mathbb{P}} \sum_{j=1}^m w_j d^2(Z, A_j)$$

と定める。これは $A_1, \dots, A_m$ の(重み付き) **リーマン幾何平均**, **最小2乗平均**などと呼ばれる。特に等ウェイト $w = (1/m, \dots, 1/m)$ のとき $G(A_1, \dots, A_m)$ と書く。

NPC空間 $(\mathbb{P}_n, d)$ では、任意の $A \in \mathbb{P}$ に対し $Z \in \mathbb{P} \mapsto d^2(Z, A)$ は**幾何的一様凸**と呼ばれる強い凸性を持ち、(2.2)の $f(Z)$ も幾何的一様凸になる。このとき、 X が $f(Z)$ の最小点であることは勾配 $\nabla f(X) = 0$ を満たすことと同値になる。 $\phi(Z) := d^2(Z, A)$ の勾配は

$$\nabla \phi(Z) = 2Z^{-1/2}(\log Z^{1/2} A^{-1} Z^{1/2})Z^{-1/2}$$

と計算されるから

$$\nabla f(Z) = 2Z^{-1/2} \left(\sum_{j=1}^m w_j \log Z^{1/2} A_j^{-1} Z^{1/2} \right) Z^{-1/2}.$$

よって $G_w(A_1, \dots, A_m)$ は

$$\sum_{j=1}^m w_j \log X^{-1/2} A_j X^{-1/2} = 0 \quad (2.3)$$

の一意解として決まる。上述のような最小2乗問題と勾配 = 0 の式 (2.3) はもっと一般の設定で Karcher [33] により考察されたので、(2.3) は **Karcher 方程式** と呼ばれ、 $G_w(A_1, \dots, A_n)$ は別名 **Karcher 平均** と呼ばれることが多い。

これでリーマン幾何のアプローチによる多変数の幾何平均が定義された。 $G_w(A_1, \dots, A_m)$ が ALM 平均の性質 (P1)–(P10) (ただし重み w に対応した修正が必要) を満たすことは最終的に Lawson-Lim [39] で証明された。(P10) は (P1)–(P9) のいくつかを使って導かれる(直接の証明が [57] にある)。(P1)–(P9) のうち証明するのが難しかったのは (P4) と (P7) である。[39] では、NPC空間で成立する一種の大数の強法則を使う確率論的な方法で (P4) と (P7) を証明した。その後、(P7) の証明が [11] で少し簡易化され、さらに確率論(つまりサイコロ)を使わない証明が [32] で与えられた。

Karcher 平均と ALM 平均、さらに Bini-Meini-Poloni 平均はすべて (P1)–(P10) を満たすが、数値計算によれば互いに異なるものである。(上では ALM 平均と Karcher 平均を説明の都合上、同じ $G(A_1, \dots, A_m)$ で書いた。) 結局、多変数の幾何平均は多種多様であり、(P1)–(P10) の性質からは一意に決まらない。しかし $\mathbb{P}_n$ の自然なリーマン多様体の構造に基づく Karcher 平均が代表格であろう。

2.3. 多変数のベキ平均

定理 1.7 の直ぐ後で定義した 2 変数の作用素ベキ平均 $p_{\alpha,r}$ について、次の事実は容易に示せる：
 $A, B \in \mathbb{P}$, $\alpha \in [0, 1]$, $0 < r \leq 1$ とする.

- $Ap_{\alpha,r}B$ は $X = (X \#_r A) \nabla_\alpha (X \#_r B)$ ($X \in \mathbb{P}$) の唯一つの解である.
- $Ap_{\alpha,-r}B$ は $X = (X \#_r A) !_\alpha (X \#_r B)$ ($X \in \mathbb{P}$) の唯一つの解である.
- $\lim_{r \rightarrow 0} Ap_{\alpha,r}B = A \#_\alpha B$ (SOT). これは $\lim_{r \rightarrow 0} (1 - \alpha + \alpha x^r)^{1/r} = x^\alpha$ からいえる.

Lim-Pálfa [41] は上の事実を念頭に、 $0 < r \leq 1$ と行列 $A_1, \dots, A_m \in \mathbb{P}_n$ に対し次の方程式を考えた： $X \in \mathbb{P}$ について

$$X = \mathcal{A}_w(X \#_r A_1, \dots, A \#_r A_m), \quad i.e., \quad I = \sum_{j=1}^m w_j (X^{-1/2} A_j X^{-1/2})^r, \quad (2.4)$$

$$X = \mathcal{H}_w(X \#_r A_1, \dots, A \#_r A_m), \quad i.e., \quad I = \left[\sum_{j=1}^m w_j (X^{-1/2} A_j X^{-1/2})^{-r} \right]^{-1}. \quad (2.5)$$

定理 2.4. [41] (2.4) と (2.5) はそれぞれ唯一つの解をもつ.

実際、(2.5) は $X^{-1} = \mathcal{A}_w(X^{-1} \#_r A_1^{-1}, \dots, X^{-1} \#_r A_m^{-1})$ と同値だから、(2.4) だけを考えればよい. 写像 $F : \mathbb{P}_n \rightarrow \mathbb{P}_n$ を

$$F(X) := \mathcal{A}_w(X \#_r A_1, \dots, A \#_r A_m), \quad X \in \mathbb{P}_n$$

と定めると

$$d_T(F(X), F(Y)) \leq \max_{1 \leq j \leq m} d_T(X \#_r A_j, Y \#_r A_j) \leq (1 - r) d_T(X, Y), \quad X, Y \in \mathbb{P}_n$$

がいえる. よって Banach の縮小原理より、 F の不動点つまり (2.4) の解が唯一つ存在する. これより次が定義できる.

定義 2.5. 方程式 (2.4), (2.5) の解をそれぞれ $P_{w,r}(A_1, \dots, A_m)$, $P_{w,-r}(A_1, \dots, A_m)$ と表し、 $A_1, \dots, A_m$ の (重み付き) **ベキ平均** という. $\alpha \in [0, 1]$, $w = (1 - \alpha, \alpha)$ とすると、 $P_{w,r}(A, B) = Ap_{\alpha,r}B$, $P_{w,-r}(A, B) = Ap_{\alpha,-r}B$ である.

$P_{w,r}$ の重要な性質を挙げる.

定理 2.6. [41]

- (1) 単調性: $A_j \leq B_j$ ($1 \leq j \leq m$) なら $P_{w,r}(A_1, \dots, A_m) \leq P_{w,r}(B_1, \dots, B_m)$.
- (2) $0 < r' < r \leq 1$ なら

$$\mathcal{H}_w \leq P_{w,-r} \leq P_{w,-r'} \leq P_{w,r'} \leq P_{w,r} \leq \mathcal{A}_w.$$

- (3) 任意の $A_j \in \mathbb{P}_n$ に対し

$$\lim_{r \rightarrow 0} P_{w,r}(A_1, \dots, A_m) = G_w(A_1, \dots, A_m).$$

上の (1) と (3) から G_w の単調性が改めて導かれる.

注意 2.7. 無限次元の $\mathcal{H}$ 上の $\mathbb{P}$ には 2.2 節の述べたようなリーマン多様体および NPC 空間の構造は入らない (実際 $\mathbb{P}$ 上では Tr や $\|\cdot\|_2$ はすべて ∞ の値である). よって定義 2.3 は意味をなさない. しかし方程式 (2.3)–(2.5) は無限次元でも意味をもつ. Lawson-Lim [40] はこれらの方程式の解として無限次元の場合に Karcher 平均とベキ平均を定義し, 定理 2.6 を示した. ただし (3) は SOT 収束になる. ところで 1.3.2 節で述べたように, $A\#_r B$ の式は $r \in [0, 1]$ でなくても意味をもつ ($r \in [0, 1]$ でないときは $\#_r$ は $\sharp_r$ で書かれることが多い). 瀬尾 [49] は無限次元の $\mathcal{H}$ で $1 < r < 2$ の場合でも方程式 (2.4), (2.5) が唯一つの解をもつことを示し, $r \in (-2, -1) \cup (1, 2)$ に対する多変数の (重み付き) ベキ平均 $P_{w,r}(A_1, \dots, A_m)$ を定義した.

2.4. 確率測度への拡張

この節では, 多変数の幾何平均 (Karcher 平均) を $\mathbb{P}_n$ 上の確率測度の場合に拡張して議論する. 2.2 節で述べたように $(\mathbb{P}_n, d)$ は NPC 空間という可分な完備距離空間である. $\mathbb{P}_n$ のボレル集合の全体を $\mathcal{B}(\mathbb{P}_n)$ で表し, $\mathbb{P}_n$ 上のボレル確率測度の全体を $\mathcal{P}(\mathbb{P}_n)$ で表す. $\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{P}_n)$ は, ある $Y \in \mathbb{P}_n$ (すべての $Y \in \mathbb{P}_n$ としても同じ) に対し

$$\int_{\mathbb{P}_n} d(X, Y) d\mu(X) < \infty$$

であるとき有限モーメントをもつという. このような $\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{P}_n)$ の全体を $\mathcal{P}^1(\mathbb{P}_n)$ で表す. $\mu, \nu \in \mathcal{P}^1(\mathbb{P}_n)$ の 1-Wasserstein 距離は

$$d_1^W(\mu, \nu) := \inf_{\pi \in \Pi(\mu, \nu)} \int_{\mathbb{P}_n \times \mathbb{P}_n} d(X, Y) d\pi(X, Y)$$

と定義される. ここで $\Pi(\mu, \nu)$ は μ, ν の結合測度 (i.e., $\pi \in \mathcal{P}(\mathbb{P}_n \times \mathbb{P}_n)$ で任意の $\mathcal{O} \in \mathcal{B}(\mathbb{P}_n)$ に対し $\pi(\mathcal{O} \times \mathbb{P}_n) = \mu(\mathcal{O})$, $\pi(\mathbb{P}_n \times \mathcal{O}) = \nu(\mathcal{O})$ を満たすもの) の全体とする. $\mathbb{P}_n$ 上の有限サポートの一樣確率測度 (i.e., $\mu = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \delta_{A_j}$ と書ける測度) の全体 $\mathcal{P}_0(\mathbb{P}_n)$ は $\mathcal{P}^1(\mathbb{P}_n)$ で d_1^W について稠密である. (ちなみに Wasserstein 距離は最適輸送問題 ([53]) で有用である.)

多変数の幾何平均の確率測度への拡張は次に定義される.

定義 2.8. $\mu \in \mathcal{P}^1(\mathbb{P}_n)$ の Cartan 重心を, $Y \in \mathbb{P}_n$ を任意に固定して

$$G(\mu) := \arg \min_{Z \in \mathbb{P}} \int_{\mathbb{P}_n} [d^2(Z, X) - d^2(Y, X)] d\mu(X)$$

と定める. この最小点が Y のとり方に依らないで一意的に存在することは NPC 空間における一般的な定理として知られる ([50]). $|d^2(Z, X) - d^2(Y, X)| \leq d(Z, Y)\{d(Z, X) + d(Y, X)\}$ だから, $X \mapsto d^2(Z, X) - d^2(Y, X)$ が μ について可積分であることに注意する. μ の 2 次モーメントが有限 (i.e., $\int_{\mathbb{P}_n} d^2(X, Y) d\mu(Y) < \infty$) なら, μ の Cartan 重心は

$$G(\mu) = \arg \min_{Z \in \mathbb{P}} \int_{\mathbb{P}_n} d^2(Z, X) d\mu(X)$$

として定まる. 特に μ が有限サポートをもつ, i.e., $A_1, \dots, A_m \in \mathbb{P}_n$ と確率ベクトル $(w_1, \dots, w_m)$ により $\mu = \sum_{j=1}^m w_j \delta_{A_j}$ なら, $G(\mu)$ は定義 2.3 の $G_w(A_1, \dots, A_m)$ と一致する. Karcher 平均 G_w の重み w は Cartan 重心では確率測度 μ にくり込まれていることに注意する.

