滑らかな力学系の周期点の個数の増大度

浅岡　正幸　(京都大学)*

周期点の数の増大度は力学系の複雑さの一つの目安となる不変量であり，いくつかのよい状況ではその指数的増大度は系の位相的エントロピーと関連づけることができる．その一方で，2000年のKaloshinの仕事以降，周期点の数が非常に早く増大する系も豊富にあることが様々な状況で観測されている．本稿では，周期点の増大度にかかわる結果について，古典的なものから最近のものまで概観する．

1. 周期点の増大度

X を位相空間，$f : X \to X$ を連続写像とする．正の整数 n に対して，$f^n : X \to X$ を f の n 回合成 $f \circ \cdots \circ f$ とする．また，f^0 を X 上の恒等写像とし，f が同相写像のときには正の整数 n に対して $f^{-n} = (f^{-1})^n = (f^n)^{-1}$ とする．(離散時間位相) 力学系の理論の主な研究対象は，この写像の列 (f_n) と $x \in X$ に対して定まる点列 $(f^n(x))$ の振舞いである．特徴的な振舞いをする点としては，$f(x) = x$ をみたす不動点，ある正の整数 n に対して $f^n(x) = x$ となる周期点などがあり，これらの点やその周りでの様子を調べることが系の理解への第一歩となることも多い．一方で，Lefschetzの不動点定理のように，周期点の持つ情報は系の位相的性質とも密接に関連している．以下，f の不動点集合を $\mathrm{Fix}(f)$，周期点集合を $\mathrm{Per}(f)$ を書くことにし，集合 S に対して $\#S$ でその元の数を表わすものとする．本稿では周期点に関する次の基本的な問題について考える．

問題 1.1. 周期点の数の増大度はどれくらいか．すなわち，数列 $(\#\,\mathrm{Fix}(f^n))_{n\geq 1}$ はどれくらいの増大度を持つか．またその増大度は写像 f の力学系的な性質とどのように関係しているか．

例 1.2. $\mathbb{R}$，$\mathbb{Z}$ でそれぞれ実数全体，整数全体のなす集合を表わし，円周 $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ を S^1 で表わす．整数 $k \geq 1$ と十分小さい実数 $\epsilon > 0$ に対して，$g_{\epsilon,k} : S^1 \to S^1$ を $g_{\epsilon,k}(x) = x + \epsilon \sin(2\pi k x)$ で定める．このとき，

$$\mathrm{Fix}(g_{\epsilon,k}) = \left\{ \frac{j}{2k} \,\middle|\, j = 0, \ldots, 2k-1 \right\}$$

となり， それ以外に周期点は無い．よって，n によらず，$\#\,\mathrm{Fix}(g_{\epsilon,k}^n) = 2k$.

周期点の数が指数的に増大する例も簡単に構成できる．

例 1.3. 整数 $k \geq 2$ に対して，$f_k : S^1 \to S^1$ を k 倍角写像，すなわち，$f_k(x) = kx$ で定められる写像とする．このとき，$n \geq 1$ に対して

$$\mathrm{Fix}(f_k^n) = \left\{ \frac{j}{k^n - 1} \,\middle|\, j = 0, \ldots, k^n - 2 \right\}.$$

特に，$\#\,\mathrm{Fix}(f_k^n) = k^n - 1$.

2010 Mathematics Subject Classification: 37C35
キーワード：可微分力学系, 周期軌道
* 〒606-8502 京都市左京区北白川追分町 京都大学大学院理学研究科 数学教室

一方で，$\mathrm{Fix}(f^n)$ が無限集合になる例や，逆に周期点を一つも持たないような例も存在する．

例 1.4. 実数 θ に対して，$R_\theta : S^1 \to S^1$ を角度 θ の回転，すなわち，$R_\theta(x) = x + \theta$ で定められる写像とする．θ が有理数 p/q であるとき，R_θ^q は恒等写像．よって，$m \geq 1$ に対して $\mathrm{Fix}(R_\theta^{mq}) = S^1$ であり，$\# \, \mathrm{Fix}(R_\theta^{mq}) = \infty$. θ が無理数のときは，すべての $n \geq 1$ について $\mathrm{Fix}(R_\theta^n) = \emptyset$. すなわち，このとき R_θ は周期点を持たない．

位相空間 X と連続写像 $f : X \to X$ について，すべての n に関して $\mathrm{Fix}(f^n)$ が有限集合であるとき，f の周期点の指数的増大度 $\lambda_{\mathrm{Per}}(f)$ を次で定める．

$$\lambda_{\mathrm{Per}}(f) = \limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log \# \, \mathrm{Fix}(f^n)$$

すべての n に関して $\mathrm{Fix}(f^n)$ が有限集合であることや，$\lambda_{\mathrm{Per}}(f)$ が有限であることはどれくらい期待できることだろうか．次の Artin と Mazur による定理は，すべての滑らかな写像は周期点の数の増大度が高々指数的なもので近似されることを保証している．

