

ポリヘドラル・プロダクトのホモトピー論

岸本 大祐 (京都大学)*

1. はじめに

ポリヘドラル・プロダクトは空間対に対して、与えられた(抽象)単体複体の組み合わせ構造により定まる操作を行って得られる空間である。特殊なポリヘドラル・プロダクトは、古くからトポロジーや幾何学において散見されてきたが、単体複体を用いた組み合わせ的な定式化は2010年に、トーリクトポロジーに現れるモーメント・アングル複体の一般化として、Bahriらにより論文[1]で与えられた。したがって、ポリヘドラル・プロダクトは比較的新しい研究対象であり、トポロジー、幾何学、代数、組み合わせ論など様々な視点から、現在盛んに研究されている。

その定義からポリヘドラル・プロダクトの様々な構造が単体複体の組み合わせ構造と深く関わっていると想像され、実際、ポリヘドラル・プロダクトのトポロジーに関する多くの研究は、次の指導原理のもと行われている(と信じたい)。

指導原理 1.1. ポリヘドラル・プロダクトのトポロジーと組み合わせ構造の「つながり」を解明する。

この講演で最初に現れる、ポリヘドラル・プロダクトと組み合わせ論との重要な関係は、ある種のポリヘドラル・プロダクトのコホモロジーは単体複体のStanley-Reisner環とその導来代数を与えるという事実である。本講演ではこの関わりに動機をもつ、ポリヘドラル・プロダクトのホモトピー分解に関する先行研究の概要をまず解説し、その問題点を明らかにする。その後、問題点を解決すべく、論文[12]で導入されたファット・ウェッジ・フィルトレーションの理論とその応用に関して解説する。

本講演で紹介する講演者の結果は、入江孝右衛門氏との共同研究で得られたものである。

2. ポリヘドラル・プロダクトとは

2.1. 単体複体

(抽象)単体複体の定義を思い出そう。集合 V の有限部分集合の族 L が、 V を頂点集合とする単体複体とは次の条件をみたすことをいう。

1. $\sigma \in L$ かつ $\tau \subset \sigma$ なら $\tau \in L$ である。
2. 任意の $v \in V$ に対して、 $\{v\} \in L$ である。

特に空集合は L の元であることに注意する。 L の元を L の単体もしくは面という。

2.2. 座標部分空間配置

座標部分空間と呼ばれる部分空間の配置を考えよう。以下、集合 $\{1, \dots, m\}$ を $[m]$ で表すことにする。部分集合 $I \subset [m]$ に対して、 $\mathbb{C}^m$ の部分空間

$$L_I = \{(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{C}^m \mid x_i = 0 \ (i \notin I)\}$$

* 〒606-8502 京都市左京区北白川追分町 京都大学 大学院理学研究科
e-mail: kishi@math.kyoto-u.ac.jp
web: <https://www.math.kyoto-u.ac.jp/~kishi/>

を、 I が定める座標部分空間という。部分集合 $I_1, \dots, I_r \subset [m]$ が定める座標部分空間の配置 $\{L_{I_1}, \dots, L_{I_r}\}$ を考える。通常、部分空間配置を扱う際は、与えられた部分空間の共通部分である部分空間たちのなす組み合わせ的な情報（共通部分ポセット）が重要であり、今の場合、それは $I_1, \dots, I_r$ が生成する単体複体 K である。したがって、配置自体を最初から

$$\mathcal{A}_K = \{L_\sigma \mid \sigma \in K\}$$

としておくとも便利である。（便利さは実際に研究してみるとよくわかる。）

座標部分空間配置 $\mathcal{A}_K$ の和 $U(\mathcal{A}_K)$ とは、

$$U(\mathcal{A}_K) = \bigcup_{\sigma \in K} L_\sigma$$

で与えられる空間である。 $U(\mathcal{A}_K)$ は単体複体 K だけから定まる空間のように思えるかもしれないが、座標部分空間の定義から、実際は、単体複体 K と空間対 $(\mathbb{C}, 0)$ の組みに対して定まるものであることがわかる。したがって、次の対応ができた。

$$\text{単体複体 } K + \text{空間対 } (\mathbb{C}, 0) \rightsquigarrow \text{空間 } U(\mathcal{A}_K)$$