次の縮小性も NPC 空間で一般に成立する基本定理である ([50]). この定理は, $\mathcal{P}_0(\mathbb{P}_n)$ が $\mathcal{P}^1(\mathbb{P}_n)$ で d_1^W -稠密であることより, $G(A_1, \dots, A_m)$ から極限移行して $G(\mu)$ の性質を示すときに有効である.

定理 2.9. 任意の $\mu, \nu \in \mathcal{P}^1(\mathbb{P}_n)$ に対し

$$d(G(\mu), G(\nu)) \leq d_1^W(\mu, \nu).$$

定義 2.10. 集合 $\mathcal{U} \subset \mathbb{P}_n$ が**上側集合**とは、 $A \in \mathcal{U}, A \leq B \implies B \in \mathcal{U}$ のときをいう。また、 $\mathcal{L} \subset \mathbb{P}_n$ が**下側集合**とは、 $A \in \mathcal{L}, B \leq A \implies B \in \mathcal{L}$ のときをいう。 $\mu, \nu \in \mathcal{P}(\mathbb{P}_n)$ について、すべての上側閉集合 $\mathcal{U} \subset \mathbb{P}_n$ に対し $\mu(\mathcal{U}) \leq \nu(\mathcal{U})$ が成立するとき、 $\mu \leq \nu$ と書く。これはすべての下側閉集合 $\mathcal{L} \subset \mathbb{P}_n$ に対し $\mu(\mathcal{L}) \geq \nu(\mathcal{L})$ が成立することと同じ。 $\mu \leq \nu$ の種々の同値条件が [27] で与えられている。確率ベクトル $(w_1, \dots, w_m)$ で $\mu = \sum_{j=1}^m w_j \delta_{A_j}, \nu = \sum_{j=1}^m w_j \delta_{B_j}$ のとき、 $A_j \leq B_j$ ($1 \leq j \leq m$) なら $\mu \leq \nu$ は明らかである。

次に Karcher 平均の一般化である Cartan 重心 $G(\mu)$ について最近得られている結果をまとめる。

定理 2.11. [35, 36, 29, 30] $\mu, \nu \in \mathcal{P}^1(\mathbb{P}_n)$ とする。

(1) $G(\mu)$ は Karcher 方程式

$$\int_{\mathbb{P}_n} \log X^{-1/2} A X^{-1/2} d\mu(A) = 0$$

の唯一つの解 $X \in \mathbb{P}_n$ である。((2.3) の拡張.)

(2) 単調性: $\mu \leq \nu \implies G(\mu) \leq G(\nu)$. ((P4) の拡張.)

(3) AH 不等式: $G(\mu) \leq I \implies G(\mu^r) \leq I, r \geq 1$. ((1.5) の拡張.) ここで μ^r は μ の $A \in \mathbb{P}_n \mapsto A^r \in \mathbb{P}_n$ による像測度。

(4) 対数マジョリゼーション: $G(\mu^r) \prec_{\log} G(\mu^r), r \geq 1$. ((1.6) の拡張.)

(5) AGH 平均不等式: $\int_{\mathbb{P}_n} (\|X\| + \|X^{-1}\|) d\mu(X) < \infty$ なら

$$\mathcal{H}(\mu) := \left[\int_{\mathbb{P}_n} X^{-1} d\mu(X) \right]^{-1} \leq G(\mu) \leq \mathcal{A}(\mu) := \int_{\mathbb{P}_n} X d\mu(X).$$

(6) Lie-Trotter 公式:

$$\lim_{p \rightarrow 0} G(\mu^p)^{1/p} = LE(\mu) := \exp \int_{\mathbb{P}_n} \log X d\mu(X).$$

上定理について 2, 3 コメントすると、Karcher 平均 $G_w(A_1, \dots, A_m)$ に対する (3) は [56] で示された。Cartan 重心 $G(\mu)$ に対する (3) は実質的に [36] で示された。(3) から (4) を示すために、[29] で $\mu \in \mathcal{P}^1(\mathbb{P}_n)$ に対する反対称テンソル積の手法が使われた。反対称テンソル積の写像 $\wedge^k : \mathbb{P}_n \rightarrow \mathbb{P}_l$ ($l := \binom{n}{k}$) による $\mu \in \mathcal{P}^1(\mathbb{P}_n)$ の像測度を $(\wedge^k)_* \mu$ とすると、 $(\wedge^k)_* \mu \in \mathcal{P}^1(\mathbb{P}_l)$ であり

$$G((\wedge^k)_* \mu) = \wedge^k G(\mu)$$

が成立することが証明の要点である。(5) の積分条件は $\mathcal{A}(\mu)$ と $\mathcal{H}(\mu)$ が存在するために必要である。(6) は AGH 平均不等式が使えるなら、 $\mathcal{A}(\mu)$ と $\mathcal{H}(\mu)$ に対する Lie-Trotter から簡単であるが、一般の $\mu \in \mathcal{P}^1(\mathbb{P}_n)$ に対する [30] の Lie-Trotter の証明は簡単でない。

3. 不動点の方法

多変数の行列・作用素の平均に関する最近の研究において、適当な写像 $F : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}$ の不動点を考える方法がしばしば使われる。例えば、多変数のベキ平均を定義する方程式 (2.4) と (2.5) は不動点型の方程式であり、それらの解の一意存在の証明に Banach の縮小原理が使われた ([41, 35])。Karcher 平均 (Cartan 重心) に対する AH 不等式の証明でも不動点をとる考え方が使われた ([56, 36])。そこでプレプリント [25, 28] で、多変数 (さらに確率測度) の平均を不動点法により 2 変数作用素平均で変形するというアイデアを組織的に考察した。このアイデアは、以下この節で説明するように次の 3 つの意味で価値がある。

- 多変数の作用素の平均をたくさん産み出す.
- 行列・作用素の平均の理論においてベキ平均が占める重要性を説明する.
- 多変数の平均に対してノルムや行列式などの不等式, AH 不等式, (対数) マジョリゼーションなどを示すのに有効である.

3.1. 不動点法による平均の変形

この節では無限次元の Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の $\mathbb{P} = \mathbb{P}(\mathcal{H})$ において考える. μ は完備距離空間 $(\mathbb{P}, d)$ 上のボレル確率測度とする. ここで $\mathbb{P}$ 上の d -位相 (= ノルム位相) によるボレル集合体は SOT によるボレル集合体と一致することに注意する. μ のサポート S_μ は $A \in \mathbb{P}$ の任意の開近傍 $\mathcal{O} \subset \mathbb{P}$ に対し $\mu(\mathcal{O}) > 0$ であるような A の全体である. S_μ は $\mathbb{P}$ の閉集合であり, 常に可分であることが知られている ([27]). しかし $\mathbb{P}$ が可分でないので, $\mu(S_\mu) = 1$ が必ずしもいえない. 実際, $\mu(S_\mu) = 1$ であることと μ の τ -加法性や内部正則性 (i.e., すべてのボレル集合が内側からコンパクト集合で μ 測度が任意の ε 以下で近似できる) と同値である ([27]). (実は, 内部正則でない μ の存在は公理的集合論に現れる可測基数と関係することが知られている.) そこで, 病理的なボレル確率測度を排除して, $\mathcal{P}(\mathbb{P})$ は $\mu(S_\mu) = 1$ である $\mathbb{P}$ 上のボレル確率測度の全体とする. さらに技術上の理由から, 以下では有界サポートをもつ $\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{P})$ に制限して議論する. ここで μ が有界サポートをもつとは, $\varepsilon > 0$ が存在して μ のサポートが $\{A \in \mathbb{P} : \varepsilon I \leq A \leq \varepsilon^{-1} I\}$ に含まれることをいう. このような $\mu \in \mathcal{P}(\mathbb{P})$ の全体を $\mathcal{P}^\infty(\mathbb{P})$ で表す. $\mathcal{P}^\infty(\mathbb{P})$ の点列の単調収束の概念を次に定義する.

定義 3.1. $\mu, \nu \in \mathcal{P}^\infty(\mathbb{P})$ に対し $\mu \leq \nu$ の定義は定義 2.10 と同じとする. $\mu, \mu_k \in \mathcal{P}^\infty(\mathbb{P})$ ($k \in \mathbb{N}$) が $\mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \mu$ (また $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu$) であり, 任意の有界な SOT-連続関数 $f : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{R}$ に対し

$$\int_{\mathbb{P}} f(A) d\mu_k(A) \rightarrow \int_{\mathbb{P}} f(A) d\mu(A) \quad (k \rightarrow \infty)$$

を満たすとき, $\mu_k \nearrow \mu$ (また $\mu_k \searrow \mu$) と書く.

以下で, 平均 $M : \mathcal{P}^\infty(\mathbb{P}) \rightarrow \mathbb{P}$ に対する作用素平均による変形を考えるが, M が満たすべき最低限の性質として次の (A)–(D) を仮定する:

- (A) 単調性: $\mu, \nu \in \mathcal{P}^\infty(\mathbb{P})$ に対し, $\mu \leq \nu \implies M(\mu) \leq M(\nu)$.
- (B) 斉次性: 任意の $\mu \in \mathcal{P}^\infty(\mathbb{P})$ と $\alpha > 0$ に対し $M(\alpha \cdot \mu) = \alpha M(\mu)$. ここで $\alpha \cdot \mu$ は μ の $A \in \mathbb{P} \mapsto \alpha A$ による像測度.
- (C) 単調連続性: $\mu, \mu_k \in \mathcal{P}^\infty(\mathbb{P})$ ($k \in \mathbb{N}$) に対し, $\mu_k \searrow \mu$ または $\mu_k \nearrow \mu$ (定義 3.1) なら $M(\mu_k) \rightarrow M(\mu)$ (SOT).
- (D) $M(\delta_I) = I$.

これらは一応 1.1 節の 2 変数の作用素平均の公理 (I)–(IV) に対応している. (B) は (II) より弱い, 次に示す定理 3.3 ではこれで十分である. (III) では下向き連続性だけであるが, (C) では下向き上向き両方の連続性を仮定している. $\mathcal{P}^\infty(\mathbb{P})$ 上の平均に対しては, この方が理論的にすっきりしている.

注意 3.2. 上で単調連続性 (C) の仮定が出たついでに, 多変数と 2 変数の平均の連続性について次にまとめておく.

