距離集合における分類問題と極値問題

よい距離集合はよい点配置か？

篠原　雅史　(滋賀大学)*

1. はじめに

本研究は熊本大学の籾原氏（3節），愛知教育大学の野崎氏（4節，5.1節），釜山大学の平坂氏（5.3節）との共同研究に基づくものである．

1.1. 古典的な問題と問題意識

空間における分類問題として，古典的で最もよく知られているものとして正多面体（プラトン多面体）の分類問題が挙げられるだろう．そこから派生して，面に関する条件を緩めた，アルキメデス多面体，ジョンソン多面体の分類問題，または，デルタ多面体の分類問題がある．この観点の下で，正多面体をピラミッドの頂点とした配置間の序列を（幾つか）与えることができる．正多面体の配置の美しさは多くの人が認めるものであろうが，ここで得られた配置の序列は“面に関する制約条件”の下での序列であり，これだけで絶対的な序列であるとは言いがたい．点配置の“よさ”について考えるとき，その“よさ”の下でよい点配置を分類することは重要なことであるが，同時に，外的な何かでよい点配置の“よさ”を計ることも大切である．本講演では，距離集合における点配置問題について，前者を分類問題に，後者を極値問題にそれぞれ対応させながら，よい距離集合の“よさ”について考えていきたい．

1.2. 距離集合に対する興味

ユークリッド空間（または球面）上の有限部分集合 X に対して，

$$A(X) = \{d(x,y) \mid x, y \in X, x \neq y\}$$

と定め $|A(X)| = k$ のとき，X を k-distance set という．相似変換（球面の場合は直交変換）で移り合う 2 つの k-distance set を同型とし，以後その同型類について考える．

与えられた空間における k-distance set で大きな頂点数を持つものをよい距離集合と捉え，そのようなものを分類すること，もしくは特徴付けることが，距離集合の研究における最大の興味であるといえる．$\mathbb{R}^d$ 上の k-distance set における最大頂点数を $g_d(k)$ とする．つまり，

$$g_d(k) := \max\{|X| \mid X \subset \mathbb{R}^d \text{ は } k\textit{-distance set}\ \}.$$

とする．また，最大値を達成する k-distance set を最良な距離集合という．本講演における，分類問題，極値問題をより具体的に記述すると次のようになる．

Problem 1.1. (1) 与えられた d, k に対し，$g_d(k)$ 点，もしくはそれに近い頂点数を持つ $\mathbb{R}^d$ 上の k-distance set を分類せよ．$\cdots$ 分類問題

2010 Mathematics Subject Classification: 05B30, 05D99
キーワード：distance sets, configuration problems, extremal combinatorics, algebraic combinatorics
* 〒520-0862 滋賀県大津市平津 2-5-1　滋賀大学教育学部
e-mail: shino@edu.shiga-u.ac.jp

(2) 次が成り立つような，よい $f(d,k)$ と性質 $(\sharp)$ の組を見付けよ．$\cdots$ 極値問題
$n > f(d,k)$ となるとき，$\mathbb{R}^d$ 上の n 点 k-distance set は性質 $(\sharp)$ を持つ[1]．

2. 平面上，3 次元空間上の距離集合

2.1. Erdős distance problem

距離集合に関する研究の出発点はErdős(1946) の論文 "On sets of distances of n points" であろう (cf. [14])．その中で次の予想が挙げられた．

Conjecture 2.1 (Erdős [9])．平面上の n 点 *k-distance set* に対し，次が成り立つ．

(1) ある定数 c が存在し $k \geq cn/\sqrt{\log n}$ が成り立つ．

(2) n 点が凸 n 角形をなすとき，$k \geq \lfloor n/2 \rfloor$ となる．

予想 (1) に関係して，2015 年に Guth-Katz [16] により $k \geq cn/\log n$ が示された．また，予想 (2) については 1963 年に Altman [1] が肯定的に解決した．ここで，Fishburn [12], Erdős-Fishburn [10] の結果もまとめて，次の定理が成り立つ．

Theorem 2.2. 平面上の凸な n 点 *k-distance set* に対して $n \leq 2k+1$ となる．また，次が成り立つ．ここで，R_m を正 m 角形の頂点集合とする．