2.3. ポリヘドラル・プロダクト

ポリヘドラル・プロダクトは上で与えた対応において空間対 $(\mathbb{C}, 0)$ を任意の空間対に置き換えて得られる空間である。以下、次の記号を用いる。

- K は頂点集合が $[m]$ である単体複体とする。

定義 2.1. 空間対の族 $(\underline{X}, \underline{A}) = \{(X_i, A_i)\}_{i=1}^m$ の K に関するポリヘドラル・プロダクトを次で定める。

$$Z(K; (\underline{X}, \underline{A})) = \bigcup_{\sigma \in K} D(\sigma) \quad (\subset X_1 \times \cdots \times X_m)$$

ただし、 $D(\sigma) = Y_1 \times \cdots \times Y_m$ で、 $i \in \sigma$ のとき $Y_i = X_i$ 、 $i \notin \sigma$ のとき $Y_i = A_i$ とする。

例 2.2. 定義より、 $U(\mathcal{A}_K) = Z(K; (\mathbb{C}, 0))$ である。

ここで興味深いのは、座標空間配置の補空間も双対的にポリヘドラル・プロダクトで表されることである。これを見るためにまず単体複体の Alexander 双対を定義する。

定義 2.3. 単体複体 K の Alexander 双対を次で定める。

$$K^\vee = \{\tau \subset [m] \mid [m] - \tau \notin K\}$$

命題 2.4. 空間対の族 $(\underline{X}, \underline{A}) = \{(X_i, A_i)\}_{i=1}^m$ に対して、 $(\underline{X}, \underline{X - A}) = \{(X_i, X_i - A_i)\}_{i=1}^m$ とすると次が成り立つ。

$$Z_{K^\vee}(\underline{X}, \underline{X - A}) = X_1 \times \cdots \times X_m - Z(K; (\underline{X}, \underline{A}))$$

注 2.5. K の頂点集合が $[m]$ 全体でなくても K に関するポリヘドラル・プロダクトは定義できることに注意する。したがって、一般に $K^\vee$ は頂点集合が $[m]$ 全体ではないが、それに関するポリヘドラル・プロダクトは定義できて、命題 2.4 は意味をなす。

例 2.6. 座標部分空間配置 $\mathcal{A}_K$ の補空間 $M(\mathcal{A}_K) = \mathbb{C}^m - U(\mathcal{A}_K)$ に関して次が成り立つ。

$$M(\mathcal{A}_K) = Z(K^\vee; (\mathbb{C}, \mathbb{C} - 0)) \simeq Z(K^\vee; (D^2, S^1))$$

例 2.7. ポリヘドラル・プロダクト $Z(K; (D^2, S^1))$ はモーメント・アングル複体と呼ばれ、 Z_K と書かれる。 $Z(K; (D^1, S^0))$ は実モーメント・アングル複体と呼ばれ、 $\mathbb{R}Z_K$ と書かれる。これらの空間はトーリクトポロジーにおいて基本的かつ重要である。

ポリヘドラル・プロダクトのうち、 $U(\mathcal{A}_K)$ に対応する $Z(K; (\underline{X}, *))$ と $M(\mathcal{A}_K)$ に対応する $Z(K; (C\underline{X}, \underline{X}))$ が重要である。ここで、基点付き空間族 $\underline{X} = \{X_i\}_{i=1}^m$ に対して、 $(\underline{X}, *) = \{(X_i, *)\}_{i=1}^m$ ($*$ は基点)、 $(C\underline{X}, \underline{X}) = \{(CX_i, X_i)\}_{i=1}^m$ とする。これらのポリヘドラル・プロダクトは次のホモトピー・ファイブレーションでも関係付けられる。

$$Z(K; (C\underline{X}, \underline{X})) \rightarrow Z(K; (\underline{X}, *)) \rightarrow X_1 \times \cdots \times X_m$$

このホモトピー・ファイブレーションは群 G の作用をもつ空間 X の Borel 構成に付随するファイバー束 $X \rightarrow EG \times_G X \rightarrow BG$ のホモトピー版であることから、 $Z(K; (\underline{X}, *))$ は $Z(K; (C\underline{X}, \underline{X}))$ から復元できることがわかる。したがって、まず考えるべきは $Z(K; (C\underline{X}, \underline{X}))$ であり、これが本講演で紹介する研究の対象である。その研究指針は次のものであり、かなりオーソドックスと言えよう。