- 多変数の平均 $M : \mathbb{P}^m \rightarrow \mathbb{P}$ が単調性と斉次性をもてば自動的にノルム連続である。実際、 $A_j, B_j \in \mathbb{P}$ ($1 \leq j \leq m$) に対し、単調性と斉次性より

$$d_T(M(A_1, \dots, A_m), M(B_1, \dots, B_m)) \leq \max_{1 \leq j \leq m} d_T(A_j, B_j)$$

が簡単にいえる。よって M は $\mathbb{P}^m$ 上でノルム連続。特に2変数の作用素平均は $\mathbb{P} \times \mathbb{P}$ 上でノルム連続。しかし $\mathcal{H}$ が無限次元のとき、 M の単調連続性を示すのはあまり簡単ではない。下記の $\mathcal{P}^\infty(\mathbb{P})$ 上の平均の例 3.8, 3.10, 3.11 でも回りくどい議論をしている。

- 任意の $\varepsilon \in (0, 1)$ に対し $\Sigma_\varepsilon := \{A \in \mathbb{P} : \varepsilon I \leq A \leq \varepsilon^{-1} I\}$ とすると、2変数の作用素平均 σ は $\Sigma_\varepsilon \times \Sigma_\varepsilon$ で SOT 連続である。実際、 $(A, B) \in \Sigma_\varepsilon \times \Sigma_\varepsilon \mapsto A^{-1/2} B A^{-1/2} \in \Sigma_{\varepsilon^2}$ は SOT 連続。また $X \in \Sigma_{\varepsilon^2} \mapsto f_\sigma(X) \in \mathbb{P}$ も SOT 連続。よって $A\sigma B = A^{1/2} f_\sigma(A^{-1/2} B A^{-1/2}) A^{1/2}$ は $\Sigma_\varepsilon \times \Sigma_\varepsilon$ 上で SOT 連続である。したがって、 σ の $\mathbb{P} \times \mathbb{P}$ 上での上向き連続性は自動的にである。
- 作用素平均 σ は公理の条件から $B(\mathcal{H})^+ \times B(\mathcal{H})^+$ 上で下向き連続であるが、 σ は $B(\mathcal{H})^+ \times B(\mathcal{H})^+$ 上で上向き連続でない。反例を与えておく。 $\mathcal{H}$ が可算無限次元のとき、 $\mathcal{H}$ で稠密な2つの部分空間 $\mathcal{K}, \mathcal{L}$ で $\mathcal{K} \cap \mathcal{L} = \{0\}$ となるものがとれる。2つの正規直交基底 $\{e_j\}_{j=1}^\infty, \{f_j\}_{j=1}^\infty$ をそれぞれ $\mathcal{K}, \mathcal{L}$ の中に作ることができる。 P_k, Q_k をそれぞれ $\{e_j\}_{j=1}^k, \{f_j\}_{j=1}^k$ の線形包への直交射影とすると、 $P_k \nearrow I, Q_k \nearrow I$ であるが、すべての k に対し $P_k \# Q_k = P_k \wedge Q_k = 0$ 。しかし $\mathcal{H}$ が有限次元なら、作用素平均 σ は $B(\mathcal{H})^+$ 上でも上向き連続である。これは $A, A_k \in \mathbb{M}_n^+$ で $A_k \nearrow A$ なら、任意の $r > 1$ に対し k が十分大なら $r^{-1} A \leq A_k \leq r A$ であることから直ちに分かる。

本題に戻り、 σ は2変数の(久保-安藤)作用素平均とし、 $\sigma \neq \mathfrak{l}$ を仮定する。ただし $\mathfrak{l}, \mathfrak{r}$ は左、右のトリビアルな作用素平均、i.e., $A \mathfrak{l} B = A, A \mathfrak{r} B = B$ とする。任意の $\mu \in \mathcal{P}^\infty(\mathbb{P})$ に対し不動点型の方程式

$$X = M(X\sigma\mu), \quad X \in \mathbb{P} \quad (3.1)$$

を考える。ここで $X\sigma\mu$ は μ の $A \in \mathbb{P} \mapsto X\sigma A \in \mathbb{P}$ による像測度とする。

定理 3.3. [28] 上記の M と σ に対し次が成立する:

- (1) 任意の $\mu \in \mathcal{P}^\infty(\mathbb{P})$ に対し (3.1) を満たす唯一つの $X_0 \in \mathbb{P}$ が存在する。
- (2) $Y \in \mathbb{P}$ が $Y \geq M(Y\sigma\mu)$ を満たすなら $Y \geq X_0$ 。 $Y' \in \mathbb{P}$ が $Y' \leq M(Y'\sigma\mu)$ を満たすなら $Y' \geq X_0$ 。
- (3) (1) の解 X_0 を $M_\sigma(\mu)$ と書くと、 $M_\sigma : \mathcal{P}^\infty(\mathbb{P}) \rightarrow \mathbb{P}$ は再び (A)–(D) を満たす。

上定理で与えた $M_\sigma : \mathcal{P}^\infty(\mathbb{P}) \rightarrow \mathbb{P}$ を M の σ による**変形平均**と呼ぶ。

注意 3.4. $\mu \in \mathcal{P}^\infty(\mathbb{P})$ の算術平均 $\mathcal{A}(\mu) := \int_{\mathbb{P}} A \mu(A)$ と調和平均 $\mathcal{H}(\mu) := [\int_{\mathbb{P}} A^{-1} d\mu(A)]^{-1}$ が (A)–(D) を満たすことは明らかである。 $M = \mathcal{A}$ のとき、(3.1) は

$$X = \int_{\mathbb{P}} X\sigma A \mu(A), \quad \text{i.e.,} \quad I = \int_{\mathbb{P}} f_\sigma(X^{-1/2} A X^{-1/2}) d\mu(A) \quad (3.2)$$

と書ける (f_σ は σ の表現関数)。ここで、 $X\sigma A$ と $f_\sigma(X^{-1/2} A X^{-1/2})$ が $A \in \mathbb{P}$ のノルム連続かつノルム有界な関数であり、 μ のサポートが可分であるから、(3.2) の積分は Bochner 積分として

定義されることに注意する. いま $g_\sigma(x) := (f_\sigma(x) - 1)/f'_\sigma(1)$ とすると, g_σ は $g_\sigma(1) = 0$ かつ $g'_\sigma(1) = 1$ を満たす $[0, \infty)$ 上の作用素単調関数であり, (3.2) は

$$\int_{\mathbb{P}} g_\sigma(X^{-1/2}AX^{-1/2}) d\mu(A) = 0.$$

と同値である. これは Pálfi [45] で導入された**一般化された Karcher 方程式**である. 論文 [45] では Banach の縮小原理に基づいて議論されるが, 単調収束に基づく [28] の議論は (A)–(D) を満たすもっと一般の平均 M と任意の作用素平均 $\sigma \neq \mathbb{I}$ に適用できる.

定理 3.3 の証明には次の補題が必要である. 特に (d) は定理 3.3 (1) の解の一意存在の証明に必須である.

補題 3.5. (a) 写像 $\varphi, \psi : \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}$ はボレル可測かつ単調 (i.e., $A, B \in \mathbb{P}, A \leq B \implies \varphi(A) \leq \varphi(B)$) とし, $\varphi(A) \leq \psi(A)$ ($A \in \mathbb{P}$) を満たすとする. $\mu, \nu \in \mathcal{P}^\infty(\mathbb{P})$ が $\mu \leq \nu$ なら, $\varphi_*\mu, \psi_*\nu \in \mathcal{P}^\infty(\mathbb{P})$ であり $\varphi_*\mu \leq \psi_*\nu$. ただし $\varphi_*\mu$ は μ の φ による像測度.

(b) $X, X_k \in \mathbb{P}$ ($k \in \mathbb{N}$) が $X_k \searrow X$ (また $X_k \nearrow X$) なら, 任意の $\mu \in \mathcal{P}^\infty(\mathbb{P})$ に対して $X_k\sigma\mu \searrow X\sigma\mu$ (また $X_k\sigma\mu \nearrow X\sigma\mu$).

(c) $\mu, \mu_k \in \mathcal{P}^\infty(\mathbb{P})$ ($k \in \mathbb{N}$) が $\mu_k \searrow \mu$ (また $\mu_k \nearrow \mu$) なら, 任意の $X \in \mathbb{P}$ に対し $X\sigma\mu_k \searrow X\sigma\mu$ (また $X\sigma\mu_k \nearrow X\sigma\mu$).

(d) $X, Y \in \mathbb{P}, X \neq Y$ なら, 任意の $\mu \in \mathcal{P}^\infty(\mathbb{P})$ に対し

$$d_T(M(X\sigma\mu), M(Y\sigma\mu)) < d_T(X, Y)$$

変形された平均 M_σ について, 次の性質は定理 3.3 から容易に分かる.

命題 3.6. (1) $M_t = M$.

(2) 平均 $\hat{M} : \mathcal{P}^\infty(\mathbb{P}) \rightarrow \mathbb{P}$ は (A)–(D) を満たし, $\hat{\sigma} \neq \mathbb{I}$ は作用素平均とする. $M \leq \hat{M}$ かつ $\sigma \leq \hat{\sigma}$ なら $M_\sigma \leq \hat{M}_{\hat{\sigma}}$.

(3) M の随伴 M^* を $M^*(\mu) := M(\mu^{-1})^{-1}$ ($\mu \in \mathcal{P}^\infty(\mathbb{P})$) と定める. ただし μ^{-1} は μ の $A \in \mathbb{P} \mapsto A^{-1}$ による像測度. このとき, M^* は再び (A)–(D) を満たし $(M_\sigma)^* = (M^*)_{\sigma^*}$.

定理 3.3 の前提条件であった (A)–(D) に加えて, 以下の性質を考える:

(E) 自己同一性: すべての $A \in \mathbb{P}$ に対し $M(\delta_A) = A$. ((D) を含む.)

(F) 合同不変性: 任意の $\mu \in \mathcal{P}^\infty(\mathbb{P})$ と可逆な $S \in B(\mathcal{H})$ に対し

$$S^*M(\mu)S = M(S^*\mu S).$$

(これは (B) を含む.) ただし $S^*\mu S$ は μ の $A \in \mathbb{P} \mapsto S^*AS \in \mathbb{P}$ による像測度.

(G) 凹性: 任意の $m \in \mathbb{N}$, $\mu_j, \nu_j \in \mathcal{P}^\infty(\mathbb{P})$ ($1 \leq j \leq m$) と確率ベクトル $(w_1, \dots, w_n)$ に対し

$$M\left(\sum_{j=1}^n w_j(\mu_j \nabla_t \nu_j)\right) \geq (1-t)M\left(\sum_{j=1}^n w_j \mu_j\right) + tM\left(\sum_{j=1}^n w_j \nu_j\right), \quad 0 < t < 1.$$

ここで $\mu_j \nabla_t \nu_j$ は $\mu_j \times \nu_j$ の $\nabla_t : \mathbb{P} \times \mathbb{P} \rightarrow \mathbb{P}$, $\nabla_t(A, B) := (1-t)A + tB$ による像測度. この凹性は次の 2 つを特別な場合として含む. (G1) は重み付き m -変数に制限したときの同時凹性である.

(G1) 任意の $A_j, B_j \in \mathbb{P}$ ($1 \leq j \leq m$) と $0 < t < 1$ に対し

$$M\left(\sum_{j=1}^n w_j \delta_{(1-t)A_j + tB_j}\right) \geq (1-t)M\left(\sum_{j=1}^n w_j \delta_{A_j}\right) + tM\left(\sum_{j=1}^n w_j \delta_{B_j}\right).$$

(G2) 任意の $\mu, \nu \in \mathcal{P}^\infty(\mathbb{P})$ と $0 < t < 1$ に対し

$$M(\mu \nabla_t \nu) \geq (1-t)M(\mu) + tM(\nu).$$

(H) AMH 平均不等式: 任意の $\mu \in \mathcal{P}^\infty(\mathbb{P})$ に対し

$$\mathcal{H}(\mu) \leq M(\mu) \leq \mathcal{A}(\mu).$$

これらの性質について次が成立する.