(1) $n = 2k+1$ のとき，$X = R_{2k+1}$ となる．

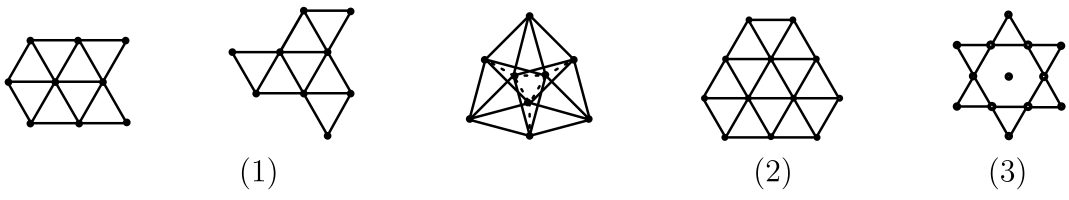
(2) $n = 2k$ $(k \geq 4)$ のとき，$X = R_{2k}$ または $X \subset R_{2k+1}$ となる．

(3) $(n,k) = (7,4), (9,5), (11,6)$ のとき，$X \subset R_{2k}$ または $X \subset R_{2k+1}$ となる．

Fishburn [12] は $n = 2k-1$ $(k \geq 4)$ なら，$X \subset R_{2k}$ または $X \subset R_{2k+1}$ となると予想している．ここで，$n = 2k-1$ $(k \geq 4)$ の仮定は本質的ではなく，「凸な n 点 k-distance set に対して，k が n に対して十分小さいとき R_{2k} または R_{2k+1} の部分集合であるか?」という問題と捉えるのがよい（Fishburn の問題）．この問題に関係した結果について第 3 節で紹介する．

2.2. 平面上の k-distance set と直径グラフ

平面上の最良な k-distance set は，$k=1$ のとき R_3, $k=2$ のとき R_5 となる．また，$k=3$ のときはR_6 に中心を加えたものと R_7 の 2 つがある．ここまで見ると，正多角形が最良のものになっていると勘違いしてしまうかもしれないが，$k \geq 4$ では状況が変わる．$k=4$ のとき R_9 に加え図1(1) の 3 つがあり，$k=5$ では図1(2) のものが一意に存在する．$k=6$ のとき R_{13} と 図1(3) が最良なものの例となっている[2]．



(1) (2) (3)

図 1: 最良な距離集合

[1] ここでは n を d,k で下から評価する形で表現したが，状況に応じて d や k を他のパラメータで上から評価することもある．

[2] k=5 のときの一意性と $g_2(k) = 13$ は Erdős-Fishburn [11] に予想として挙げられていた．

<table>
<tr><th>$k \setminus n$</th><th>3</th><th>4</th><th>5</th><th>6</th><th>7</th><th>8</th><th>9</th><th>10</th><th>11</th><th>12</th><th>13</th><th>14</th></tr>
<tr><td>2</td><td>∞</td><td>6</td><td>1</td><td colspan="9">$\times$</td></tr>
<tr><td>3</td><td colspan="2">∞</td><td>34_3</td><td>9_2</td><td>2_1</td><td colspan="7">$\times_1$</td></tr>
<tr><td>4</td><td></td><td colspan="3">∞</td><td>42_5</td><td>15_4</td><td>4_1</td><td colspan="5">$\times_1$</td></tr>
<tr><td>5</td><td></td><td colspan="3">∞</td><td colspan="4">?</td><td>4_6</td><td>1_4</td><td colspan="2">$\times_1$</td></tr>
<tr><td>6</td><td></td><td colspan="3">∞</td><td colspan="6">?</td><td>≥ 2</td><td>$\times_7$</td></tr>
</table>

(Erdős-Fishburn[1], Harborth-Piepmeyer[2], Shinohara[3,4], Lan-Wei[5], Wei[6,7])

表 1. n 点 k-distance set の非同型なものの個数

平面上の最良な距離集合について，Erdős-Fishburn [11] は次のように予想した．

Conjecture 2.3 (Erdős-Fishburn [11]). 最良な k-*distance sets* $(k \geq 7)$ は L_Δ の部分集合になる．ここで，$L_\Delta = \{a(1,0) + b(1/2, \sqrt{3}/2) : a, b \in \mathbb{Z}\}$ (正三角格子).

この予想について，「平面上の k-distance set が k に対して十分大きな頂点数を持つとき，正三角格子の部分集合となるか?」という問題と捉えることもできる（Erdős-Fishburn の問題）.