指針 2.8. 単体複体 K によらない $Z(K; (C\underline{X}, \underline{X}))$ の構造からはじめて、それを個々の単体複体の組み合わせ構造に対して特殊化する。

3. ホモトピー分解と組み合わせ論

3.1. 最初の結果

ポリヘドラル・プロダクトのホモトピー型に関して最初に得られた結果は次である。

定理 3.1 (Grbić and Theriault [7]). 単体複体 K が *shifted* なら、 Z_K は球面のウェッジとホモトピー同値である。

shifted 複体の定義は [4] を参照されたい。この定理の主張に関して次が問題となる。

問題 3.2. 1. なぜ shifted という単体複体を選んでいるのか。

2. 分解はどのような意味をもつのか。

ひとつめの問題 に対する解答は論文 [7] に（暗に）記されているので、まずはそれについて説明する。ふたつめの問題の答えは論文 [1] が3年後に現れるまで待たないといけなかったもので、講演者の個人的な考えを後で述べる。

3.2. 組み合わせ論

まずは単体複体の Stanley-Reisner 環の定義を思い出そう。

定義 3.3. 単体複体 K の環 $\mathbb{k}$ 上の Stanley-Reisner 環は次で定義される。

$$\mathbb{k}[K] = \mathbb{k}[v_1, \dots, v_m] / (v_{i_1} \cdots v_{i_k} \mid \{i_1, \dots, i_k\} \notin K)$$

便宜上、生成元 v_i の次数を 2, として、Stanley-Reisner 環に次数を与える。言わずと知れたことだが、Stanley-Reisner 環は組み合わせ論において非常に的研究対象である。

実はポリヘドラル・プロダクトは Stanley-Reisner 環と密接な関わりがある。例えば、すぐにわかるように、

$$H^*(Z(K; (\mathbb{C}P^\infty, *)); \mathbb{k}) \cong \mathbb{k}[K]$$

が成り立つ。これだけではなく、Stanley-Reisner 環の重要な導来代数もポリヘドラル・プロダクトのコホモロジーとして実現されることが知られている。ここでは導来代数

$$\mathrm{Tor}_*^{\mathbb{k}[v_1, \dots, v_m]}(\mathbb{k}[K], \mathbb{k})$$

に注目する。この導来代数は $\mathbb{k}$ の $\mathbb{k}[v_1, \dots, v_m]$ に関する Koszul レゾリューションによって定められるので、Koszul レゾリューションの積から誘導される積と（高次）Massey 積をもつ。

命題 3.4 (Baskakov, Buchstaber and Panov [2]). 積と（高次）Massey 積を保つ次の同型がある。

$$H^*(Z_K; \mathbb{k}) \cong \mathrm{Tor}_*^{\mathbb{k}[v_1, \dots, v_m]}(\mathbb{k}[K], \mathbb{k})$$

ここで Golod 性という単体複体の性質を導入する。

定義 3.5. 単体複体 K が環 $\mathbb{k}$ 上 Golod とは、 $\mathrm{Tor}_*^{\mathbb{k}[v_1, \dots, v_m]}(\mathbb{k}[K], \mathbb{k})$ の積と（高次）Massey 積が自明であることを意味する。

注 3.6. Golod 性はそもそも環（今の場合は Stanley-Reisner 環）のコホモロジーの Poincaré 級数に関する等式で定義された。上の定義は Golod による、その言い換えである。（言い換えは一般の環でも成り立つ。）

Golod 性を有する代表的な単体複体として双対 Cohen-Macaulay 複体があげられる。より一般に、Cohen-Macaulay 複体の非純な拡張である sequentially Cohen-Macaulay 複体（定義は [5] を参照）に関して次が成り立つ。

命題 3.7. 環 $\mathbb{k}$ 上の双対 sequentially Cohen-Macaulay 複体は $\mathbb{k}$ 上 Golod である。

一方、Cohen-Macaulay 性はホモロジー的な性質であり、純粹に組み合わせ的なものではない。そこで、shifted、vertex-decomposable、shellable など組み合わせ的に定義される様々な部分クラスが導入されている。（定義は [4] を参照）これらは次をみtas。

$$\text{shifted} \Rightarrow \text{vertex-decomposable} \Rightarrow \text{shellable} \Rightarrow \text{sequentially Cohen-Macaulay} \quad (1)$$