定理 3.7. M, σ は定理 3.3 と同様とする. M が (A)–(D) に加えて (E), (F), (G), (G1), (G2), (H) のいずれかの性質を満たすなら, M_σ も同じ性質を満たす.

次に (A)–(H) のすべての性質をもつ $\mathcal{P}^\infty(\mathbb{P})$ 上の平均の典型的な例を挙げる.

例 3.8. (算術平均・調和平均) 算術平均 $\mathcal{A}(\mu)$ がすべての (A)–(H) を満たすことは直ちに分かる. 調和平均 $\mathcal{H}(\mu)$ についても (G) ((G1), (G2) も) 以外は容易である. しかし $\mathcal{H}$ に対する (G) は直接に示さなくても, 次の命題と定理 3.7 からいえる.

命題 3.9. [28] 任意の $\mu \in \mathcal{P}^\infty(\mathbb{P})$ に対し, $0 < r' < r \leq 1$ なら $\mathcal{A}_{!_{r'}}(\mu) \leq \mathcal{A}_{!_r}(\mu)$ であり

$$\mathcal{H}(\mu) = \lim_{r \searrow 0} \mathcal{A}_{!_r}(\mu) \quad (\text{SOT}).$$

例 3.10. (ベキ平均) $r \in [-1, 1] \setminus \{0\}$ に対し $\mathcal{P}^\infty(\mathbb{P})$ 上のベキ平均 $P_r(\mu)$ は (2.4), (2.5) を拡張した $X \in \mathbb{P}$ の方程式

$$X = \mathcal{A}(X \#_r \mu) \quad (r \in (0, 1] \text{ のとき}), \quad X = \mathcal{H}(X \#_{-r} \mu) \quad (r \in [-1, 0) \text{ のとき}) \quad (3.3)$$

の解として導入される. つまり, $r \in (0, 1]$ に対し $P_r = \mathcal{A}_{\#_r}$, $P_{-r} = \mathcal{H}_{\#_r}$ である. (3.3) を書き直すと, 注意 3.4 で言及した [45] の一般化された Karcher 方程式 (3.2) の典型例になる. P_r は (A)–(H) のすべてを満たす. これらの性質のうち (C) と (G) 以外は [45] で与えられている. しかし, 例 3.8 で示した $\mathcal{A}$ と $\mathcal{H}$ に定理 3.3 (3) と定理 3.7 を適用すれば, P_r がすべての (A)–(H) の性質をもつことは直ちにいえる.

例 3.11. (幾何平均) $\mathcal{P}^\infty(\mathbb{P})$ 上の幾何平均 (つまり Cartan 重心) $G(\mu)$ は $\mu \in \mathcal{P}^\infty(\mathbb{P})$ に対し Karcher 方程式

$$\int_{\mathbb{P}} \log X^{-1/2} A X^{-1/2} d\mu(A) = 0$$

の解として定義される. G はすべての (A)–(H) を満たす. 例 3.10 の P_r と同じく, (C) と (G) 以外は [45] で知られている. G が (C) と (G) を満たすことは次の命題を使って示せる. これは [41, 40, 35, 34] で示された $P_r \rightarrow G$ の収束を無限次元の $\mu \in \mathcal{P}^\infty(\mathbb{P})$ の場合に拡張している.

命題 3.12. [28] 任意の $\mu \in \mathcal{P}^\infty(\mathbb{P})$ に対し, $0 < r' < r \leq 1$ なら

$$P_{-r}(\mu) \leq P_{-r'}(\mu) \leq G(\mu) \leq P_{r'}(\mu) \leq P_r(\mu)$$

であり

$$G(\mu) = \lim_{r \rightarrow 0} P_r(\mu) \quad (\text{SOT}).$$

3.2. 2変数の作用素平均の場合

前節のアイデアは M が2変数の(久保-安藤の)作用素平均の場合でも新しい知見を与える。いま, τ, σ は2変数の作用素平均とし, $\sigma \neq \mathbb{I}$ だけ仮定する。 $M = \tau$ とすると方程式 (3.1) は, $A, B \in \mathbb{P}$ に対し

$$X = (X\sigma A)\tau(X\sigma B), \quad X \in \mathbb{P} \quad (3.4)$$

と書き直される。定理3.3 (1) と同様に (3.4) は唯1つの解をもつ。これを $A\tau_\sigma B$ で表す。さらに, $A\tau_\sigma B$ ($A, B \in \mathbb{P}$) の単調性から, τ_σ を $\mathbb{P} \times \mathbb{P}$ から $B(\mathcal{H})^+ \times B(\mathcal{H})^+$ に

$$A\tau_\sigma B := \lim_{\varepsilon \searrow 0} (A + \varepsilon I)\tau_\sigma(B + \varepsilon I)$$

により拡張できる。このとき次が成立する。

定理 3.13. [25] 上で定義された $A\tau_\sigma B$ ($A, B \in B(\mathcal{H})^+$) は再び作用素平均である。さらに τ_σ の表現関数 f_{τ_σ} は, $t > 0$ に対し $x = f_{\tau_\sigma}(t)$ が次の唯1つの解として定まる:

$$(x\sigma 1)\tau(x\sigma t) = x, \quad \text{i.e.,} \quad f_\sigma(1/x)f_\tau\left(\frac{f_\sigma(t/x)}{f_\sigma(1/x)}\right) = 1, \quad x > 0. \quad (3.5)$$

τ_σ を τ の σ による**変形作用素平均**と呼ぶ。 τ_σ の性質を次にまとめる。

命題 3.14. (1) $\tau_{\mathbb{I}} = \tau$.

(2) 任意の $\sigma \neq \mathbb{I}$ に対し $\mathbb{I}_\sigma = \mathbb{I}$, $\mathbb{I}_\sigma = \mathbb{I}$.

(3) $\hat{\tau}, \hat{\sigma}$ も作用素平均で $\hat{\sigma} \neq \mathbb{I}$ とする。 $\tau \leq \hat{\tau}$ かつ $\sigma \leq \hat{\sigma}$ なら $\tau_\sigma \leq \hat{\tau}_{\hat{\sigma}}$.

(4) $(\tau_\sigma)' = (\tau')_\sigma$. よって τ が対称なら τ_σ も対称.

(5) $(\tau_\sigma)^* = (\tau^*)_{\sigma^*}$. よって τ, σ が自己随伴なら τ_σ も自己随伴.

(6) $(\sigma^*)_\sigma$ の表現関数は, $x = f_{(\sigma^*)_\sigma}(t)$ が

$$xf_\sigma(1/x) = f_\sigma(t/x), \quad \text{i.e.,} \quad f_{\sigma'}(x) = f_\sigma(t/x), \quad x > 0$$

の解として定まる。さらに $(\sigma^*)_\sigma = \# \iff \sigma$ が対称. よって $\nabla_{\mathbb{I}} = \nabla_{\mathbb{I}} = \#_{\#} = \#$.

(7) $(\sigma^\perp)_\sigma$ の表現関数は, $x = f_{(\sigma^\perp)_\sigma}(t)$ が

$$f_\sigma(1/x) = (x/t)f_\sigma(t/x), \quad \text{i.e.,} \quad f_\sigma(1/x) = f_{\sigma'}(x/t), \quad x > 0$$

の解として定まる。さらに $(\sigma^\perp)_\sigma = \# \iff \sigma$ が対称.

(8) $f'_{\tau_\sigma}(1) = f'_\tau(1)$.

(9) 任意の $\sigma \neq \mathbb{I}$ に対し $\tau \mapsto \tau_\sigma$ は作用素平均全体の上で単射的(しかし全射的でない).

作用素平均列の収束に関する次の補題は基本的なことであるが、適当な文献が見当たらない。

補題 3.15. 作用素平均の列 τ, τ_k ($k \in \mathbb{N}$) について次の条件は同値である:

- (a) 任意の $x \in (0, \infty)$ に対し $f_{\tau_k}(x) \rightarrow f_\tau(x)$;
- (b) 任意の $\varepsilon > 0$ に対し $[\varepsilon, \varepsilon^{-1}]$ 上で $f_{\tau_k} \rightarrow f_\tau$ (一様収束);

(c) 任意の $A, B \in \mathbb{P}$ に対し $A\tau_k B \rightarrow A\tau B$ (ノルム収束).

これを証明するには、まず積分表示 (1.1) を用いて、任意の $\varepsilon > 0$ に対し

$$\sup\{f'(x) : x \geq \varepsilon, f \text{ は } [0, \infty) \text{ 上で作用素単調, } f \geq 0, f(1) = 1\} \leq \varepsilon^{-1}$$

を示す. これより $\{f_{\tau_k}\}$ が任意の $[\varepsilon, \varepsilon^{-1}]$ 上で同程度連続であることがいえる. よって (a) $\iff$ (b) が示せる. (b) $\iff$ (c) は容易である. 同値な条件 (a)–(c) が成立するとき, $\tau_k \rightarrow \tau$ と書く.

命題 3.16. τ, σ と τ_k, σ_k ($k \in \mathbb{N}$) は作用素平均の列で $\sigma, \sigma_k \neq \mathbf{!}$ とする. $\tau_k \rightarrow \tau$ かつ $\sigma_k \rightarrow \sigma$ なら $(\tau_k)_{\sigma_k} \rightarrow \tau_{\sigma}$. よって補題 3.15 より, 任意の $A, B \in \mathbb{P}$ に対し $A(\tau_k)_{\sigma_k} B \rightarrow A\tau_{\sigma} B$ (ノルム収束).

以下で2変数のベキ平均 $\mathbf{p}_{s,r}$ は $r = 0$ の場合にも $\mathbf{p}_{s,0} := \#_s$ として用いることにする. これは $\mathbf{p}_{s,r} \rightarrow \#_s$ ($r \rightarrow 0$) から正当化される. 任意の作用素平均 τ の2パラメータ変形を

$$\tau_{s,r} := \tau_{\mathbf{p}_{s,r}}, \quad s \in (0, 1], r \in [-1, 1]$$

により導入する. 特に $\tau_{s,-1} = \tau_{\mathbf{!}_s}$, $\tau_{s,0} = \tau_{\#_s}$, $\tau_{s,1} = \tau_{\nabla_s}$ であり, $\tau_{1,r} = \tau_{\mathbf{t}} = \tau$ ($r \in [-1, 1]$). いま $s_k \in (0, 1]$, $r_k \in [-1, 1]$ ($k \in \mathbb{N}$) で $s_k \rightarrow s \in (0, 1]$, $r_k \rightarrow r \in [-1, 1]$ なら, 命題 3.16 より補題 3.15 の意味で $\tau_{s_k, r_k} \rightarrow \tau_{s,r}$ である. よって τ の2パラメータ変形の族

$$\{\tau_{s,r} : 0 < s \leq 1, -1 \leq r \leq 1\}$$

は $s = 1$ で τ に束ねられた作用素平均の連続な族である. $s \rightarrow 0$ のときの $\tau_{s,r}$ の挙動について, 次が成立する.