平面上の $g_2(k)$ 点，もしくはそれに近い頂点数を持つ距離集合の分類は，基本的に小さいクラスの問題に帰着して行われている．特に，直径 $\mathrm{diam}(X) := \max A(X)$ の構造について調べ，X の直径を用いていない部分集合 Y を考えることで小さいクラスに帰着する．ここで，X を頂点集合とし，$\{\{x, y\} \in \binom{X}{2} \mid d(x, y) = \mathrm{diam}(X)\}$ を辺集合とするグラフを X の直径グラフといい $DG(X)$ と表す．X を k-distance set とするとき，$DG(X)$ の独立集合 Y は k'-distance set $(k' \leq k - 1)$ となっている．一方で，$DG(X)$ の孤立点を除いた頂点集合は凸集合になることが分かり，孤立点が少ない場合は凸な k-distance set の分類への帰着も有効である．

平面上の直径グラフの独立数について次が成り立つ．

Theorem 2.4 (Shinohara [32]). $X \subset R^2(|X| = n)$ に対し，$G := DG(X)$ とする．このとき，$G \neq C_n$ ならば G の独立数 $\alpha(G)$ は $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ 以上である．

2.3. $\mathbb{R}^3$ 上の 3-distance set

ここでは，$\mathbb{R}^3$ 上の距離集合について考える．$\mathbb{R}^3$ 上の 6 点 2-distance set が 6 つであることは比較的簡単に確認できる．Einhorn-Schoenberg [8] は 5 点 2-distance set を分類し 27 個あることを示した．その論文の中で，次の予想を挙げた．

Conjecture 2.5. $\mathbb{R}^3$ 上の 12 点 3-*distance set* は正二十面体の頂点集合に限られる．

5 点 2-distance set を含む 12 点 3-distance set に対し，次の補題が成り立つ．

Lemma 2.6 (Shinohara [34]). 5 点 2-*distance set* を含む $\mathbb{R}^3$ 上の 12 点 3-*distance set* は正二十面体の頂点集合に限られる．

この補題より，Einhorn-Schoenberg の予想は「$\mathbb{R}^3$ 上の 12 点 3-distance set は，5 点 2-distance set を含む」という Ramsey type の問題に帰着できる．平面上の距離集合のときと同様に，直径グラフの独立数を考えることでこのことを示す．

ここで，$\mathbb{R}^3$ 上の点配置の直径に関して次が成り立つ．

Lemma 2.7 (Dol'nikov[6]). $X \subset \mathbb{R}^3$ に対し $G = DG(X)$ とする. G が 2 つの奇サイクル C, C' を含むとき, C と C' は共有点を持つ．

この補題を用いると，$X \subset \mathbb{R}^3$ ($|X| = 12$) に対しその直径グラフの独立数は 5 以上となることが示せる．以上により，Einhorn-Schoenberg の予想を肯定的に解決できた．

Theorem 2.8 (Shinohara [34]). $\mathbb{R}^3$ 上の 12 点 3-*distance set* は正二十面体の頂点集合に限られる．

正十二面体が最良の 5-distance set になっているかは，興味のある未解決問題である．

3. 直線・円周上の距離集合

2.1 節で凸集合に対する n 点 k-distance set X について，k が n に対して十分小さいときに X は R_{2k} または R_{2k+1} の部分集合になるか，という問題(Fishburn の問題)を紹介した．ここで，Figure 2 のように 2 つの正多角形を使って，正多角形には含まれない偶数点の配置を構成できる．奇数点の場合は偶数点から 1 点取り除くことで例が得られる．つまり，

$$M_n = \begin{cases} 3t, & \text{if } n = 4t \text{ or } 4t-1, \\ 3t-2, & \text{if } n = 4t-2 \text{ or } 4t-3. \end{cases}$$

とするとき，円周上の n 点 M_n-distance set で正多角形の部分集合ではないものが（無限個）存在する．本節では，Fishburn の問題の円周版に加え，Erdős-Fishburn の問題の一次元版についても考える．

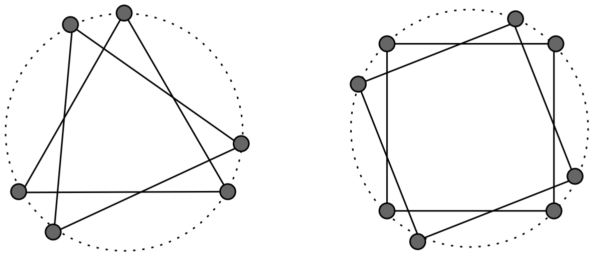


図 2: 正多角形に含まれない配置

Theorem 3.1 (Momihara-Shinohara [24]). X を S^1 上の n 点 k-*distance set* ($n \geq 4$) とする．もし $k < M_n$ なら，X は R_{2k} の部分集合か R_{2k+1} の部分集合である．

Kneser の定理などを用いて，次の補題が示せる．

Lemma 3.2. $X \subset R_m$ を n 点 k-距離集合とする．ただし，X は $R_{m'}$ ($m' < m$) には含まれないとする．もし $k < M_n$ ならば，$m \in \{2k, 2k+1\}$.