定理 1.5 (Artin-Mazur). M を滑らかな閉多様体とし，$1 \leq r \leq \infty$ とする．$C^r(M, M)$ で M からそれ自身への C^r 級写像全体のなす集合に C^r 位相を入れたものとする．このとき，$f \in C^r(M, M)$ で，すべての n について $\mathrm{Fix}(f^n)$ が有限集合であり，かつ，$\lambda_{\mathrm{Per}}(f) < \infty$ となるようなものの全体は，$C^r(M, M)$ の稠密部分集合をなす．

この定理を踏まえて，次のような問題を考えるのは自然であろう．

問題 1.6. M を滑らかな閉多様体とし，$1 \leq r \leq \infty$ とする．

(a) $f \in C^r(M, M)$ で，すべての $n \geq 1$ について $\mathrm{Fix}(f^n)$ が有限，かつ，$\lambda_{\mathrm{Per}}(f) = \infty$ となるものはあるか．

(b) そのような f が存在するならば，どれくらい「よい状況」ならば $\lambda_{\mathrm{Per}}(f) < \infty$ となるか．

(c) 「よい状況」では $\lambda_{\mathrm{Per}}(f)$ は f の何らかの力学系的な情報を反映しているか．

以下，本稿ではこれらの問題に関わる結果について，古典的なものから筆者の結果も含めた最近のものまでを概観していく．先に問題への解答だけを述べてしまうと，次のようになる．

(a) すべての $n \geq 1$ について $\mathrm{Fix}(f^n)$ が有限，かつ，$\lambda_{\mathrm{Per}}(f) = \infty$ となるような f は，多様体の次元と r が小さくなければ「豊富に」存在する．

(b) 双曲力学系の場合や，flat な臨界点を持たないような十分に滑らかな 1 次元力学系の場合には，$\lambda_{\mathrm{Per}}(f)$ は有限となる．

(c) (b) の場合には $\lambda_{\mathrm{Per}}(f)$ は系の位相的エントロピーと一致する．

次節では位相的エントロピーの定義を与え，その基本的な性質を述べる．続く 3,4 節では，双曲力学系や 1 次元力学系では周期点の増大度と位相的エントロピーが等式で結ばれることを見る．5 節では，周期点の数が超指数的に増大する例を最初に与えた

Kaloshin の仕事について，最後の 6 節では，超指数的増大に関する筆者のものを含めた最近の結果について述べる．

周期点の増大度に関しては力学系の ζ-関数も重要な話題であるが，紙面の都合もあり本稿では触れない．[1]

2. 位相的エントロピー

まず最初に,「よい状況」で $\lambda_{\mathrm{Per}}(f)$ と等式で結ばれる力学系の不変量，位相的エントロピーを定義し，その基本的な性質を見ておこう．

(X,d) をコンパクト距離空間，$f : X \to X$ を連続写像とする．実数 $\epsilon > 0$ と整数 $n \geq 1$ について，X の部分集合 S が (n,ϵ)-separated であるとは，互いに異なる $x, y \in S$ に対して常に $d(f^m(x)), f^m(y)) > \epsilon$ となる $m = 0, 1, \ldots, n-1$ が存在することを言う．f の位相的エントロピー $h_{\mathrm{top}}(f)$ を次で定める：

$$h_{\mathrm{top}}(f) = \lim_{\epsilon \to 0} \limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log \left(\max \{ \# S \mid S \subset X \text{ は } (n,\epsilon)\text{-separated} \} \right).$$

$h_{\mathrm{top}}(f)$ は距離 d の取り方にはよらず，X と f のみで決まる．位相的エントロピーは次の変分原理を通じて力学系の位相的性質とエルゴード論的性質を結びつける．

定理 2.1 (変分原理). (X,d) をコンパクト距離空間，$f : X \to X$ を連続写像とする．$\mathcal{M}(f)$ で f-不変な X 上の Borel 確率測度全体のなす集合を表わし，$\mu \in \mathcal{M}(f)$ に対して，その測度論的エントロピー[2] を $h_\mu(f)$ と書くことにする．このとき，次が成り立つ．

$$h_{\mathrm{top}}(f) = \sup \{ h_\mu(f) \mid \mu \in \mathcal{M}(f) \}$$

連続写像 $f : X \to X$ が λ-Lipschitz であるとき，(n,ϵ)-separated な集合 S について，$x \in S$ を中心とする半径 $\epsilon\lambda^{-n}$ の球は他の S の点を含むことができないことに注意すると，滑らかな写像に関しては次が成り立つことがわかる．

命題 2.2. M を滑らかな閉多様体，f をその上の C^1 級微分同相写像とする．$\|\cdot\|$ を M 上のある Riemann 計量が定める接空間上のノルムとし，$\lambda = \max_{x \in M} \|Df_x\|$ とすると，$h_{\mathrm{top}}(f) \leq \dim M \cdot \log \lambda$.

例 2.3. $f_k : S^1 \to S^1$ を $f_k(x) = kx$ で定められた例 1.3 の写像とする．$m, n \geq 1$ に対して，$S_{m,n} = \{ j/(mk^n) \mid j = 0, \ldots, mk^n - 1 \}$ とすると，$\epsilon < 1/m$ に対して $S_{m,n}$ は (n,ϵ)-separated．従って，$h_{\mathrm{top}}(f_k) \geq \log k$. 一方，上の命題から，$h_{\mathrm{top}}(f_k) \leq \log k$. よって，$h_{\mathrm{top}}(f_k) = \log k$.