定理 3.17. [25] $\alpha := f'_{\tau}(1) \in [0, 1]$ とする. $s_k \in (0, 1]$, $r_k \in [-1, 1]$ ($k \in \mathbb{N}$) が $s \rightarrow 0$, $r_k \rightarrow r$ なら, $\tau_{s_k, r_k} \rightarrow \mathbf{p}_{\alpha, r}$ である. よって

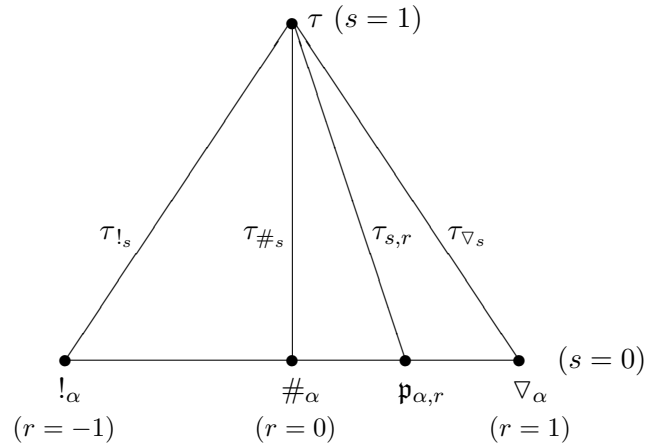
$$\tau_{0,r} := \mathbf{p}_{\alpha, r}, \quad r \in [-1, 1]$$

と定めると

$$\{\tau_{s,r} : 0 \leq s \leq 1, -1 \leq r \leq 1\}$$

は作用素平均の連続な2パラメータ族である.

上で構成した2パラメータの変形作用素平均 $\tau_{s,r}$ は次図のように描かれる:



作用素平均の1パラメータ族 $\{m_\alpha\}_{\alpha \in [0,1]}$ が**正規族**であるとは、 $f'_{m_\alpha}(1) = \alpha$ ($0 \leq \alpha \leq 1$) のときをいう。藤井-亀井 [18] は対称な平均 σ が与えられたとき、 $m_0 := \mathbf{l}$, $m_{1/2} := \sigma$, $m_1 := \mathbf{r}$ とし、帰納的に $k, l \in \mathbb{N}$, $2l+1 < 2^{k+1}$ のとき、

$$Am_{\frac{2l+1}{2^{k+1}}}B := (Am_{\frac{l}{2^k}}B)m(Am_{\frac{l+1}{2^k}}B)$$

と定めることにより、作用素平均の連続な正規族 $\{m_\alpha\}_{\alpha \in [0,1]}$ を構成した。このような族の構成は Pálfi-Petz [46] により、 σ が一般の作用素平均の場合に拡張された。作用素平均の連続な族 $\{m_\alpha\}_{\alpha \in [0,1]}$ が**補間族**であるとは、任意の $\alpha, \beta, \delta \in [0, 1]$ に対し

$$(am_\alpha b)m_\delta(am_\beta b) = am_{(1-\delta)\alpha+\delta\beta}b, \quad a, b \in (0, \infty)$$

であるときをいう。このとき、任意の $\alpha, \beta \in [0, 1]$ に対し

$$\{(1m_\alpha t)m_\beta \mathbf{l}\}m_\alpha\{(1m_\alpha t)m_\beta t\} = 1m_\alpha t$$

が容易に分かる。これより、 $\tau = m_\alpha$, $\sigma = m_\beta$ のときの方程式 (3.4) の解が $x = 1m_\alpha t = f_{m_\alpha}(t)$ であることがいえる。よって $(m_\alpha)_{m_\beta} = m_\alpha$ ($0 \leq \alpha \leq 1$, $0 < \beta \leq 1$)。宇田川-山崎-柳田 [52] は作用素平均の連続な正規族 $\{m_\alpha\}_{\alpha \in [0,1]}$ が補間族であるのは、ある $r \in [-1, 1]$ が存在して $m_\alpha = \mathbf{p}_{\alpha,r}$ ($0 \leq \alpha \leq 1$) となる場合に限ることを示した。これより、すべての $\alpha \in [0, 1]$, $\beta \in (0, 1]$, $r \in [-1, 1]$ に対し $(\mathbf{p}_{\alpha,r})_{\mathbf{p}_{\beta,r}} = \mathbf{p}_{\alpha,r}$ (この直接の証明も簡単)。これと関連して、次の問題が考えられる：重み付きベキ平均 $\mathbf{p}_{\alpha,r}$ ($\mathbf{p}_{\alpha,0} = \#_\alpha$ を含む) 以外に $\sigma_\sigma = \sigma$ を満たす作用素平均 σ ($\neq \mathbf{l}$) が存在するか？

3.3. 不等式などへの応用

この節では、 $\mathcal{P}^\infty(\mathbb{P})$ 上の平均の変形について議論した 3.1 節の設定に戻って、平均に対する不等式やマジョリゼーションの問題に不動点の方法が有力であることを [28] に基づいて説明する。

3.3.1. 不動点法で誘導される平均

$\mathcal{P}^\infty(\mathbb{P})$ 上の平均を逐次的に構成する次の2つの方法を考える。

- 1° 変形: (A)–(D) を満たす $\mathcal{P}^\infty(\mathbb{P})$ 上の平均 M から作用素平均 $\sigma \neq \mathbf{l}$ による変形平均 M_σ を作る。
- 2° 合成: $\mathcal{P}^\infty(\mathbb{P})$ 上の平均 $M_0, M_1, \dots, M_m$ と確率ベクトル $(w_1, \dots, w_m)$ に対し $M(\mu) := M_0(\sum_{j=1}^m w_j \delta_{M_j(\mu)})$ ($\mu \in \mathcal{P}^\infty(\mathbb{P})$) と定める。

$\mathcal{A}, \mathcal{H}, G$ から出発して上記の 1°, 2° をくり返し任意の有限回適用して得られる $\mathcal{P}^\infty(\mathbb{P})$ 上の平均の全体を $\mathfrak{M}$ とする。平均の族 $\mathfrak{M}$ は Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ のとり方に依らない。さらに任意の $M \in \mathfrak{M}$ は (A)–(H) のすべての性質を満たす。

久保-安藤の2変数作用素平均の全体を $\mathcal{M}$ とし、その部分族として次を考える：

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\text{power.inc}} &:= \{\sigma \in \mathcal{M} : \text{すべての } r \geq 1, x > 0 \text{ に対し } f_\sigma(x)^r \leq f_\sigma(x^r)\}, \\ \mathcal{M}_{\text{power.dec}} &:= \{\sigma \in \mathcal{M} : \text{すべての } r \geq 1, x > 0 \text{ に対し } f_\sigma(x)^r \geq f_\sigma(x^r)\}, \\ \mathcal{M}_{\text{g.convex}} &:= \{\sigma \in \mathcal{M} : f_\sigma \text{ は幾何的凸}\}, \\ \mathcal{M}_{\text{g.concave}} &:= \{\sigma \in \mathcal{M} : f_\sigma \text{ は幾何的凹}\}. \end{aligned}$$

ここで f_σ が幾何的凸 (また幾何的凹) とは、すべての $x, y > 0$ に対し $f_\sigma(\sqrt{xy}) \leq \sqrt{f_\sigma(x)f_\sigma(y)}$ (また $f_\sigma(\sqrt{xy}) \geq \sqrt{f_\sigma(x)f_\sigma(y)}$)、つまり $\log f(e^t)$ が $\mathbb{R}$ 上で凸 (また凹) であることをいう。 $\mathcal{M}_{\text{g.convex}} \subset \mathcal{M}_{\text{power.inc}}$ (また $\mathcal{M}_{\text{g.concave}} \subset \mathcal{M}_{\text{power.dec}}$) は容易。 $\sigma \in \mathcal{M}_{\text{power.inc}} \iff \sigma^* \in$

$\mathcal{M}_{\text{power.dec}}$ と $\sigma \in \mathcal{M}_{\text{g.convex}} \iff \sigma^* \in \mathcal{M}_{\text{g.concave}}$ は明らか. また $0 \leq \alpha \leq 1$ に対し $\nabla_\alpha \in \mathcal{M}_{\text{g.convex}}, !_\alpha \in \mathcal{M}_{\text{g.concave}}$ であり $\mathcal{M}_{\text{power.inc}} \cap \mathcal{M}_{\text{power.dec}} = \mathcal{M}_{\text{g.convex}} \cap \mathcal{M}_{\text{g.concave}} = \{\#_\alpha : 0 \leq \alpha \leq 1\}$.

$\mathfrak{M}$ の部分族 $\mathfrak{M}^+$ (また $\mathfrak{M}^-$) は $\mathcal{A}, G$ (また $\mathcal{H}, G$) から出発して, 上の 1° で $\sigma \in \mathcal{M}_{\text{g.convex}}$ (また $\sigma \in \mathcal{M}_{\text{g.concave}}$) に制限したものと 2° を任意の有限回適用して得られる $\mathcal{P}^\infty(\mathbb{P})$ 上の平均の全体とする. さらに, $\mathfrak{M}_0^+$ (また $\mathfrak{M}_0^-$) は $\mathcal{A}, G$ (また $\mathcal{H}, G$) から出発して 1° で $\sigma \in \mathcal{M}_{\text{power.inc}}$ (また $\sigma \in \mathcal{M}_{\text{power.dec}}$) に制限したものを任意の有限回適用して得られる $\mathcal{P}^\infty(\mathbb{P})$ 上の平均の全体とする. $\mathfrak{M}_0^+$ では 2° は適用しない. $M \in \mathfrak{M}^+ \iff M^* \in \mathfrak{M}^-$ と $M \in \mathfrak{M}_0^+ \iff M^* \in \mathfrak{M}_0^-$ は容易に分かる. また $0 < r \leq 1$ に対し $P_r \in \mathfrak{M}^+ \cap \mathfrak{M}_0^+, P_{-r} \in \mathfrak{M}^- \cap \mathfrak{M}_0^-$.

3.3.2. 正線形写像に対する不等式

$\mathcal{H}$ と $\mathcal{K}$ は Hilbert 空間とする. $\Phi : B(\mathcal{H}) \rightarrow B(\mathcal{K})$ は正線形写像とする. 作用素平均 σ に対し不等式

$$\Phi(A\sigma B) \leq \Phi(A)\sigma\Phi(B), \quad A, B \in B(\mathcal{H})^+ \quad (3.6)$$

はよく知られている ([2]). 次はこれが $M \in \mathfrak{M}$ に対しても成立することをいう.

命題 3.18. $\Phi(I)$ が可逆で, Φ は正規 ($A, A_k \in B(\mathcal{H})^+$ が $A_k \nearrow A$ なら $\Phi(A_k) \nearrow \Phi(A)$) とする. 任意の $M \in \mathfrak{M}$ に対し

$$\Phi(M(\mu)) \leq M(\Phi_*\mu), \quad \mu \in \mathcal{P}^\infty(\mathbb{P}(\mathcal{H})). \quad (3.7)$$

ここで $\Phi_*\mu$ は μ の $A \in \mathbb{P}(\mathcal{H}) \mapsto \Phi(A) \in \mathbb{P}(\mathcal{K})$ による像測度.