ここで問題 3.2 のひとつめの問いに対する解答を与えよう。まず、 Z_K が球面のウェッジになるためには K が（任意の環上で）Golod でなければならないことに注意する。そして、(1) から我々の知っている最も単純な Golod 性を有する単体複体は双対 shifted (= shifted) 複体である。一方、 K が単体のスケルトンのとき Z_K が球面のウェッジになることはすぐにわかり、単体のスケルトンは shifted 複体の代表的な例である。よって、とりあえず shifted 複体に対して Z_K を球面のウェッジに分解してみようというのが、shited 複体を選んだ理由である。

かなりいい加減¹な動機であるが、とにかく結果は出ている。しかし、問題 3.2 のひとつめの問いに答えない限り、結果の意味はわからない。そこで、次はふたつめの問いに答えよう。

¹ 個人の感想です。

3.3. BBCG 分解

以下、次の記号を用いる。

- 基点付き空間族 $\underline{X} = \{X_i\}_{i=1}^m$ を固定する。
- $\emptyset \neq I = \{i_1, \dots, i_k\} \subset [m]$ に対して、 $\hat{X}^I = X_{i_1} \wedge \dots \wedge X_{i_k}$ とする。
- $\emptyset \neq I \subset [m]$ に対して、 $K_I = \{\sigma \in K \mid \sigma \subset I\}$ とする。
- 単体複体 L の幾何実現を $|L|$ で表す。

定理 3.8 (Bahri, Bendersky, Cohen and Gitler [1]). 次のホモトピー同値がある。

$$\Sigma Z(K; (C\underline{X}, \underline{X})) \simeq \Sigma \bigvee_{\emptyset \neq I \subset [m]} |\Sigma K_I| \wedge \hat{X}^I$$

このホモトピー分解を BBCG 分解と呼ぶ。問題 3.2 のふたつめの問いに答えよう。shifted 複体の幾何実現は球面のウェッジであることがすぐにわかるので、BBCG 分解により K が shifted 複体のとき ΣZ_K は球面のウェッジであることがわかる。したがって、 Z_K の分解は BBCG 分解のディサスペンション（サスペンションをはずすということ）であるというのが、今のところ最もそれらしい意味付けである。

この考察にしたがって次の予想が論文 [1] たてられ、その解決に向けての研究がポリヘドラル・プロダクトの本格的な研究の始まりである。

予想 3.9. 単体複体 K が shifted 複体のとき、BBCG 分解はディサスペンドする。

この予想に対して肯定的な解答が与えられている。

定理 3.10 (Grbić and Theriault [9], Iriye and K [11]). 上の予想は正しい。

その後、shifted 複体を含む vertex-decomposable 複体のクラスに対して次が証明された。この結果も shifted 複体の時と同様 BBCG 分解のディサスペンションだと思える。

定理 3.11 (Grujić and Welker [10]). 単体複体 K が双対 vertex-decomposable 複体のとき、 $Z(K; (D^n, S^{n-1}))$ は球面のウェッジとホモトピー同値である。

3.4. それから

(1) から、次に考えるべきは双対 shellable 複体 K であり、その次は sequentially Cohen-Macaulay 複体であり...

ここで正気²に戻ろう。今まで述べた結果の証明のアイディアを見てみよう。

- shifted 複体の場合：star 複体をつぶす $\Rightarrow$ この場合にしか使えない。
- 双対 vertex-decomposable 複体：離散 Morse 理論 $\Rightarrow$ この場合にしか使えない。

このままではポリヘドラル・プロダクトのトポロジーと組み合わせ構造を理解するということまで到底届きそうにないので、とにかく分解できそうなものは、無理矢理にでも分解するという路線はやめるべきである。では、なぜこのような路線をたどることになってしまったのかを考えて、その反省をもとに路線を修正しよう。我々の

² 個人の感想です。

研究指針が間違っているとは思えないので、原因はインプット、つまり、BBCG 分解から始めたことであろう。では、BBCG 分解のどこがまずいのか。それは、BBCG 分解は $Z(K; (C\underline{X}, \underline{X}))$ のサスペンションの性質としてしか理解されておらず、サスペンションしていない $Z(K; (C\underline{X}, \underline{X}))$ の構造との関係が完全に不明な点である。したがって、研究を道にのせるには、次の問題の解決が必要である。