3. よい状況 I：双曲力学系

M を滑らかな閉多様体，f をその上の C^1 級微分同相写像とする．M の部分集合 Λ が $f(\Lambda) = \Lambda$ をみたすとき，Λ は f の不変集合であるという．$p \in \mathrm{Per}(f)$ に対して，その軌道 $\{ f^n(p) \mid n \in \mathbb{Z} \}$ は，有限不変集合である．周期軌道以外の重要な不変集合の一つに，次で与えられる非遊走点集合 (non-wandering set) $\Omega(f)$ がある：

$$\Omega(f) = \left\{ x \in M \mid x \text{ のすべての近傍 } U \text{ について } U \cap \left(\bigcup\nolimits_{n \geq 1} f^n(U) \right) \neq \emptyset \right\}.$$

---

[1] 力学系の ζ-関数に関しては，少し古い文献になるが Baladi[4] がその時点までの成果がよくまとめられている．

[2] 測度論的エントロピーの定義については，Walters [19] などを参照のこと．

定義から，非遊走点集合は閉集合になる．また，Mがコンパクトであることから空集合ではないこともわかる．

fのコンパクト不変集合Λが双曲集合であるとは，Mの接バンドルTMのΛへの制限$TM|_\Lambda$の連続な分解$TM|_\Lambda = E^s \oplus E^u$と，定数$C > 1$, $\alpha > 0$で次の条件をみたすものが存在することを言う：

(分解の不変性) $Df(E^s) = E^s$, $Df(E^u) = E^u$.

(E^sに沿う縮小性) $v \in E^s$, $n \geq 1$に対して，$\|Df^n v\| \leq Ce^{-\alpha n}\|v\|$.

(E^uに沿う拡大性) $w \in E^u$, $n \geq 1$に対して，$\|Df^n w\| \geq C^{-1}e^{\alpha n}\|w\|$.

ここで，$\|\cdot\|$はMのあるRiemann計量が定める接空間上のノルム．必要に応じて定数C, αを取り換えることで，Λの双曲性はRiemann計量の取り方によらないことがわかる．また，分解$TM|_\Lambda = E^s \oplus E^u$は一意に定まることが知られており，$\Lambda$上の双曲分解と呼ばれる．多様体$M$全体が双曲集合となる微分同相写像をAnosov系と呼ぶ．また，$\Omega(f) = \overline{\mathrm{Per}(f)}$で，この集合が双曲的であるときに公理Aをみたすと言う．Anosov Closing Lemmaにより，Anosov系は公理Aをみたすことが知られている．

例 3.1. f^nの不動点pについてその軌道$\{p, f(p), \ldots, f^{n-1}(p)\}$が双曲集合であることは，$Df^n_p$が絶対値1の固有値を持たないことと同値である．このとき，pは双曲周期点であるという．pの周りの局所座標において，写像$f^n(x) - x$に対して逆写像定理を用いると，双曲周期点pはf^nの不動点集合$\mathrm{Fix}(f^n)$の孤立点であることがわかる．

例 3.2. $g_{\epsilon,k}(x) = x + \epsilon \sin(2\pi kx)$を例1.2の$S^1$上の微分同相写像とする．全ての不動点は双曲不動点で，$\Omega(f) = \mathrm{Fix}(g_{\epsilon,k})$. 特に$f$は公理Aをみたす．

例 3.3. Aを$\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$の元で，$\mathrm{tr}A > 2$であるものとする．このとき，$\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$上の微分同相写像$f_A$を$f_A(x) = Ax$で定めることができる．$A$は二つの異なる実固有値$\lambda_s < \lambda_u$を持ち，これらは$0 < \lambda_s < 1 < \lambda_u$をみたす．$V^s$, V^uをそれぞれ固有値λ_s, λ_uに属する固有空間として，自然な同一視$T_x\mathbb{T}^2 \cong \mathbb{R}^2$の下で$E^s(x) = V^s$, $E^u(x) = V^u$と定めると，f_Aは$T\mathbb{T}^2 = E^s \oplus E^u$を双曲分解とするAnosov系となる．

公理Aをみたす系では$\lambda_{\mathrm{Per}}(f)$は系の位相的エントロピーと等しい．すなわち，

定理 3.4 (Bowen [7]). 滑らかな閉多様体上のC^1級微分同相写像fが公理Aをみたすとき，$\lambda_{\mathrm{Per}} f = h_{\mathrm{top}}(f)$. 特に，$\lambda_{\mathrm{Per}}(f) < \infty$.

証明はMarkov分割という$\Omega(f)$の分割を用いて，fと同じ周期点の指数的増大度を持つ記号力学系を構成することでなされる．

flowの場合も，ある数以下の周期を持つ周期軌道を数えることで，周期軌道の数の増大度を問題にすることができる．Anosov flowの代表例である負曲率多様体の測地流の場合には，周期点の増大度は多様体の普遍被覆における体積の増大度と密接に関連することが知られている(Margulis [12]).