証明をざつと述べる. $\Psi : B(\mathcal{H}) \rightarrow B(\mathcal{K})$ を $\Psi(X) := \Phi(I)^{-1/2}\Phi(X)\Psi(I)^{-1/2}$ ($X \in B(\mathcal{K})$) と定めると合同不変性 (F) より (3.7) は $\Psi(M(\mu)) \leq M(\Psi_*\mu)$ と同値である. よって $\Phi(I) = I$ としてよい. (3.7) が構成 1° で保存されることを示す. 任意の $\mu \in \mathcal{P}^\infty(\mathbb{P}(\mathcal{H}))$ に対し $X_0 := M_\sigma(\mu)$ とすると

$$\Phi(X_0) = \Phi(M(X_0\sigma\mu)) \leq M(\Phi_*(X_0\sigma\mu)). \quad (3.8)$$

$\psi_{X_0}(A) := X_0\sigma A$ ($A \in \mathbb{P}(\mathcal{H})$), $\psi_{\Phi(X_0)}(B) := \Phi(X_0)\sigma B$ ($B \in \mathbb{P}(\mathcal{K})$) と定めると, $\Phi_*(X_0\sigma\mu) = (\Phi \circ \psi_{X_0})_*\mu$, $\Phi(X_0)\sigma(\Phi_*\mu) = (\psi_{\Phi(X_0)} \circ \Phi)_*\mu$ であり, (3.6) より

$$(\Phi \circ \psi_{X_0})(A) = \Phi(X_0\sigma A) \leq \Phi(X_0)\sigma\Phi(A) = (\psi_{\Phi(X_0)} \circ \Phi)(A), \quad A \in \mathbb{P}(\mathcal{H}).$$

よって補題 3.5 (a) より $\Phi_*(X_0\sigma\mu) \leq \Phi(X_0)\sigma(\Phi_*\mu)$ だから, M の単調性より

$$M(\Phi_*(X_0\sigma\mu)) \leq M(\Phi(X_0)\sigma(\Phi_*\mu)). \quad (3.9)$$

(3.8) と (3.9) より $\Phi(X_0) \leq M(\Phi(X_0)\sigma(\Phi_*\mu))$ だから, 定理 3.3 (2) より $\Phi(M_\sigma(\mu)) = \Phi(X_0) \leq M_\sigma(\Phi_*\mu)$ がいえる. (3.7) が構成 2° で保存されることは簡単に分かる. そこで $\mathcal{A}, \mathcal{H}, G$ が (3.7) を満たすことを示せばよい. $\mathcal{A}$ については明らか. 構成 1° を $M = \mathcal{A}$ と $\sigma = !_s$ ($0 < s \leq 1$) に適用すると $\Phi(\mathcal{A}!_s(\mu)) \leq \mathcal{A}!_s(\Phi_*(\mu))$. Φ が正規だから, 命題 3.9 より $\Phi(\mathcal{H}(\mu)) \leq \mathcal{H}(\Phi_*(\mu))$. 1° を $M = \mathcal{A}$ と $\sigma = \#_r$ ($0 < r \leq 1$) に適用すると $\Phi(P_r(\mu)) \leq P_r(\Phi_*\mu)$. 命題 3.12 より $\Phi(G(\mu)) \leq G(\Phi_*\mu)$.

3.3.3. AH不等式

有限次元の $\mathbb{P}_n$ の場合に多変数さらに確率測度の幾何平均に対する AH 不等式は [56, 36, 29] で与えられた。次はそれらの定理 1.7 の観点からの拡張である。

命題 3.19. (1) 任意の $M \in \mathfrak{M}_0^+$ と $\mu \in \mathcal{P}^\infty(\mathbb{P})$ に対し

$$M(\mu) \geq I \implies M(\mu^r) \geq I, \quad r \geq 1.$$

(2) 任意の $M \in \mathfrak{M}_0^-$ と $\mu \in \mathcal{P}^\infty(\mathbb{P})$ に対し

$$M(\mu) \leq I \implies M(\mu^r) \leq I, \quad r \geq 1.$$

系 3.20. $\alpha \in (0, 1]$ とする。任意の $\mu \in \mathcal{P}^\infty(\mathbb{P})$ に対し

$$\begin{aligned} P_\alpha(\mu) \geq I &\implies P_\alpha(\mu^r) \geq I, \quad r \geq 1, \\ P_{-\alpha}(\mu) \leq I &\implies P_{-\alpha}(\mu^r) \leq I, \quad r \geq 1. \end{aligned}$$

注意 3.21. 命題 3.19 の証明はここでは割愛するが、実際もう少し強い次の結果が証明される。任意の $\mu \in \mathcal{P}^\infty(\mathbb{P})$ に対し、

$$\begin{aligned} M \in \mathfrak{M}_0^+ \text{ なら, } M(\mu) \geq I &\implies M(\mu^r) \geq M(\mu), \quad r \geq 1, \\ M \in \mathfrak{M}_0^- \text{ なら, } M(\mu) \leq I &\implies M(\mu^r) \leq M(\mu), \quad r \geq 1. \end{aligned}$$

これらは次の不等式と同値:

$$\begin{aligned} M \in \mathfrak{M}_0^+ \text{ なら, } M(\mu^r) &\geq \lambda_{\min}(M(\mu))^{r-1} M(\mu), \quad r \geq 1, \\ M \in \mathfrak{M}_0^- \text{ なら, } M(\mu^r) &\leq \|M(\mu)\|_\infty^{r-1} M(\mu), \quad r \geq 1. \end{aligned}$$

ただし $\lambda_{\min}(A)$ は $A \in \mathbb{P}$ のスペクトルの最小値。

注意 3.22. Lim-山崎 [42] は有限次元の多変数ベキ平均のついて次の不等式を示した: $0 < \alpha \leq 1$ と $A_1, \dots, A_m \in \mathbb{P}_n$ に対し

$$\begin{aligned} P_{w,\alpha}(A_1, \dots, A_m) \leq I &\implies P_{w,\alpha/r}(A_1^r, \dots, A_m^r) \leq I, \quad r \geq 1, \\ P_{w,-\alpha}(A_1, \dots, A_m) \geq I &\implies P_{w,-\alpha/r}(A_1^r, \dots, A_m^r) \geq I, \quad r \geq 1. \end{aligned}$$

これらの不等式の向きは系 3.20 と逆である。系 3.20 が順不等式で、Lim-山崎のは逆補完不等式であり、 α が α/r に置き換わるのは本質的と考えられる。

3.3.4. ノルム不等式

以下 3.3.4–3.3.6 節では簡単のため $\mathcal{H}$ は有限次元とする。命題 1.8 (1) のノルム不等式は $M \in \mathfrak{M}$ に対しても成立する。

命題 3.23. 任意の $M \in \mathfrak{M}$ と $\mathbb{M}_n$ 上の単調ノルム (特にユニタリ不変ノルム) $\|\cdot\|$ に対し

$$\|M(\mu)\| \leq M(\|\cdot\|_* \mu), \quad \mu \in \mathcal{P}^\infty(\mathbb{P}_n).$$

ここで $\|\cdot\|_* \mu$ は μ の $A \in \mathbb{P}_n \mapsto \|A\| \in \mathbb{R}^+$ による像測度 (よって $\|\cdot\|_* \mu$ は $\mathbb{R}^+ = (0, \infty)$ 上のボレル確率測度)。

3.3.5. マジヨリゼーション

$\mu \in \mathcal{P}^\infty(\mathbb{P}_n)$ に対し $\lambda_*\mu$ は μ の $A \in \mathbb{P}_n \mapsto \lambda(A) \in (\mathbb{R}^+)^n$ による像測度, つまり $\lambda_*\mu = ((\lambda_1)_*\mu, \dots, (\lambda_n)_*\mu)$ とする. 特に

$$G(\lambda_*\mu) = LE(\lambda_*\mu) = \left(\exp \int_{\mathbb{P}_n} \log \lambda_i(A) d\mu(A) \right)_{i=1}^n$$

に注意する. 定理 2.11 (3) の発展形として

命題 3.24. 任意の $\mu \in \mathcal{P}^\infty(\mathbb{P}_n)$ と $0 < r \leq 1$ に対し

$$G(\mu) \prec_{\log} G(\mu^r)^{1/r} \prec_{\log} LE(\mu) \prec_{\log} G(\lambda_*\mu).$$

この命題と命題 1.3 から

系 3.25. f は $f(e^x)$ が $\mathbb{R}$ 上で凸である $(0, \infty)$ 上の非負関数とする. 任意の $\mu \in \mathcal{P}^\infty(\mathbb{P})$ とユニタリ不変ノルム $\|\cdot\|$ に対し

$$\|f(G(\mu))\| \leq \|f(LE(\mu))\| \leq \|f(G(\lambda_*\mu))\|.$$

特に

$$\|G(\mu)\| \leq \|LE(\mu)\| \leq \|G(\lambda_*\mu)\| \leq \exp \int_{\mathbb{P}} \log \|A\| d\mu(A).$$

任意の $\mu \in \mathcal{P}^\infty(\mathbb{P}_n)$ に対し Ky Fan マジヨリゼーションの連続版として

$$\mathcal{A}(\mu) \prec \mathcal{A}(\lambda_*\mu) \tag{3.10}$$

は容易であり, 簡単な議論で

$$\mathcal{H}(\mu) \prec_w \mathcal{H}(\lambda_*\mu) \tag{3.11}$$

もいえる. 命題 1.8 (2) を考慮すると一般の $M \in \mathfrak{M}$ に対して $M(\mu) \prec_w M(\lambda_*\mu)$ が成立すると期待されるが, $r \in (0, 1]$ のベキ平均 P_r については次のように示せる.

命題 3.26. 任意の $\mu \in \mathcal{P}^\infty(\mathbb{P}_n)$ と $0 < r \leq 1$ に対し

$$P_r(\mu) \prec_w P_r(\lambda_*\mu). \tag{3.12}$$

証明は次の通り. $r = 1$ なら $P_1 = \mathcal{A}$ だから (3.10) より成立. $0 < r < 1$ なら

$$P_r(\lambda_*\mu) = \left(\left[\int_{\mathbb{P}_n} \lambda_i(A)^r d\mu(A) \right]^{1/r} \right)_{i=1}^n$$

だから

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i(P_r(\mu)) \leq \sum_{i=1}^k \left[\int_{\mathbb{P}_n} \lambda_i(A)^r d\mu(A) \right]^{1/r}, \quad 1 \leq k \leq n. \tag{3.13}$$

を示せばよい. $X_0 := P_r(\mu)$ つまり $X_0 = \mathcal{A}(X_0 \#_r \mu)$ とすると, $1 \leq k \leq n$ に対し (3.10) より

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i(X_0) \leq \sum_{i=1}^k \mathcal{A}((\lambda_i)_*(X_0 \#_r \mu)) = \int_{\mathbb{P}_n} \sum_{i=1}^k \lambda_i(X_0 \#_r A) d\mu(A).$$

$\lambda(X_0) \#_r \lambda(A) = (\lambda_i(X_0)^{1-r} \lambda_i(A)^r)_{i=1}^n$ に注意して、命題 1.8 (2) を $\sigma = \#_r$ に適用すると

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i(X_0 \#_r A) \leq \sum_{i=1}^k \lambda_i(X_0)^{1-r} \lambda_i(A)^r, \quad A \in \mathbb{P}_n.$$

したがって

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i(X_0) \leq \sum_{i=1}^k \lambda_i(X_0)^{1-r} \int_{\mathbb{P}_n} \lambda_i(A)^r d\mu(A).$$

Hölder の不等式より

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i(X_0) \leq \left[\sum_{i=1}^k \lambda_i(X_0) \right]^{1-r} \left(\sum_{i=1}^k \left[\int_{\mathbb{P}_n} \lambda_i(A)^r d\mu(A) \right]^{1/r} \right)^r$$