この補題により，定理の仮定の下で X がある正多角形に含まれることを示せばよい．以下で，このことを証明していく．

半円上の距離集合は弧長を考えることで，直線上の距離集合とみることができる．一方で円周上の n 点の配置 X があるとき，円の中心と X の 1 つの点を通るように半円を 2 つに分けると，いずれか片側の半円には $\lceil n/2 \rceil$ 点以上ある．そのため，$k < M_n$ となる円周上の n 点 k-distance set は，

$$k \leq \begin{cases} 3t-1 & \text{if } n = 2t \\ 3t & \text{if } n = 2t+1 \end{cases} \tag{1}$$

を満たす直線上の n 点 k-distance set を含んでいる．まず，(1) を満たす直線上の n 点 k-distance set を特徴付けることを目標にする．直線上の距離集合は，インターバルを用いて表現すると扱いやすい．そこで，$X = \{a_1, a_2, \dots a_n\}$ $(a_1 < a_2 < \dots < a_n)$ に対し，$b_i = a_{i+1} - a_i$ とし $X = (b_1, b_2, \dots, b_{n-1})$ と表記する．ここで，任意の i $(2 \le i \le n-1)$ に対し，$b_i/b_1 \in \mathbb{Q}$ となるとき X を rational といい，そうでないとき irrational という．

Example 3.3. c を無理数とする．$X = (1,1,1,c,1,1,1)$ に対し，

$$A(X) = \{1,2,3\} \cup \{i + c \mid 0 \le i \le 6\}$$

となるので，X は irrational な 8 点 10-distance set である．より一般に，$[m] \cup \tau_c([m])$ は $(3m-2)$-distance set になる．ここで，$[m] = \{1, 2, \dots, m\}$, $\tau_c(x) = x + c$ $(x \in \mathbb{R})$.

irrational な n 点 k-distance set に対する k の下からの評価として次の定理がある．

Theorem 3.4. X を直線上の *irrational* な n 点 *k-distance set* とするとき，

$$k \ge \lfloor \frac{3n-3}{2} \rfloor.$$

Theorem 3.4 は k が n に対して十分小さいとき X は rational であることを意味し，Erdős-Fishburn の問題の一次元版の答えを与えている．

今，我々が必要としている範囲 (1) に対して，3 つのクラス $(n,k) = (2m, 3m-2)$, $(2m, 3m-1)$, $(2m+1, 3m)$ 以外は rational となっている．この 3 つのクラスの分類について次が成り立つ．

Theorem 3.5. X を *irrational* な n 点 *k-distance set* とするとき，次が成り立つ．

(1) $(n,k) = (2m, 3m-2)$ $(m \ge 2)$ のとき，$X = [m] \cup \tau_c([m])$;

(2) $(n,k) = (2m+1, 3m)$ $(m \ge 5)$ のとき，$X = [m+1] \cup \tau_c([m])$;

(3) $(n,k) = (2m, 3m-1)$ $(m \ge 7)$ のとき，$X = [m+1] \cup \tau_c([m-1])$,

円周上の距離集合の分類問題に話を戻す．詳細は省略するが，$k < M_n$ を満たす n 点 k-distance set X に対して，半円上に上の (1) $\sim$ (3) のいずれも存在できないことが分かる（m が小さいときも同様）．このことより，X は rational な距離集合を上手く張り合わせてできることが分かり，X がある正多角形の部分集合となることが示される．よって，Lemma 3.2 により Theorem 3.1 が従う．

4. 高次元の 2-距離集合

4.1. 2-距離集合の最大頂点数

Delsarte-Goethals-Seidel [5], Blokhuis [3], Bannai-Bannai-Stanton [2] により，$\mathbb{R}^d$, S^{d-1} 上の k-distance set の頂点数に対して次の上界が知られている．

Theorem 4.1. $\mathbb{R}^d$ (*resp.* S^{d-1}) 上の *k-distance set* の頂点数は

$$\binom{d+k}{k} \quad \left(resp. \binom{d+k-1}{k} + \binom{d+k-2}{k-1} \right)$$