4. よい状況 II：1次元力学系

連続写像$f : [0,1] \to [0,1]$が区分単調的であるとは，$0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_l = 1$で，各$j = 0, \ldots, l-1$について，$f$の$[x_j, x_{j+1}]$への制限$f|_{[x_j, x_{j+1}]}$が単調であるようなものが存在することを言う．このとき，上の点列$(x_j)_{j=0,\ldots,L}$で各$[x_j, x_{j+1}]$を真に含む区間の

上では f が単調にならないようなものが存在する．こうした列に対して，$l(f)=l$ と定める．$l(f^n)\le l(f)^n$ であることは簡単にわかる．$\lambda_{\mathrm{Per}}(f)$ と $h_{\mathrm{top}}(f)$, $l(f^n)$ の指数的増大度は次の関係をみたす．

定理 4.1 (Misiurewicz-Szlenk [14])**.** 区分単調的な連続写像 $f:[0,1]\to[0,1]$ について次が成り立つ．

$$\lambda_{\mathrm{Per}}(f)\ge h_{top}(f)=\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log l(f^n).$$

証明は [11, Section 15.2] などを参照のこと．

$1\le r\le\infty$ とする．C^r 写像 $f:[0,1]\to[0,1]$ に対して，$f'(c)=0$ となる $c\in[0,1]$ を f の臨界点と言う．臨界点 c が $(r-1)$-non-flat であるとは，$f^{(m)}(c)\neq 0$ となる $m=2,\dots,r-1$ があることを言う．すべての臨界点が $(r-1)$-non-flat のとき，臨界点の個数は有限個で f は区分単調的になる．

定理 4.2 (Martens-de Melo-van Strien [13])**.** $r\ge 3$ とする．C^r 級写像 $f:[0,1]\to[0,1]$ のすべての臨界点が $(r-1)$-non-flat であり，すべての $n\ge 1$ に対して $\mathrm{Fix}(f^n)$ が有限集合であるとする．このとき，有限集合 $P_*\subset\mathrm{Per}(f)$ と $\alpha>1$ で，すべての $n\ge 1$ と $p\in\mathrm{Fix}(f^n)\setminus P_*$ に対して，$|(f^n)'(p)|>\alpha$ が成り立つものが存在する．

f^n がある区間 $[p_1,p_2]$ 上で単調であり，$p_i\in\mathrm{Fix}(f^n)$, $|(f^n)'(p_i)|>1$ $(i=1,2)$ であるとすると，中間値の定理から $q\in(p_1,p_2)\cap\mathrm{Fix}(f^n)$ で $|(f^n)'(q)|\le 1$ をみたすものが必ず存在する．このことから次が得られる．

系 4.3. r, f, P_* を上の定理のものとする．すべての $n\ge 1$ に対して，$\mathrm{Fix}(f^n)\le l(f^n)+2\#P_*$. 特に，

$$\lambda_{\mathrm{Per}}(f)=h_{\mathrm{top}}(f)=\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log l(f)<\infty.$$

系 4.4. $f:[0,1]\to[0,1]$ が実解析的ならば，$\lambda_{\mathrm{Per}}(f)<\infty$.

$[0,1]$ からそれ自身への C^r 級写像のなす空間 $C^r([0,1],[0,1])$ において，すべての臨界点が $(r-1)$-non-flat であるようなものの全体は $C^r([0,1],[0,1])$ の稠密な開集合をなす．また，次の節で見るように，すべての $n\ge 1$ について $\mathrm{Fix}(f^n)$ が有限であるような f の全体は $C^r([0,1],[0,1])$ の「大半」を占める．従って，次の意味で「大半の」1次元写像は $\lambda_{\mathrm{Per}}(f)<\infty$ をみたす．

系 4.5. $C^r([0,1],[0,1])$ の稠密開部分集合 $\mathcal{U}$ で次をみたすものが存在する．$f\in\mathcal{U}$，かつ，すべての $n\ge 1$ について $\mathrm{Fix}(f^n)$ が有限ならば，$\lambda_{\mathrm{Per}}(f)<\infty$.

一方で，non-flat 条件を除くと $\lambda_{\mathrm{Per}}(f)$ が有限でなくなる例が構成できる．

定理 4.6 (Kaloshin-Kozlovski [10], 浅岡 [2])**.** 正の整数の列 $(a_n)_{n\ge 1}$ に対して，ただ一つの臨界点を持つ C^∞ 級写像 $f:[0,1]\to[0,1]$ で，すべての $n\ge 1$ について $\mathrm{Fix}(f^n)$ は有限集合，かつ，次をみたすものが存在する．[3]

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{\#\,\mathrm{Fix}(f^n)}{a_n}=\infty.$$

[3] Kaloshin-Kozlovski は任意の有限の r に対して C^r 級のものを，筆者は全体で C^∞ 級のものを構成した．

特に，$\epsilon > 0$として，$a_n = \exp(n^{1+\epsilon})$の場合を考えれば，$\lambda_{\mathrm{Per}}(f) = \infty$となる．この定理は，周期点の数の増大度が超指数的になるものだけでなく，任意の増大度よりも大きいものが存在することを示している．