が成立するから (3.13) がいえる。

注意 3.27. $r \in [-1, 0)$ の P_r に対し (3.12) が成立するかどうかは不明である。実際、上の証明で (3.10) を (3.11) に置き換えても上手く行かない。しかし、 $P_{-r}(\mu^{-1}) = P_r(\mu)^{-1}$ に注意すると $-1 \leq r < 0$ に対し $P_r(\mu)^{-1} \prec_w P_r(\lambda_* \mu)^{-1}$ がいえる。

命題 3.26 と命題 1.3 から

系 3.28. $r \in (0, 1]$ とする。任意の $\mu \in \mathcal{P}^\infty(\mathbb{P})$ とユニタリ不変ノルム $\|\cdot\|$ に対し、 f が $(0, \infty)$ 上の単調非減少な非負凸関数なら

$$\|f(P_r(\mu))\| \leq \|f(P_r(\lambda_* \mu))\|.$$

特に

$$\|P_r(\mu)\| \leq \|P_r(\lambda_* \mu)\| \leq P_r(\|\cdot\|_* \mu) = \left[\int_{\mathbb{P}_n} \|A\|^r d\mu(A) \right]^{1/r}.$$

3.3.6. Minkowski の行列式不等式

よく知られた Minkowski の行列式不等式

$$\det^{1/N}(A+B) \geq \det^{1/N} A + \det^{1/N} B, \quad A, B \in \mathbb{M}_n^+$$

は [13] で次のように拡張された: 任意の $\sigma \in \mathcal{M}_{\text{g.convex}}$ に対し

$$\det^{1/N}(A\sigma B) \geq (\det^{1/N} A)\sigma(\det^{1/N} B), \quad A, B \in \mathbb{M}_n^+.$$

$\sigma \in \mathcal{M}_{\text{g.concave}}$ なら逆向きの不等式が成立する。これは $M \in \mathfrak{M}^\pm$ に対しても成立する。

命題 3.29. 任意の $M \in \mathfrak{M}^+$ に対し

$$\det^{1/N} M(\mu) \geq M((\det^{1/N})_* \mu), \quad \mu \in \mathcal{P}^\infty(\mathbb{P}_n).$$

ここで $(\det^{1/N})_* \mu$ は μ の $A \in \mathbb{P}_n \mapsto \det^{1/N} A \in \mathbb{R}^+$ による像測度。 $M \in \mathfrak{M}^-$ なら逆向きの不等式が成立。

4. 可逆でない正作用素への拡張

2変数作用素平均 σ の場合, 1.1節で述べたように, $\sigma|_{\mathbb{P} \times \mathbb{P}}$ から $B(\mathcal{H})^+ \times B(\mathcal{H})^+$ 全体への拡張は (1.3) で与えられる. そこでは σ の下向き連続性 (III) が本質的である. 藤井-瀬尾 [20] は重み付き m -変数の一般の作用素平均 $M_w : \mathbb{P}^m \rightarrow \mathbb{P}$ の (公理的な) 定義を与え, それを $(A_1, \dots, A_m) \in (B(\mathcal{H})^+)^m$ の場合に

$$M_w(A_1, \dots, A_m) := \lim_{\varepsilon \searrow 0} M_w(A_1 + \varepsilon I, \dots, A_m + \varepsilon I) \quad (\text{SOT}) \quad (4.1)$$

により拡張する問題を考察している. 特に Karcher 平均 G_w とベキ平均 $P_{w,r}$ の場合を詳しく議論している.

この節では $\mathcal{P}^\infty(\mathbb{P})$ 上の (A)–(D) を満たす平均を $B(\mathcal{H})^+$ 上の確率測度に拡張することについて簡単に触れる. $\mathcal{H}$ は任意の Hilbert 空間とする. $B(\mathcal{H})^+$ は作用素ノルムにより完備距離空間である. $\mathbb{P}$ 上と同様に $B(\mathcal{H})^+$ 上でノルム位相によるボレル集合体は SOT によるボレル集合体と一致する. 3.1 節の最初の段落と同様に, $\mathcal{P}^\infty(B(\mathcal{H})^+)$ は $B(\mathcal{H})^+$ 上のボレル確率測度 μ で, そのサポート S_μ がノルム有界であり $\mu(S_\mu) = 1$ であるものの全体とする.

定義 4.1. $\mu, \nu \in \mathcal{P}^\infty(B(\mathcal{H})^+)$ に対し $\mu \leq \nu$ の定義は定義 2.10 と同じとする. これは任意の有界ボレル可測な単調 (i.e., $0 \leq A \leq B \implies f(A) \leq f(B)$) 関数 $f : B(\mathcal{H})^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ に対し

$$\int_{B(\mathcal{H})^+} f(A) d\mu(A) \leq \int_{B(\mathcal{H})^+} f(A) d\nu(A)$$

が成立することと同値である ([27]). 定義 3.1 と同様に, $\mu, \mu_k \in \mathcal{P}^\infty(B(\mathcal{H})^+)$ ($k \in \mathbb{N}$) が $\mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \mu$ (また $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu$) であり, $B(\mathcal{H})^+$ 上の任意の有界な SOT-連続関数 f に対し

$$\int_{\mathbb{P}} f(A) d\mu_k(A) \longrightarrow \int_{\mathbb{P}} f(A) d\mu(A) \quad (k \rightarrow \infty)$$

を満たすとき, $\mu_k \nearrow \mu$ (また $\mu_k \searrow \mu$) と書く.

さて $M : \mathcal{P}^\infty(\mathbb{P}) \rightarrow \mathbb{P}$ は (A)–(D) を満たす任意の平均とする. 任意の $\mu \in \mathcal{P}^\infty(B(\mathcal{H})^+)$ と $\varepsilon > 0$ に対し, μ_ε を μ の $A \in B(\mathcal{H})^+ \mapsto A + \varepsilon I \in \mathbb{P}$ による像測度とする. $\mu_\varepsilon \in \mathcal{P}^\infty(\mathbb{P})$ であり, $0 < \varepsilon' < \varepsilon$ なら $\mu_{\varepsilon'} \leq \mu_\varepsilon$ は直ちに分かる. よって, M の単調連続性 (C) より $\widetilde{M} : \mathcal{P}^\infty(B(\mathcal{H})^+) \rightarrow \mathbb{P}$ を

$$\widetilde{M}(\mu) := \lim_{\varepsilon \searrow 0} M(\mu_\varepsilon) \quad (\text{SOT})$$

と定義できる. このとき次が成立する.

命題 4.2. $\widetilde{M} : \mathcal{P}^\infty(B(\mathcal{H})^+) \rightarrow \mathbb{P}$ は M の拡張であり, 単調性, 斉次性, 下向き連続性を満たす. つまり次が成立する:

- (1) $\mu \in \mathcal{P}^\infty(\mathbb{P})$ なら $\widetilde{M}(\mu) = M(\mu)$.
- (2) $\mu, \nu \in \mathcal{P}^\infty(B(\mathcal{H})^+)$, $\mu \leq \nu \implies \widetilde{M}(\mu) \leq \widetilde{M}(\nu)$.
- (3) 任意の $\mu \in \mathcal{P}^\infty(B(\mathcal{H})^+)$ と $\alpha \geq 0$ に対し $\widetilde{M}(\alpha \cdot \mu) = \alpha \widetilde{M}(\mu)$.
- (4) $\mu, \mu_k \in \mathcal{P}^\infty(B(\mathcal{H})^+)$ ($k \in \mathbb{N}$) に対し, $\mu_k \searrow \mu$ なら $\widetilde{M}(\mu_k) \rightarrow \widetilde{M}(\mu)$ (SOT).

証明は標準的で次の通り. $\mu \in \mathcal{P}^\infty(\mathbb{P})$ なら, $\mu_\varepsilon \searrow \mu$ ($\varepsilon \searrow 0$) だから $\widetilde{M}(\mu) = \lim_{\varepsilon \searrow 0} M(\mu_\varepsilon) = M(\mu)$. よって (1) が成立. $\mu, \nu \in \mathcal{P}^\infty(B(\mathcal{H})^+)$, $\mu \leq \nu$ なら, $\mu_\varepsilon, \nu_\varepsilon \in \mathcal{P}^\infty(\mathbb{P})$ であり $\mu_\varepsilon \leq \nu_\varepsilon$ だから $M(\mu_\varepsilon) \leq M(\nu_\varepsilon)$. $\varepsilon \searrow 0$ として $\widetilde{M}(\mu) \leq \widetilde{M}(\nu)$. よって (2) が成立. (3) は $\alpha = 0$ なら両辺 = 0 であり, $\alpha > 0$ なら $(\alpha \cdot \mu)_\varepsilon = \alpha \cdot \mu_{\varepsilon/\alpha}$ から直ちに分かる. 最後に (4) を示す. $\mu_k \searrow \mu$ なら

ら, (2) より $\widetilde{M}(\mu_1) \geq \widetilde{M}(\mu_2) \geq \cdots$ であり $\widetilde{M}(\mu_k) \geq \widetilde{M}(\mu)$. 任意の $\varepsilon > 0$ に対し $(\mu_k)_\varepsilon \searrow \mu_\varepsilon$ ($k \rightarrow \infty$) だから $M((\mu_k)_\varepsilon) \searrow M(\mu_\varepsilon)$ ($k \rightarrow \infty$). よって任意の $\xi \in \mathcal{H}$ に対し

$$\begin{aligned} \langle \xi, \widetilde{M}(\mu)\xi \rangle &= \inf_{\varepsilon > 0} \langle \xi, M(\mu_\varepsilon)\xi \rangle = \inf_{\varepsilon > 0} \inf_{k \geq 1} \langle \xi, M((\mu_k)_\varepsilon)\xi \rangle \\ &= \inf_{k \geq 1} \inf_{\varepsilon > 0} \langle \xi, M((\mu_k)_\varepsilon)\xi \rangle = \inf_{k \geq 1} \langle \xi, \widetilde{M}(\mu_k)\xi \rangle. \end{aligned}$$

これより $\widetilde{M}(\mu_k) \searrow \widetilde{M}(\mu)$ (SOT) がいえる.

命題4.2より (A)–(D) を満たす平均 $M : \mathcal{P}^\infty(\mathbb{P}) \rightarrow \mathbb{P}$ は一意的に $\mathcal{P}^\infty(B(\mathcal{H})^+)$ 上の平均 $\widetilde{M}$ に拡張されて, $\mathcal{P}^\infty(B(\mathcal{H})^+)$ 上で再び (A), (B) と下向き連続性を満たす (上向き連続性は注意3.2で述べたように $B(\mathcal{H})^+ \times B(\mathcal{H})^+$ 上の2変数作用素平均でも成立しない). $\widetilde{M}$ を同じ M で書き, M の**自然な拡張**と呼ぶ. $\mathcal{A}, \mathcal{H}, G, P_r$ を含む任意の $M \in \mathfrak{M}$ は自然な拡張をもつ. $M \in \mathfrak{M}$ の作用素平均 $\sigma \neq \mathbf{I}$ による変形平均 M_σ の自然な拡張について, 任意の $\mu \in \mathcal{P}^\infty(B(\mathcal{H})^+)$ に対し $X_0 := M_\sigma(\mu)$ は $X_0 = M(X_0 \sigma \mu)$ を満たす. これは $X_\varepsilon := M_\sigma(\mu_\varepsilon)$ ($\varepsilon > 0$) として $X_\varepsilon = M(X_\varepsilon \sigma \mu)$ の $\varepsilon \searrow 0$ の極限をとれば, 補題3.5 (b) と命題4.2 (4) から直ちにいえる.