問題 3.12. サスペンションしていない $Z(K; (C\underline{X}, \underline{X}))$ の構造で BBCG 分解を導くものを発見せよ。

4. ファット・ウェッジ・フィルトレーション

4.1. 直積空間の分解

BBCG 分解はよく知られた直積空間の分解 $\Sigma(X \times Y) \simeq \Sigma X \vee \Sigma Y \vee \Sigma(X \wedge Y)$ の単純な一般化である。このホモトピー分解はフィルトレーション $* \subset X \wedge Y \subset X \times Y$ のサスペンションによる分裂と理解できるので、 $X \times Y$ の内在的な構造の現れであると言える。より一般に、

$$T^k(\underline{X}) = \{(x_1, \dots, x_m) \in X_1 \times \dots \times X_m \mid \text{少なくとも } m - k \text{ 個の } x_i \text{ は基点である}\}$$

(一般ファット・ウェッジと呼ぶ) とすると、フィルトレーション

$$* = T^0(\underline{X}) \subset T^1(\underline{X}) \subset \dots \subset T^{m-1}(\underline{X}) \subset T^m(\underline{X}) = X_1 \times \dots \times X_m$$

が得られる。これはサスペンドすると分裂、つまり、ホモトピー同値

$$\Sigma(X_1 \times \dots \times X_m) \simeq \Sigma \bigvee_{i=1}^m T^i(\underline{X}) / T^{i-1}(\underline{X})$$

が得られ、 $\Sigma(X_1 \times \dots \times X_m)$ の分解を与える。したがって、ファット・ウェッジこそが問題 3.12 の解答を与えるのではないかと推測できる。

4.2. ファット・ウェッジ・フィルトレーション

$Z^i(K; (C\underline{X}), \underline{X}) = Z(K; (C\underline{X}), \underline{X}) \cap T^i(C\underline{X})$ とするとフィルトレーション

$$* = Z^0(K; (C\underline{X}), \underline{X}) \subset Z^1(K; (C\underline{X}), \underline{X}) \subset \dots \subset Z^m(K; (C\underline{X}), \underline{X}) = Z(K; (C\underline{X}), \underline{X})$$

を得る。これを $Z(K; (C\underline{X}), \underline{X})$ のファット・ウェッジ・フィルトレーションと呼ぶ。以下、 $Z_K^i = Z^i(K; (D^2, S^1))$ と $\mathbb{R}Z_K^i = Z(K; (D^1, S^0))$ により Z_K と $\mathbb{R}Z_K$ のファット・ウェッジ・フィルトレーションを略記する。

まず、 $\mathbb{R}Z_K$ のファット・ウェッジ・フィルトレーションの性質をみる。

定理 4.1 (Iriye and K [12]). $|I| = i$ なる各 $I \subset [m]$ に対して写像 $\varphi_I: |K_I| \rightarrow \mathbb{R}Z_K^{i-1}$ が存在し、 $\mathbb{R}Z_K^i$ はこのようなすべての I に対する φ_I で $\mathbb{R}Z_K^{i-1}$ にコーンをはることで得られる。

証明は単体をキューブで分割することにより、ひとつ高い次元のキューブへと埋め込むことでなされる。

系 4.2 (Iriye and K [12]). 次が成り立つ。

$$\mathbb{R}Z_K^i / \mathbb{R}Z_K^{i-1} = \bigvee_{I \subset [m], |I|=i} |\Sigma K_I|$$

写像 φ_I は K_I の組合せ構造を用いて具体的に与えられるので、 $\mathbb{R}Z_K$ のトポロジーと K の組み合わせ的な情報が直接リンクしていることになる。特に、次で与えられる φ_I の性質は基本的である。単体複体 K の極小非面とは $\sigma \subset [m]$ で $\sigma \notin K$ かつ $\sigma - v \in K$ がすべての $v \in \sigma$ で成り立つことをいう。

定理 4.3 (Iriye and K [12]). $\emptyset \neq I \subset [m]$ とする。 $\hat{K}_I$ を K_I にすべての極小非面を付け加えた単体複体とすると、 φ_I は包含写像 $|K_I| \rightarrow |\hat{K}_I|$ を経由する。

4.3. 分解定理

$\mathbb{R}Z_K$ を $Z(K; (C\underline{X}, \underline{X}))$ のコーン・パラメータのなす空間であるととらえて、ファット・ウェッジ・フィルトレーションを調べると、Corollary 4.2 と同様に次がわかる。