5. 超指数的な増大度 I：Newhouse領域

3節，4節では，すべての双曲力学系や「大半」の1次元力学系については周期点の数の増大度が高々指数的であることを見てきた．この節では，2次元力学系の世界で双曲力学系から最も離れた状況の典型であるNewhouse領域と呼ばれるところでは，逆に周期点の数が超周期的に増大するものが「大半」であるというKaloshinによる結果を紹介する．この結果は1次元で超指数的増大を示す系を与えた定理4.6に先立つものであり，超指数的増大を引き起こすメカニズムの典型を与えている．

Kaloshinの結果を述べる前に，まず「大半」の意味を明確にしよう[4]．Mを滑らかな閉多様体とし，$1 \leq r \leq \infty$とする．$\mathrm{Diff}^r(M)$でM上のC^∞級微分同相写像全体のなす集合を表わし，この集合にはC^r位相が入っているものとする．微分同相写像に関するある性質$\mathcal{P}$が，$\mathrm{Diff}^r(M)$の開部分集合$\mathcal{U}$でgenericであるとは，$\mathcal{U}$の稠密開部分集合の可算族$(\mathcal{U}_n)_{n\geq 1}$で，すべての$\bigcap_{n\geq 1}\mathcal{U}_n$の元が$\mathcal{P}$をみたすようなものが存在することを言う．次の定理と双曲不動点が不動点集合の中で孤立していることから，これまで何度も出てきた$\mathrm{Fix}(f^n)$の有限性が$\mathrm{Diff}^t(M)$においてgenericな性質であることがわかる．

定理 5.1 (Kupka-Smaleの定理 [17, Theorem 1.1 in Chapter XI])**.** $\mathrm{Diff}^r(M)$において，すべての周期点が双曲的であるという性質はgeneric.

次に「双曲力学系から最も離れた状況」であるホモリニック接触の定義を与える．$p \in \mathrm{Fix}(f^n)$を双曲周期点，$T_pM = E^s \oplus E^u$をpにおける双曲分解とする．pの安定集合$W^s(p)$, 不安定集合$W^u(p)$を次で定める．

$$
\begin{aligned}
W^s(p) &= \{x \in M \mid d(f^{kn}(x), p) \to 0\,(k \to +\infty)\},\\
W^u(p) &= \{x \in M \mid d(f^{kn}(x), p) \to 0\,(k \to -\infty)\}.
\end{aligned}
$$

$(W^s(p) \cap W^u(p)) \setminus \{p\}$に属する点を$p$のホモクリニック点と言う．安定多様体定理([Theorem 10.1 in Chapter V][17])により，単射なC^r級写像$\iota^s : E^s \to M$, $\iota^u : E^u \to M$で，$\iota^s(E^s) = W^s(p)$, $\iota^u(E^u) = W^u(p)$となるものがあることが知られている．特に，ホモクリニック点$q \in (W^s(p) \cap W^u(p)) \setminus \{p\}$では$W^s(p)$と$W^u(p)$の接空間$T_qW^s(p)$と$T_qW^u(p)$が定まり，$\dim T_qW^s(p) + \dim T_qW^u(p) = \dim M$となる．$T_qM = T_qW^s(p) \oplus T_qW^u(p)$であるとき，$q$を横断的ホモクリニック点といい，そうでないとき，双曲周期点pはqでホモクリニック接触を起こしているという．ホモクリニック点は$\Omega(f)$に含まれることから[5]，ホモクリニック接触が起きている場合には$\Omega(f)$は双曲集合になりえないことがわかる．

ある双曲周期点がホモクリニック接触を起こしているような$\mathrm{Diff}^r(M)$の元全体を$\mathcal{HT}^r(M)$で表わす．また，位相空間Xの部分集合Yの内点集合を$\mathrm{Int}\,Y$で，閉包を$\overline{Y}$で表わす．$\mathrm{Int}\,\overline{\mathcal{HT}^r(M)}$をNewhouse領域と呼ぶ．

定理 5.2 (Newhouse [15])**.** $\dim M = 2$かつ$r \geq 2$の場合，$\mathrm{Int}\,\overline{\mathcal{HT}^r(M)} \neq \emptyset$. [6]

[4] ここではC^r級微分同相の場合について定義するがC^r級写像の場合でも同様である

[5] Inclination Lemma [17, Theorem 11.1 in Chapter V] (λ-Lemmaとも言う)の帰結.

[6] $\dim M \geq 3$かつ$r \geq 1$の場合の同様の結果はAbraham-Smale[1], Simon [16]で示されている．

Kaloshin は Newhouse 領域では generic には周期点の数が急速に増大することを示した．

定理 5.3 (Kaloshin [9])．M を滑らかな 2 次元閉多様体とする．正の整数の列 $(a_n)_{n\geq 1}$ に対して，generic な $\mathrm{Int}\,\overline{\mathcal{HT}^r(M)}$ の元 f は次をみたす：

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{\#\,\mathrm{Fix}_h(f^n)}{a_n}=\infty.$$

特に，$\mathrm{Int}\,\overline{\mathcal{HT}^r(M)}$ において，generic な f は $\lambda_{\mathrm{Per}}(f)=\infty$ をみたす．