以下である．

$\mathbb{R}^d$ 上の 2-distance set について，正単体の中点の集合は $d(d+1)/2$ 点からなる 2-distance set になるので，$d(d+1)/2 \leq g_2(d)$ となる．Musin [25] や Glazyrin-Yu [15] によって，球面上の 2-distance set に関してほとんどの次元で $g_d^*(k) = d(d+1)/2$ であることが示されている．そこで S^{d-1} 上，または $\mathbb{R}^d$ 上で $d(d+1)/2$ 点以上のものを特徴付けることが課題である．Lisoněk [22] らにより，次が知られている．

Theorem 4.2. $d \leq 8$ に対する最大値 $g_d(2)$ は次で与えられる．

d	1	2	3	4	5	6	7	8
$g_d(2)$	3	5	6	10	16	27	29	45

4.2. 2-距離集合と単純グラフ

2-distance set はグラフとの相性がよい．単純グラフ G に対してその隣接行列を A で表す．単純グラフ G と $0 \leq c \leq 1$ に対し，$M_c(G) = M_c := cA + \bar{A}$ と定める．$X \subset \mathbb{R}^d$ に対し，行列 $(d(x,y)^2)_{(x,y)\in X\times X}$ を X の距離行列とよぶ． M_c がある $X \subset \mathbb{R}^d$ の距離行列となるとき，(G,c) は $\mathbb{R}^d$ に実現可能という．位数 n のグラフ G が完全グラフでも，孤立点の集合でもないとき，(G,c) が $n-2$ 次元以下のユークリッド空間に実現可能となる c がただ一つ存在する (Einhorn-Schoenberg [8])．このときの次元を G の極小次元といい $d(G)$ で表す．また，対応する 2-distance set X を G の極小埋め込みといい $m(G)$ で表す．位数 n のグラフ G とその補グラフ $\bar{G}$ に対し，

$$n \leq d(G) + d(\bar{G}) + 1 \tag{2}$$

が成り立つ．(2) の右辺をグラフ G の不変量とし，この値が n に近いほど 2-distance set によい対応を持つグラフと捉える事ができる．特に，(2) の等号を達成するグラフ（tight グラフとよぶ）はどのようなものがあるかという問題が考えられる．代数的グラフ理論においてよく知られているように，強正則グラフは tight グラフになる．極小次元の埋め込みたちがどちらも球面にのるという仮定のもとで，その逆も成り立つ．

Theorem 4.3 (Nozaki-Shinohara [28]). *G の極小埋め込み X_1 の次元を d_1, $\bar{G}$ の極小埋め込み X_2 の次元を d_2 とする．また，X_1, X_2 が共に球面にのっているとする．このとき，G が tight グラフであるための必要十分条件は G が強正則グラフになることである．*

Lisoněk が与えた $\mathbb{R}^8$ 上の 45 点からなる 2-distance set は非球面的な配置で (2) の等号を達成するものなっている．他にもごくわずかな例が発見できているが，完全な特徴付けについては分かっておらず，今後の課題である．

4.3. 直交型 2-距離集合

$X \subset \mathbb{R}^d$, $Y \subset \mathbb{R}^{d'}$ に対し，$X \oplus Y = \{(x_1,\ldots,x_d,0,\ldots,0) \mid (x_1,\ldots,x_d) \in X\} \cup \{(0,\cdots 0,y_1,\ldots,y_{d'}) \mid (y_1,\ldots,y_{d'}) \in Y\} \subset \mathbb{R}^{d+d'}$ とする．$Y = X_1 \oplus X_2$ となる $X_1 \neq \{O\}$, $X_2 \neq \{O\}$ が存在するようなY を X_1, X_2 を因子に持つ直交型配置という．$\mathbb{R}^d$ $(4 \leq d \leq 7)$ 上で比較的大きな頂点数を持つ 2-distance set で非球面なものの多くが直交型の 2-distance set になっていることが観測できている．直交型 2-distance set について次が成り立つ．

Theorem 4.4. *$X \subset \mathbb{R}^d$ を直交型 2-distance set とするとき，$|X| \leq d(d+1)/2 + 2$.*

よい非球面上の 2-distance set で直交型でないものを特徴付けることは今後の課題であるが，次節で見るように幾つかの設定の下では，直交型の配置となることに帰着し最大頂点数の決定などが可能となる場合がある．

5. 距離集合の広がり

この節では 2-distance set に関係する配置問題について幾つか紹介する．

5.1. locally distance sets

距離集合は集合全体で現れる距離の個数について考えている．ここでは，点ごとに現れる距離の個数に注目してた locally distance set について紹介する．$X \subset \mathbb{R}^d$，$x \in X$ に対して，$A_X(x) = A(x) := \{d(x,y) \mid y \in X, x \neq y\}$ とする．任意の点 $x \in X$ に対して $|A(x)| \leq k$ となるとき，X を locally k-distance set という．X が locally k-distance set かつ k'-distance set であるとき，定義より $k \leq k'$ が成り立つ．$k < k'$ が成り立つとき X を proper locally k-distance set という．