命題 4.4 (Iriye and K [12]). 次が成り立つ。

$$Z^i(K; (C\underline{X}, \underline{X}))/Z^{i-1}(K; (C\underline{X}, \underline{X})) = \bigvee_{I \subset [m], |I|=i} |\Sigma K_I| \wedge \hat{X}^I$$

注 4.5. 残念ながら、 $Z(K; (C\underline{X}, \underline{X}))$ のファット・ウェッジ・フィルトレーションは、 $\mathbb{R}Z_K$ とは異なって、コーン分解（コーンをはって得られる）であるとは限らない。

直積空間と同様、ファット・ウェッジ・フィルトレーションはサスペンドすると分裂することがわかる。したがって、Proposition 4.4 より次がわかり、ファット・ウェッジ・フィルトレーションこそが我々の求めていたものだと言える。

系 4.6. $Z(K; (C\underline{X}, \underline{X}))$ のファット・ウェッジ・フィルトレーションはサスペンドすると分裂し、BBCG分解を与える。

では、さらに深くファット・ウェッジ・フィルトレーションを調べよう。任意の $\emptyset \neq I \subset [m]$ で $\varphi_I \simeq *$ となる時、 $\mathbb{R}Z_K$ のファット・ウェッジ・フィルトレーションは自明であるという。

定理 4.7 (Iriye and K [12]). $\mathbb{R}Z_K$ のファット・ウェッジ・フィルトレーションが自明のとき、 $Z(K; (C\underline{X}, \underline{X}))$ のファット・ウェッジ・フィルトレーションは分裂し、BBCG分解のディサスペンションが得られる。

この定理はこれまで得られた $Z(K; (C\underline{X}, \underline{X}))$ のホモトピー分解ではわからなかったことを明らかにする。なぜなら、写像 φ_I は K_I の組み合わせ情報を用いて具体的に与えられているため、トポロジーと組み合わせ構造が直接リンクしているからである。

4.4. モーメント・アングル複体

残念ながら、定理4.7の逆、つまり、BBCG分解がディサスペンドするとき $\mathbb{R}Z_K$ のファット・ウェッジ・フィルトレーションが自明かどうかはわからない。しかし、モーメント・アングル複体 Z_K に関してはホモトピー分解を完全に特徴付けられる。

Theorem 4.1 における考察に高次 Whitehead 積を組み合わせることで次が得られる。

定理 4.8 (Iriye and K [12]). $|I| = i$ なる各 $I \subset [m]$ に対して写像 $\tilde{\varphi}_I: S^{i-1} * |K_I| \rightarrow Z_K^{i-1}$ が存在し、 Z_K^i はこのようなすべての I に対する $\tilde{\varphi}_I$ で Z_K^{i-1} にコーンをはることで得られる。

$\mathbb{R}Z_K$ のときと同様、任意の I で $\tilde{\varphi}_I \simeq *$ となる時 Z_K のファット・ウェッジ・フィルトレーションは自明であるという。

定理 4.9 (Iriye and K [12]). 次は同値である。

1. Z_K のファット・ウェッジ・フィルトレーションは自明である。
2. Z_K は $co\text{-}H$ 空間である。
3. Z_K に関する $BBCG$ 分解はディサスペンドする。

注 4.10. Z_K が $co\text{-}H$ 構造をもつための条件に関しては論文 [3] でも研究されている。そこでの特徴づけは（具体的に与えられてはいない）高次ホモトピーの存在によってなされており、 K の組み合わせ構造との関係は不明である。

5. ファット・ウェッジ・フィルトレーションの応用

5.1. ホモトピー分解

まずは $BBCG$ 分解のディサスペンションにファット・ウェッジ・フィルトレーションを応用しよう。

定義 5.1. 単体複体 K が *fillable* とは、ある極小非面 $M_1, \dots, M_r$ で $|K \cup M_1 \cup \dots \cup M_r|$ が可縮となることをいう。

Theorems 4.3 と 4.7 から次がすぐにわかる。

命題 5.2. 任意の $\emptyset \neq I \subset [m]$ で K_I が *fillable* なら $\mathbb{R}Z_K$ のファット・ウェッジ・フィルトレーションは自明であり、 $Z(K; (C\underline{X}, \underline{X}))$ の $BBCG$ 分解はディサスペンドする。

shellable 複体の定義から次がわかる。

命題 5.3. 双対 *shellable* 複体は *fillable* であり、単体複体 K が双対 *shellable* 複体なら、任意の $\emptyset \neq I \subset [m]$ で K_I も双対 *shellable* 複体である。