$\mathrm{Fix}_h(f)$ で微分同相写像 f の双曲不動点全体のなす集合を表わす．定理を証明するためには，すべての正の整数 m に対して集合

$$\mathcal{U}_m=\bigcup_{n\geq m}\left\{f\in\mathrm{Int}\,\overline{\mathcal{HT}^r(M)}\mid\#\,\mathrm{Fix}_h(f^n)\geq n\cdot a_n\right\}$$

が $\mathrm{Int}\,\overline{\mathcal{HT}^r(M)}$ の稠密開部分集合であることを見ればよい．$\mathcal{U}_m$ が開集合であることは，双曲不動点の persistence からすぐにわかるので，問題は稠密性である．稠密性の証明は次の 4 つのステップからなる．

1. Gonchenko-Shilnikov-Turaev [8] の摂動を用いて，与えられた $\mathrm{Int}\,\overline{\mathcal{HT}^r(M)}$ の元 f_0 を，双曲周期点 p の $W^s(p)$ と $W^u(p)$ が r 次の接触をする微分同相写像 f_1 で C^r-近似する．

2. f_1 の C^r-摂動 f_2 で，r-flat な非双曲周期点を持つものを構成する．ここで，周期点 $p_*\in\mathrm{Fix}(f_2^n)$ が r-flat であるとは，p_* を含む C^r 級曲線 I で，f^n で局所不変，かつ，ある I のパラメータづけの下で $f^n|_I$ が $t\mapsto t+o(t^r)$ と書けるようなものが存在することを言う．

3. 十分小さい $\delta>0$ を取り，r-flat な周期点 p_* の周りで f_2 を C^r-摂動して，f-不変な C^r 曲線 I_* で $f^n|_{I_*}$ が恒等写像になるものがあるようにする．

4. I_* のあるパラメータづけの下で $f^n|_{I_*}$ が $t\mapsto= t+\epsilon\sin(2\pi n a_n t)$ $(t\in[-1,1])$ となるように f_3 を C^r-摂動する．このとき，摂動で得られた微分同相写像 f_4 は $\mathrm{Fix}_h(f_4^n)\geq n\cdot a_n$ をみたす．

Kaloshin の議論の鍵は $f^n|_{I_*}$ が恒等写像となるような曲線 I_* を作ることである．このアイデアは，次節で見る他の状況での超指数的増大を持つ例の構成でも使われる．

6. 超指数的な増大度 II：最近の結果

系 4.3 や系 4.4 で見たように，滑らかな 1 次元力学系においては $\lambda_{\mathrm{Per}}(f)<\infty$ であるものが generic であり，実解析的な 1 次元力学系では常に $\lambda_{\mathrm{Per}}(f)<\infty$ である．そこで次のような問いを立ててみる．

問題 6.1. (a) 2 次元以上の閉多様体の上の実解析的微分同相写像で，周期点の数の増大度が超指数的なものは存在するか？
(b) 「1 次元に近い」系である区間の上の C^r 反復写像系において，周期点の数の増大度は generic に高々指数的になるか．

最初の問いは最近，筆者により肯定的に解決された．主張を述べるために，$\mathbb{T}^2=\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ 上の実解析的Hamilton微分同相写像を定義しよう．$\Omega=dx\wedge dy$ を $\mathbb{T}^2=\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ 上の標準的なsymplectic形式とする．実解析的写像 $H:\mathbb{T}^2\times[0,1]\to\mathbb{R}$ に対して，$\mathbb{T}^2$ 上の関数 $H_t=H(\cdot,t)$ が定めるHamiltonベクトル場を X_t とする[7]．微分方程式 $\partial_t\Phi(x,t)=X_t(x)$ の初期値 $\Phi(x,0)=x$ をみたす解 $\Phi:\mathbb{T}^2\times[0,1]\to\mathbb{T}^2$ について，$f_H=\Phi(\cdot,1)$ を H が定めるHamilton微分同相写像と言う．微分同相写像 f が実解析的Hamilton微分同相写像であるとは，ある実解析写像の列 $H_1,\dots,H_k:\mathbb{T}^2\times[0,1]\to\mathbb{R}$ に対して，f がそれらが定めるHamilton微分同相写像 $f_{H_1},\dots,f_{H_k}$ の合成で書けていることを言う．Ω に関する $\mathbb{T}^2$ 上の実解析的Hamilton微分同相写像全体のなす集合を $\mathrm{Ham}^\omega(\mathbb{T}^2,\Omega)$ で表わす．この集合は，$\mathbb{T}^2=(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^2$ を含む $(\mathbb{C}/\mathbb{Z})^2$ の開集合から $(\mathbb{C}/\mathbb{Z}^2)$ への正則写像の空間のdirect limitと見なすことができ，これらの空間の広義一様収束位相から定まる自然な位相が入る．

定理 6.2 (浅岡 [2])．$\mathrm{Ham}^\omega(\mathbb{T}^2,\Omega)$ の開部分集合 $\mathcal{U}$ で，すべての正の整数列 $(a_n)_{n\geq 1}$ に対して，

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{\#\,\mathrm{Fix}(f^n)}{a_n}=\infty$$