X ($|X| \geq 4$) を proper locally 2-distance set とするとき，$Y = \{x \in X \mid A(x) = D\}$ が 2 点以上になるように，上手く $D \subset A(X)$ ($|D| = 2$) を選ぶことができる．このとき，$X = Y \oplus (X \setminus Y)$ となることが分かり，次が成り立つ．

Theorem 5.1 (Nozaki-Shinohara[27]). 4 点以上の *proper locally* 2-*distance set* は直交型配置となる．特に，$d(d+1)+3$ 点以上持つ *locally* 2-*distance set* は 2-*distance set* となる．

平面上の locally 3-distance set については，最大頂点数が 8 で最良な配置が一意に定まる事が分かっている．$\mathbb{R}^3$ 上の locally 3-distance set が正二十面体の 12 点に限られるかどうかは，全く分かっていないのが現状である．

5.2. isosceles sets

$X \subset \mathbb{R}^d$ の任意の三点部分集合 T に対し，$|A(T)| \leq 2$ が成り立つとき X を isosceles set という (Croft [4], Blokhuis [3], Kido [21], Ionin [19])．定義より 2-distance set は isosceles set になることが分かる．そこで，2-distance set でない isosceles set を proper isosceles set という．ここでは，proper isosceles set の直交性について紹介する．一般に，n 点 k-distance set が与えられたとき，自然に完全グラフ K_n の k 辺着色を対応させることができる．isosceles set に対応する辺着色は Gallai coloring として知られている．特に，proper isosceles set に対応する Gallai coloring を proper Gallai coloring とする． proper Gallai coloring に対し，ある色に対応するグラフが非連結になることが示されている（Gallai [13]）．これより，次の定理が従う．

Theorem 5.2. *proper isosceles set* は直交型配置となる．

5.3. triangle sets と isometric sequences

距離の種類を合同な線分の種類だと思うと，距離集合の問題を次のように拡張できる．

Definition 5.3. X の k 点部分集合全体を $\binom{X}{k}$ で表す．X の 3 点部分集合の合同類 $\binom{X}{3}/_{\equiv}$ を $A_3(X)$ で表す．$|A_3(X)| = t$ のとき，X を t-triangle set とよぶ．ここでは，同一直線上の 3 点も三角形と捉える[3]．また，同様に $A_i(X)$ が定義できる．$(|A_i(X)|)_{1 \leq i \leq n}$

[3] Epstein, Lott, Miller, Palsson [7] では同一直線上の 3 点を三角形と認めず triangle set を定義し平面上の 5 点 2-triangle set を分類している

を isometric sequence という．

ここでは，$n := |X|, s := |A_2(X)|, t := |A_3(X)|$ とする．また，三辺の長さが a, b, c となる三角形を abc と表す．

Example 5.4. X を辺の長さ 1 の正六角形の頂点集合とすると，$A_2(X) = \{1, \sqrt{3}, 2\}$ より $s = 3$．また，$\alpha = 1, \beta = \sqrt{3}, \gamma = 2$ すると，

$$A_3(X) = \{\alpha\alpha\beta, \alpha\beta\gamma, \beta\beta\beta\}$$

となるので $t = 3$．また，$|A_4(X)| = 3, |A_5(X)| = 1$ となるので X の isometric sequence は $(1, 3, 3, 3, 1, 1)$ となる．

距離集合の場合と同様に，空間と t の値を固定したときに大きな頂点数を持つ配置 X を特徴付けることを目標とする．特に，次の値について考えていく．

$$h_d(t) := \max\{|X| \mid X \subset \mathbb{R}^d \text{ は } t\text{-triangle set } \}.$$

s と t の関係について，次が成り立つ [4]．

Theorem 5.5 (Hirasaka-Shinohara [18]). $n \geq 5$ のとき，$s \leq t$ が成り立つ．

$n \geq 5$ のとき，2-triangle set は特別な 2-distance set となっていることが分かる．

Lemma 5.6. $n \geq 5$ かつ $t = 2$ のとき X に対応するグラフは，完全二部グラフ $K_{n-p,p}$，*Cocktail party graph* $K_{2,2,\ldots,2}$，*pentagon* C_5 のいずれか，またはそれらの補グラフと同型である．