系 5.4. 単体複体 K が双対 *shellable* 複体なら $BBCG$ 分解はディサスペンドする。

先行結果での努力に比べて、ファット・ウェッジ・フィルトレーションの理論を使えば、単体複体の組み合わせ構造からあっけなくホモトピー分解が得られた。

双対 *shellable* 複体に対する上の考察をホモロジー的に一般化することでホモロジー *fillable* 複体という単体複体が [12] 導入され、さらにそれに対する $BBCG$ 分解のディサスペンションが証明されている。これを、双対 *sequentially Cohen-Macaulay* 複体に応用することで次がわかる。

定理 5.5. 単体複体 K が $\mathbb{Z}$ 上双対 *sequentially Cohen-Macaulay* 複体なら $BBCG$ 分解はディサスペンドする。

これにより、(1) に沿ったホモトピー分解はすべて片付いた。ここまで得られたホモトピー分解は Golod 性を有することが知られている単体複体に対して行われてきたが、ファット・ウェッジ・フィルトレーションを用いた次の分解は Golod 性を有する単体複体の発見へと繋がる。よって、ポリヘドラル・プロダクトの研究が組み合わせ論へと応用でき、研究の幅が一段と広がることになる。単体複体 K が k -neighborly とは K が $m - 1$ 次元単体の k スケルトンを部分複体にもつことをいう。

定理 5.6. 単体複体 K が $\lceil \frac{\dim K}{2} \rceil$ -neighborly のとき、 $\mathbb{R}Z_K$ のファット・ウェッジ・フィルトレーションは自明であり、 $Z(K; (C\underline{X}, \underline{X}))$ の $BBCG$ 分解はディサスペンドする。

系 5.7. 単体複体 K が $\lceil \frac{\dim K}{2} \rceil$ -neighborly なら任意の環上で *Golod* である。

定理の証明は上で紹介していない φ_I の性質（論文 [12] を参照）で、Whitehead 積と深く関わるものを用いる。

5.2. Golod 性の特徴付け

Golod 性は代数的に定められた性質であり、組合せ的に特徴づけることは困難である。そこで、あるクラスの中で Golod 性を組み合わせ的に特徴付けることで、Golod 性の理解につなげよう。ここでは、このような特徴付けで、ファット・ウェッジ・フィルトレーションを用いて得られるものを紹介する。まず、最も単純な 1 次元単体複体に関する Golod 性の特徴付けが論文 [6, 12] でなされた。次は 2 次元の場合だが、2 次元にすると急に難しくなる。そこで、閉曲面に限定することで次の特徴付けを得る。

定理 5.8 (Iriye and K [13]). 単体複体 K が閉曲面の三角形分割のとき、次は同値である。

1. 任意の環上で K は *Golod* である。
2. K は 1-neighborly である。
3. $\mathbb{R}Z_K$ のファット・ウェッジ・フィルトレーションは自明である。

その後、Katthän [17] によりこの結果の一部が高次元多様体の場合へと、純粋に代数的な手法により拡張されている。同様の課題へのファット・ウェッジ・フィルトレーションのその他の応用は論文 [13, 14] を参考されたい。

5.3. Whitehead 積

これまでの応用はホモトピー分解可能性に関するものである。実は、ホモトピー分解した場合に、ポリヘドラル・プロダクトのより深い構造が、ファット・ウェッジ・フィルトレーションを用いることでわかる場合がある。ここではその一例として射影 $(CX, X) \rightarrow (\Sigma X, *)$ が誘導する写像

$$w: Z(K; (CX, X)) \rightarrow Z(K; (\Sigma X, *))$$

に関する結果を紹介する。この写像はトーリクトポロジーにおいて基本的な写像 $Z_K \rightarrow Z(K; (CP^\infty, *))$ の本質的な部分を抜き出したものであり、トーリクトポロジーにおいても重要である。