をみたす $f\in\mathcal{U}$ の全体が $\mathcal{U}$ の稠密部分集合をなすようなものが存在する．

Siegel-Moserの教科書[18, Section 32]にもあるように，$f_0\in\mathrm{Ham}^\omega(\mathbb{T}^2,\Omega)$ が,「twist条件」と呼ばれる非退化条件をみたす実解析的閉曲線を保ち，その上でのダイナミクスが回転角がDiophantus条件[8]をみたす回転であるとき，f_0 に近い $f\in\mathrm{Ham}^\omega(\mathbb{T}^2,\Omega)$ もまた同様な性質を持つある実解析的閉曲線を保存する(このような閉曲線をKAM曲線[9]と言う)．この不変閉曲線の上で有理数回転になるように写像を摂動をしてからKaloshinの議論と同様の方法で十分にたくさんの周期点を作る，というのが証明の基本的なアイデアであるが，実際の証明においては，摂動を実解析的に行わなければならないことや，$\mathrm{Ham}^\omega(\mathbb{T}^2,\Omega)$ がBaire空間でないことなどから来る様々な困難がある．

次に「1次元に近い」系として，次のような1次元反復写像系の周期点の数の増大度を考えてみよう．$\mathcal{E}^r$ で $[0,1]$ からそれ自身への C^r 級写像 f で，$f'>0$ をみたすもの全体のなす $C^r([0,1],[0,1])$ の部分空間を表わす．整数 $k\geq 1$ を固定し，Σ_k^* を $\{1,\dots,k\}$ に値を持つ有限数列の全体のなす集合とする．$\mathcal{E}^r$ の k 個の元の組 $f=(f_1,\dots,f_k)$ と，Σ_k^* の元 $\sigma=(\sigma_1,\dots,\sigma_n)$ に対して，$|\sigma|=n$, $f^\sigma=f_{\sigma_n}\circ\cdots\circ f_{\sigma_1}$ と定める．写像の族 $(f^\sigma)_{\sigma\in\Sigma_k^*}$ を $f=(f_1,\dots,f_k)$ が定める区間 $[0,1]$ 上の反復写像系と言う．$\mathcal{E}^r$ の k 個の元の組全体 $(\mathcal{E}^r)^k$ には $\mathcal{E}^r$ 上の C^r 位相の直積位相が入る．この位相に関して,「n 周期点の個数」

$$N(f,n):=\sum_{\sigma\in\Sigma_k^*,|\sigma|=n}\#\,\mathrm{Fix}(f^\sigma)$$

はgenericにどのような増大度を持つだろうか．多項式近似を考えることで，次のArtin-Mazurの定理の類似は簡単に証明できる．

---

[7] X_t は $\Omega(X_t,\cdot)=dH_t$ をみたすただ一つのベクトル場.

[8] 実数 α に対して，$\inf\{q^{1+\tau}|q\alpha-p|\mid p,q\in\mathbb{Z},q\geq 1\}>0$ となる $\tau>0$ が存在するとき，α はDiophantus条件をみたすと言う．代数的整数である無理数はすべてDiophantus条件をみたす．また，Lebesgue測度に関してほとんどすべての実数はDiophantus条件をみたす.

[9] Kolmogorov-Arnold-Moser.

命題 6.3. $1 \le r \le \infty$ に対して，$(\mathcal{E}^r)^k$ の元 $f = (f_1, \dots, f_k)$ で

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log N(f, n) < \infty$$

となるもの全体は，$(\mathcal{E}^r)^k$ の稠密部分集合をなす．

筆者は篠原，Turaev との共同研究で $k \ge 3$ のときには通常の1次元力学系の場合とは対照的に，超指数的な増大が generic であることを示した．

定理 6.4 (浅岡-篠原-Turaev [3])**.** $k \ge 3$ のとき，$1 \le r \le \infty$ に対して次をみたす $(\mathcal{E}^r)^k$ の開部分集合 $\mathcal{U}$ が存在する：正の整数の列 $(a_n)_{n\ge1}$ に対して，

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{N(f, n)}{a_n} = \infty$$

をみたすものは generic.

証明は，blender とよばれるメカニズムを用いて軌道を繋いで退化した周期点を作り，さらに退化した周期点を繋ぐことでより退化した周期点を作る，という前節でみた Kaloshin の結果で用いられた Gonchenko-Shilnikov-Turaev の摂動 [8] と似た雰囲気の技法を用いて行われる．なお，区間上の実解析的反復写像系で数列 $(N(f, n))_{n\ge1}$ の増大度が超指数的なものが存在するかどうかは興味深い未解決問題である [10]．

ここまでは主に1次元力学系における結果との対比となる結果であるが，双曲力学系との対比となる結果も得られている．M を滑らかな閉多様体，f をその上の C^1 微分同相写像とする．コンパクトな f-不変集合 Λ が部分双曲的であるとは，$TM|_\Lambda$ 上の Df-不変で連続な分解 $TM|_\Lambda = E^s \oplus E^s \oplus E^u$ と定数 $C > 1$, $\alpha > \beta > 1$, $\alpha' > \beta' > 1$ ですべての $n \ge 1$ に対して次をみたすものが存在することを言う [11]：

(a) $v_s \in E^s$ ならば，$\|Df^n v_s\| \le C \exp(-\alpha n)\|v_s\|$.