確率ベクトル $w = (w_1, \dots, w_m)$ を固定して, M を重み付き m -変数の平均

$$M_w(A_1, \dots, A_m) := M\left(\sum_{j=1}^m w_j \delta_{A_j}\right), \quad A_j \in \mathbb{P}$$

に制限すると, $(B(\mathcal{H})^+)^m$ への拡張は (4.1) に帰着する.

$\mathcal{P}^\infty(B(\mathcal{H})^+)$ 上に拡張された M について, 3.3.2–3.3.6節で示した不等式やマジョリゼーションが次のように成立する. 証明はいずれも μ_ε から極限移行すれば容易である.

命題 4.3. 命題3.18は任意の $\mu \in \mathcal{P}^\infty(B(\mathcal{H})^+)$ に対し成立する. と命題3.19, 3.23, 3.24, 3.26, 3.29は任意の $\mu \in \mathcal{P}^\infty(\mathbb{M}_n^+)$ に対し成立する.

注意 4.4. $\mathcal{H}$ が無限次元でも命題3.19 (1) は任意の $\mu \in \mathcal{P}^\infty(B(\mathcal{H})^+)$ に対し成立するが, 命題3.19 (2) については不明である. 注意3.21に書いた不等式で考えると, $\varepsilon \searrow 0$ のとき $M(\mu_\varepsilon) \searrow M(\mu)$ だから, $\lambda_{\min}(M(\mu_\varepsilon)) \searrow \lambda_{\min}(M(\mu))$ が成立する. 問題は $\|M(\mu_\varepsilon)\|_\infty \searrow \|M(\mu)\|_\infty$ が成立するかどうかである. 2変数の幾何平均 $\#$ の場合, この問題は

$$\lim_{\varepsilon \searrow 0} \|(A + \varepsilon I) \# (B + \varepsilon I)\|_\infty = \|A \# B\|_\infty ?$$

この反例は知られているか? AH不等式に関する文献はすべて可逆な正作用素だけを扱っていて, 上の問題は素通りされているように思われる.

参考文献

- [1] T. Ando, *Topics on Operator Inequalities*, Lecture notes (mimeographed), Hokkaido Univ., Sapporo, 1978.
- [2] T. Ando, Concavity of certain maps on positive definite matrices and applications to Hadamard products, *Linear Algebra Appl.* **26** (1979), 203–241.
- [3] T. Ando, Majorizations, doubly stochastic matrices, and comparison of eigenvalues, *Linear Algebra Appl.* **118** (1989), 163–248.
- [4] T. Ando, Majorizations and inequalities in matrix theory, *Linear Algebra Appl.* **199** (1994), 17–67.
- [5] T. Ando, C.-K. Li and R. Mathias, Geometric means, *Linear Algebra Appl.* **385** (2004), 305–334.
- [6] T. Ando and F. Hiai, Log majorization and complementary Golden-Thompson type inequality, *Linear Algebra Appl.* **197** (1994), 113–131.
- [7] H. Araki, On an inequality of Lieb and Thirring, *Lett. Math. Phys.* **19** (1990), 167–170.
- [8] R. Bhatia, *Matrix Analysis*, Springer-Verlag, New York, 1996.

- [9] R. Bhatia, *Positive Definite Matrices*, Princeton Univ. Press, Princeton, 2007.
- [10] R. Bhatia and J. Holbrook, Riemannian geometry and matrix geometric means, *Linear Algebra Appl.* **413** (2006), 594–618.
- [11] R. Bhatia and R. Karandikar, Monotonicity of the matrix geometric mean, *Math. Ann.* **353** (2012), 1453–1467.
- [12] D. A. Bini, B. Meini and F. Poloni, An effective matrix geometric mean satisfying the Ando-Li-Mathias properties, *Math. Comp.* **79** (2010), 437–452.
- [13] J.-C. Bourin and F. Hiai, Jensen and Minkowski inequalities for operator means and anti-norms, *Linear Algebra Appl.* **456** (2014), 22–53.
- [14] A. Ebadian, I. Nikoufar and M. E. Gordji, Perspectives of matrix convex functions, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **108** (2011), 7313–7314.
- [15] E. Effros and F. Hansen, Non-commutative perspectives, *Ann. Funct. Anal.* **5**, (2014), 74–79.
- [16] T. Fack and H. Kosaki, Generalized s -numbers of τ -measurable operators, *Pacific J. Math.* **123** (1986), 269–300.
- [17] J. I. Fujii, M. Fujii and Y. Seo, An extension of the Kubo-Ando theory: Solidarities, *Math. Japon.* **35** (1990), 387–396.
- [18] J. I. Fujii and E. Kamei, Uhlmann’s interpolational method for operator means, *Math. Japon.* **34** (1989), 541–547.
- [19] M. Fujii and E. Kamei, Ando-Hiai inequality and Furuta inequality, *Linear Algebra Appl.* **416** (2006), 541–545.
- [20] J. I. Fujii and Y. Seo, The relative operator entropy and the Karcher mean, *Linear Algebra and Appl.* (2018), 印刷中.
- [21] T. Furuta, $A \geq B \geq 0$ assures $(B^r A^p B^r)^{1/q} \geq B^{(p+2r)/q}$ for $r \geq 0, p \geq 0, q \geq 1$ with $(1+2r)q \geq p+2r$, *Proc. Amer. Math. Soc.* **101** (1987), 85–88.
- [22] F. Hansen and G. K. Pedersen, Jensen’s inequality for operators and Löwner’s theorem, *Math. Ann.* **258** (1982), 229–241.
- [23] F. Hiai, Log-majorizations and norm inequalities for exponential operators, in *Linear Operators*, J. Janas, F. H. Szafraniec and J. Zemánek (eds.), Banach Center Publications, Vol. 38, 1997, pp. 119–181.
- [24] F. Hiai, Matrix Analysis: Matrix Monotone Functions, Matrix Means, and Majorization, *Interdisciplinary Information Sciences* **16** (2010), 139–248.
- [25] F. Hiai, Operator means deformed by a fixed point method, Preprint, 2017.
- [26] F. Hiai, R. König and M. Tomamichel, Generalized log-majorization and multivariate trace inequalities, *Ann. Henri Poincaré* **18** (2017), 2499–2521.
- [27] F. Hiai, J. Lawson and Y. Lim, The stochastic order of probability measures on ordered metric spaces, Preprint, 2017.
- [28] F. Hiai, J. Lawson and Y. Lim, Means of probability measures deformed by a fixed point method, Preprint, 2017.
- [29] F. Hiai and Y. Lim, Log-majorization and Lie-Trotter formula for the Cartan barycenter on probability measure spaces, *J. Math. Anal. Appl.* **453** (2017), 195–211.
- [30] F. Hiai and Y. Lim, Geometric mean flows and the Cartan barycenter on the Wasserstein space over positive definite matrices, *Linear Algebra Appl.* **533** (2017), 118–131.
- [31] F. Hiai and D. Petz, The Golden-Thompson trace inequality is complemented, *Linear Algebra Appl.* **181** (1993), 153–185.
- [32] J. Holbrook, No dice: a deterministic approach to the Cartan centroid, *J. Ramanujan Math. Soc.* **27** (2012), 509–521.
- [33] H. Karcher, Riemannian center of mass and mollifier smoothing, *Comm. Pure Appl. Math.* **30** (1977), 509–541.
- [34] S. Kim, J. Lawson and Y. Lim, Barycentric maps for compactly supported measures, *J. Math. Anal. Appl.* **458** (2018), 1009–1026.
- [35] S. Kim and H. Lee, The power mean and the least squares mean of probability measures on the space of positive definite matrices, *Linear Algebra Appl.* **465** (2015), 325–346.
- [36] S. Kim, H. Lee and Y. Lim, An order inequality characterizing invariant barycenters on symmetric cones, *J. Math. Anal. Appl.* **442** (2016), 1–16.

- [37] H. Kosaki, An inequality of Araki-Lieb-Thirring (von Neumann algebra case), *Proc. Amer. Math. Soc.* **114** (1992), 477–481.
- [38] F. Kubo and T. Ando, Means of positive linear operators, *Math. Ann.* **246** (1980), 205–224.
- [39] J. Lawson and Y. Lim, Monotonic properties of the least squares mean, *Math. Ann.* **351** (2011), 267–279.
- [40] J. Lawson and Y. Lim, Karcher means and Karcher equations of positive definite operators, *Trans. Amer. Math. Soc. Series B* **1** (2014), 1–22.
- [41] Y. Lim and M. Pálfi, Matrix power means and the Karcher mean, *J. Funct. Anal.* **262** (2012), 1498–1514.
- [42] Y. Lim and T. Yamazaki, On some inequalities for the matrix power and Karcher means, *Linear Algebra Appl.* **438** (2013), 1293–1304.
- [43] A. W. Marshall, I. Olkin and B. C. Arnold, *Inequalities: Theory of Majorization and Its Applications*, Second ed., Springer, New York, 2011.
- [44] M. Moakher, A differential geometric approach to the geometric mean of symmetric positive-definite matrices, *SIAM J. Matrix Anal. Appl.* **26** (2005), 735–747.
- [45] M. Pálfi, Operator means of probability measures and generalized Karcher equations, *Adv. Math.* **289** (2016), 951–1007.
- [46] M. Pálfi and D. Petz, Weighted multivariable operator means of positive definite operators, *Linear Algebra Appl.* **463** (2014), 134–153.
- [47] W. Pusz and S. L. Woronowicz, Functional calculus for sesquilinear forms and the purification map, *Rep. Math. Phys.* **8** (1975), 159–170.
- [48] Y. Seo, On a reverse of Ando-Hiai inequality, *Banach J. Math. Anal.* **4** (2010), 87–91.
- [49] Y. Seo, Operator power means due to Lawson-Lim-Pálfi for $1 < t < 2$, *Linear Algebra Appl.* **459** (2014), 342–356.
- [50] K. T. Sturm, Probability measures on metric spaces of nonpositive curvature, Heat kernels and analysis on manifolds, graphs, and metric spaces (Paris, 2002), 357–390, Contemporary Mathematics, **338**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2003.
- [51] A. C. Thompson, On certain contraction mappings in a partially ordered vector space, *Proc. Amer. Math. Soc.* **14** (1963), 438–443.
- [52] Y. Udagawa, T. Yamazaki and M. Yanagida, Some properties of weighted operator means and characterizations of interpolational means, *Linear Algebra Appl.* **517** (2017), 217–234.
- [53] C. Villani, *Topics in Optimal Transportation*, Graduate Studies in Mathematics, Vol. 58, American Mathematical Society, Providence, RI, 2003.
- [54] S. Wada, Some ways of constructing Furuta-type inequalities, *Linear Algebra Appl.* **457** (2014), 276–286.
- [55] S. Wada, When does Ando-Hiai inequality hold?, *Linear Algebra Appl.* **540** (2018), 234–243.
- [56] T. Yamazaki, The Riemannian mean and matrix inequalities related to the Ando-Hiai inequality and chaotic order, *Oper. Matrices* **6** (2012), 577–588.
- [57] T. Yamazaki, An elementary proof of arithmetic-geometric mean inequality of the weighted Riemannian mean of positive definite matrices, *Linear Algebra Appl.* **438** (2013), 1564–1569.