この写像は K が単体の境界のとき、高次 Whitehead 積と呼ばれる高次ホモトピー作用素である。したがって、素朴な疑問として、どのような K に対してこの写像が高次 Whitehead 積と関係づくのかというものがもちあがる。この疑問に関しては論文 [8, 15] などでも考察されているが、ホモトピー分解と単体複体の組み合わせ構造の関係が不明であったため、あまり満足のいく結果は得られていなかった。しかし、ファット・ウェッジ・フィルトレーションを用いると次がわかった。

定理 5.9 (Iriye and K [16]). 任意の $\emptyset \neq I \subset [m]$ で K_I が *fillable* のとき、写像 w は高次 Whitehead 積をたかだかひとつ含む反復 Whitehead 積のウェッジと同一視できる。

6. まとめ

以上により、ファット・ウェッジ・フィルトレーションがポリヘドラル・プロダクト $Z(K; (CX, X))$ のトポロジーと組み合わせ構造とのつながりを明らかにし、その応用

としてポリヘドラル・プロダクトのホモトピー型の決定だけではなく、トポロジーの組み合わせ論への還元も可能にすることがわかった。ポリヘドラル・プロダクトのホモトピー論的研究は、上であげたもの以外に、群の分類空間に関するもの（論文 [18] を参照）など多種多様なものがある。そこでも $Z(K; (CX, X))$ は重要な役割を果たすので、今後、ポリヘドラル・プロダクトの研究全般においてファット・ウェッジ・フィルトレーションが重要な役割を果たすことが期待される。

参考文献

- [1] A. Bahri, M. Bendersky, F.R. Cohen, and S. Gitler, *The polyhedral product functor: a method of decomposition for moment-angle complexes, arrangements and related spaces*, Advances in Math. **225** (2010), 1634-1668.
- [2] I.V. Baskakov, V.M. Buchstaber, and T.E. Panov, *Cellular cochain algebras and torus actions*, Russian Math. Surveys **59** (2004), no. 3, 562-563.
- [3] P. Beben and J. Grbić, *Configuration spaces and polyhedral products*, Advances in Math. **314** (2017), 378-425.
- [4] A. Björner and M.I. Wachs, *Shellable nonpure complexes and posets. I*, Trans. AMS **348** (1996), 1299-1327; *Shellable nonpure complexes and posets. II*, Trans. AMS **349** (1997), 3945-3975.
- [5] A. Björner, M. Wachs, and V. Welker, *On Sequentially Cohen-Macaulay complexes and posets*, Israel J. Math. **169** (2009), 295-316.
- [6] J. Grbić, T. Panov, S. Theriault, and J. Wu, *The homotopy types of moment-angle complexes for flag complexes*, Trans. Amer. Math. Soc. **368** (2016), no. 9, 6663-6682.
- [7] J. Grbić and S. Theriault, *The homotopy type of the complement of a coordinate subspace arrangement*, Topology **46** (2007), 357-396.
- [8] J. Grbić and S. Theriault, *Higher Whitehead products in toric topology*, arXiv:1011.2133v2.
- [9] J. Grbić and S. Theriault, *The homotopy type of the polyhedral product for shifted complexes*, Advances in Math. **245** (2013), 690-715.
- [10] V. Grujić and V. Welker, *Discrete Morse theory for moment-angle complexes of pairs (D^n, S^{n-1})* , Monatsh. Math. **176** (2015), no. 2, 255-273.
- [11] K. Iriye and D. Kishimoto, *Decompositions of polyhedral products for shifted complexes*, Advances in Math. **245** (2013), 716-736.
- [12] K. Iriye and D. Kishimoto, *Fat wedge filtrations and decomposition of polyhedral products*, accepted by Kyoto J. Math.
- [13] K. Iriye and D. Kishimoto, *Golodness and polyhedral products for two dimensional simplicial complexes*, accepted by Forum Math.
- [14] K. Iriye and D. Kishimoto, *Polyhedral products for simplicial complexes with minimal Taylor resolutions*, Homology Homotopy Appl. **20** (2018), 69-78.
- [15] K. Iriye and D. Kishimoto, *Polyhedral products for shifted complexes and higher Whitehead products*, arXiv:1505.04892.
- [16] K. Iriye and D. Kishimoto, *Higher Whitehead products and polyhedral products*, in preparation.
- [17] L. Katthän, *A non-Golod ring with a trivial product on its Koszul homology*, to appear in J. Algebra.
- [18] D. Kishimoto, *Right-angled Coxeter quandles and polyhedral products*, arXiv:1706.06209.