Theorem 5.7 (Hirasaka-Shinohara [17]). 2-*triangle set* について次が成り立つ．

$$h_d(2) = \begin{cases} 5 & \text{if } d = 2, \\ 2d & \text{if } d \geq 3. \end{cases}$$

更に，最大値を与えるのものは，正五角形 $(d = 2)$ または *cross polytope* $(d \geq 3)$ のとき，またそのときに限られる．

Proof. Lemma 5.6 のグラフの極小次元 $d(G)$ は次で与えられる (cf. [29], [23], [28])．

$$d(K_{n-p,p}) = n - 2, \quad d(K_{2,2,\ldots,2}) = \frac{n}{2}, \quad d(C_5) = 2.$$

特に，$d(K_{2,2,\ldots,2}), d(C_5)$ を与える配置は，それぞれ cross polytope, 正五角形である． □

X を 5 点以上の 3-triangle set とすると，Theorem 5.5 より $s = 2, 3$ となる．一方 $s = 2$ のとき，自明な関係式より $t \leq 4$ となる．特に，triangle-free であるグラフに対応する 2-distance set は $t \leq 3$ を満たす．このクラスの 2-distance set について，小さい次元の場合にはある程度の情報を得る事ができるが，制限が弱いため一般の次元に対して分類することは難しいものと思われる．特に，triangle-free の strongly regular graph は $t = 3$ でよい 2-distance set の例を与えるが，その分類は容易くない．

ここでは，まず $s = t = 3$ の場合について議論する．2-distance set を単純グラフに対応させたように，$s = 3$ のときは 3 色で辺に色付けされた完全グラフをさせることができる．つまり，$\alpha \in A_2(X)$ に対し，$E_\alpha := \{\{x, y\} \mid d(x, y) = \alpha\}$ とし $\{E_\alpha\}_{\alpha \in A_2(X)}$ を考えればよい．

---

[4] $s = t$ のときのグラフ構造も分類されている．

Example 5.8. 次の (1), (2) は $s = t = 3$ の例である．ここで，$X = Y \cup Z$ $(Y \cap Z \neq \emptyset)$．

(1)

$$E_\alpha = \binom{Y}{2} \cup \binom{Z}{2}, \quad E_\beta : Y \text{ と } Z \text{ の間の } matching\ ,$$

と定める $(E_\gamma = \binom{X}{2} \setminus (E_\alpha \cup E_\beta))$．このとき，

$$A_3(X) = \{\alpha\alpha\alpha, \alpha\beta\gamma, \alpha\gamma\gamma\}.$$

(2) Y, Z 間の matching を分割し E_β, E_γ とする $(E_\alpha = \binom{X}{2} \setminus (E_\beta \cup E_\gamma))$．このとき，

$$A_3(X) = \{\alpha\alpha\alpha, \alpha\alpha\beta, \alpha\alpha\gamma\}.$$

Lemma 5.9. *$s = t = 3$, $n \geq 5$ を満たすとする．このとき，X に対応する辺着色グラフは Example 5.8 を含む 4 つのタイプに限られる．*

ここで，Example 5.8 の埋め込みを考え，また 2-distance set の最大頂点数 $g_d(2)$ と比較する事で次の定理が得られる．

Theorem 5.10 (Hirasaka-Shinohara [17])**.** *$X \subset \mathbb{R}^d$ $(n \geq 5)$, $s = t = 3$ とするとき，*

$$n \leq 2d + 2$$

が成り立つ．更に，等号成立は $X = V(d) \cup -V(d)$ のとき，またそのときに限られる．ここで，$V(d)$ は原点を重心に持つ $\mathbb{R}^d$ 上の regular simplex の頂点集合とする．

特に，$h_2(3) = 6$, $h_3(3) = 8$, $h_4(3) = 10$, $h_5(3) = 16$.

参考文献

[1] E. Altman, On a problem of P. Erdős, *Amer. Math. Monthly*, **70** (1963), 148–157.

[2] E. Bannai, E. Bannai and D. Stanton, An upper bound for the cardinality of an s-distance set in real Euclidean space, II, *Combinatorica*, **3** (1983), 147–152. [3]

[3] A. Blokhuis, Few-distance sets, *CWI Tract*, **7** (1984), 1–70.

[4] H. T. Croft, 9-point and 7-point configurations in 3-space, *Proc. London Math. Soc. (3)*, **12** (1962), 400–424. [7] P. Delsarte, An algebraic

[5] P. Delsarte, J.M. Goethals, and J.J. Seidel, Spherical codes and designs, *Geom. Dedicata*, **6** (1977), no. 3, 363–388.