(b) $v_c \in E^c$ ならば，$C^{-1} \exp(-\beta n)\|v_c\| \le \|Df^n v_c\| \le C \exp(\beta' n)\|v_c\|$.

(c) $v_u \in E^u$ ならば，$\|Df^n v_u\| \ge C^{-1} \exp(\alpha' n)\|v_u\|$.

$\dim E^c = 1$ のときは部分双曲集合はいくつかの面で双曲集合とよく似た振舞いをすることが知られている ([6] などを参照のこと)．しかし，最近，Berger は次の結果を発表した．

定理 6.5 (Berger [5])**.** $1 \le r \le \infty$，$m \ge 3$ とする．$\mathrm{Diff}^r(\mathbb{T}^m)$ の開部分集合 $\mathcal{U}$ で次をみたすものが存在する．

(a) すべての $f \in \mathcal{U}$ について，$\mathbb{T}^m$ は $\dim E^c = 1$ である部分双曲集合.

(b) 正の整数の列 $(a_n)_{n\ge1}$ に対して，

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\#\,\mathrm{Fix}(f^n)}{a_n} = \infty$$

をみたす微分同相写像 f は $\mathcal{U}$ で generic. [12]

[10] 1次元反復写像系は次に述べる部分双曲力学系の雛形としての側面も持っており，この問題は実解析的な部分双曲系の周期点の増大度の問題とも密接に関係していると思われる．

[11] この定義はいくつかある部分双曲性の定義で最も強い条件を課すものである．

[12] 論文では多様体全体での部分双曲性は主張していないが,「底空間」のダイナミクスを Anosov 微分同相写像に取ることでそのように構成することができる．

参考文献

[1] R. Abraham and S. Smale, *Nongenericity of Ω-stability*, Proc. Sympos. Pure Math., **14**, Amer. Math. Soc., Providence, R.I. (1970), pp. 5–8.

[2] M. Asaoka, Abundance of fast growth of the number of periodic points in 2-dimensional area-preserving dynamics. *Comm. Math. Phys.* **356**, no. 1, 1–17 (2017).

[3] M. Asaoka, K. Shinohara, and D. V. Turaev, Degenerate behavior in non-hyperbolic semigroup actions on the interval: fast growth of periodic points and universal dynamics. *Math. Ann.* **368**, no. 3–4, 1277–1309 (2017).

[4] V. Baladi, Periodic orbits and dynamical spectra. *Ergodic Theory Dynam. Systems* **18** (1998), no. 2, 255–292.

[5] P. Berger, Generic family displaying robustly a fast growth of the number of periodic points, arXiv: 1701.02393.

[6] C. Bonatti, L. Díaz, and M. Viana, *Dynamics Beyond Uniform Hyperbolicity*, Springer, Berlin, 2004.

[7] R. Bowen, Periodic points and measures for Axiom A diffeomorphisms. Trans. Amer. Math. Soc. **154** (1971), 377–397.

[8] S. V. Gonchenko, L. P. Shilnikov and D. V. Turaev, *On models with non-rough Poincare homoclinic curves*, Physica D **62** (1993), 1–14.

[9] V. Y. Kaloshin, Generic diffeomorphisms with superexponential growth of number of periodic orbits. *Comm. Math. Phys.* **211** (2000), no. 1, 253–271.

[10] V. Kaloshin and O. S. Kozlovski, *A C^r unimodal map with an arbitrary fast growth of the number of periodi points*, Ergodic Theory Dynam. Systems **32** (2012), No. 1, 159–165.

[11] A. Katok and B. Hasselblatt, Introduction to the modern theory of dynamical systems. Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 54. *Cambridge University Press, Cambridge*, 1995.

[12] G. A. Margulis, On some aspects of the theory of Anosov systems. With a survey by Richard Sharp: Periodic orbits of hyperbolic flows. Translated from the Russian by Valentina Vladimirovna Szulikowska. Springer Monographs in Mathematics. *Springer-Verlag, Berlin*, 2004.

[13] M. Martens, W. de Melo and S. van Strien, *Julia-Fatou-Sullivan theory for real one-dimensional dynamics.* Acta Math., **168** (1992), 273–318.

[14] M. Misiurewicz, W. Szlenk, *Entropy of piecewise monotone mappings.* Studia Math. **67** (1980), no. 1, 45–63.

[15] S. Newhouse, *The abundance of wild hyperbolic sets and non-smooth stable sets for diffeomorphisms.* Publ. Math. IHES (1979) 50, 101–151.

[16] C. P. Simon, *A 3-dimensional Abraham-Smale example.* Proc. Amer. Math. Soc. **34** (1972), 629–630.

[17] C. Robinson, Dynamical systems. Stability, symbolic dynamics, and chaos. Second edition. Studies in Advanced Mathematics. CRC Press, Boca Raton, FL, 1999.

[18] C. L. Siegel and J. K. Moser, Lectures on Celestial Mechanics. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, **187**. Springer-Verlag, New York-Heidelberg (1971).

[19] P. Walters, An introduction to ergodic theory. Graduate Texts in Mathematics, **79**. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1982. ix+250 pp.