[6] V. Dol'nikov, Some property of graphs of diameter, *Discrete Comput. Geom.* , **24** (2000), 293–299

[7] A. Epstein, A. Lott, S. J. Miller, E. A. Palsson, Optimal point sets determining few distinct triangles, `arXiv:1609.00206`.

[8] S. J. Einhorn and I. J. Schoenberg, On euclidean sets having only two distances between points. I. II. *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A* 69=*Indag. Math.*, **28** (1966), 479–488, 489–504.

[9] P. Erdős, On sets of distances of n points, *Amer. Math. Monthly*, **53** (1946), 248–250.

[10] P. Erdős, P. Fishburn, Convex nonagons with five intervertex distances, *Geom. Dedicata*, **60** (1996), 317–332.

[11] P. Erdős, P. Fishburn, Maximum planar sets that determine k distances, *Discrete Math.*, **160** (1996), 115–125.

[12] P. Fishburn, Convex polygons with few intervertex distances, *Comput. Geom.*, **5** (1995), 65–93.

[13] T. Gallai, Transitiv orientierbare Graphen, *Acta Math Acad Sci Hungar*, **18** (1967), 25—66.

[14] J. Garibaldi, A. Iosevich, S. Senger, The Erdős distance problem, AMS Student Mathematical Library Volume 56 (2011).

[15] A. Glazyrin, W.-H. Yu, Upper bounds for 2-distance sets and equiangular lines, `arXiv:1611.09479v1`.

[16] L. Guth, N. W. Katz, On the Erdős distinct distances problem in the plane. *Ann. of Math.* (2), **181** (2015), 155–190.

[17] M. Hirasaka, M. Shinohara, Characterization of finite metric space by their isometric sequences, preprint.

[18] M. Hirasaka, M. Shinohara, Characterization of finite colored spaces with certain conditions, preprint.

[19] Y. J. Ionin, Isosceles sets, *Electron. J. Combinatorics*, **16** (2009), ♯R141.

[20] L. M. Kelly, Elementary problems and solutions. Isosceles n-points, *Amer. Math. Monthly*, **54** (1947), 227–229.

[21] H. Kido, Classification of isosceles eight-point sets in three-dimensional Euclidean space, *Europ. J. Combin.* , **27** (2006), 329—341.

[22] P. Lisoněk, New maximal two-distance sets, *J. Combin. Theory, Ser. A*, **77** (1997), 318–338.

[23] H. Maehara, Euclidean embeddings of fnite metric spaces, *Discrete Mathematics*, **313** (2013), 2848–2856.

[24] K. Momihara, S. Shinohara, Distance sets on circles, *Amer. Math. Monthly*, **124** (2017), 241–254.

[25] O. R. Musin, Spherical two-distance sets, *J. Combin. Theory, Ser. A*, **116** (2009), 988–995.

[26] A. Neumaier, Distance matrices, dimension, and conference graphs, *Nederl. Akad. Wetensch. Indag. Math.*, **43** (1981), 385–391.

[27] H. Nozaki, M. Shinohara, On a generalization of distance sets, *J. Combin. Theory, Ser. A*, **117** (2010), 810–826.

[28] H. Nozaki, M. Shinohara, A geometrical characterization of strongly regular graphs, *Linear Algebra Appl.*, **437** (2012), 2587–2600.

[29] A. Roy, Minimal Euclidean representation of graphs, *Discrete math.*, **310** (2010), 727–733.

[30] M. Shinohara, Classification of three-distance sets in two dimensional Euclidean space, *E*uropean J. Combin., **25** (2004), 1039–1058.

[31] 篠原雅史, Uniqueness of maximum three-distance sets in the three-dimensional Euclidean space, 第 24 回代数的組合せ論シンポジウム報告集 (2007), 32–40.

[32] M. Shinohara, Uniqueness of maximum planer five-distance sets, *D*iscrete Math. , **308** (2008), 3048–3055.

[33] 篠原雅史, 平坂貢, Few triangle sets, 第 33 回代数的組合せ論シンポジウム報告集 (2016), 1–6.

[34] M. Shinohara, Uniqueness of maximum three-distance sets in the three-dimensional Euclidean space, `arXiv:1309.2047`.

[35] X. Wei, A proof of Erdős-Fishburn's conjecture for $g(6) = 13$, *Electron. J. Combinatorics*, **19(4)** (2012), ♯P38.