3次元トポロジーのべき零的研究

野坂 武史 (Takefumi Nosaka) [1]

東京工業大学 理学院 数学系

概 要

本稿の目標は, 最近得られた3次元トポロジーに現れるべき零的な研究を紹介することである. まず冪零的な研究をするうえで, 基本事項などを解説する. その後に 筆者の結果として, 絡み目の Orr-Milnor 不変量やマッセイ積の話やべき零版の Alexander 多項式との関連も述べる.

1 序

2と3次元トポロジーでは, 基本群がもっとも強力な量になっている. 写像類群や幾何化定理により, 基本群の重要性は裏打ちされている. しかしながら, 基本群 (+幾何構造) から定量的量を取り出す事はそれほど簡単ではなく, 多くの研究法がり, 多くの結果や例がある.

そういった中, 筆者はここ数年, 3次元の基本群に関して, べき零商をとったものの研究に取り込んでいる. そもそも群に関し, べき零的な研究の歴史は長い. Hopf, Magnus, Hall, Chen, Lyndon など著名な数学者から始まり (詳しくは [MKS] など参照), 色々な研究手法が編み出されている ([MP] も参照). 例えば, マグナス展開, Chen の反復積分, べき零版の有理ホモトピー論などがある. その為, トポロジーへ応用可能なべき零的研究の方法は揃っていると思える.

そこで本稿は, これまでの3次元トポロジーのべき零的研究を説明し, そして近年の筆者の結果を紹介する. ただし講演依頼の際に、本稿の内容として, 「べき単的マグナス展開」や「ミルナー不変量」を中心に頼まれたので, その様に進める.

本稿は以下の順で進めていく. まず節2ではべき零的な基本事項を述べる. 節3では, べき単的マグナス展開を紹介し, べき零群がほぼ行列で扱えることを論ずる. 節4では, その応用例としてミルナー不変量の結果を紹介し, 節5では, Orr-Milnor 不変量について話す. 節6では, べき零版の高次のアレクサンダー多項式について述べる. なお、雑誌『数学』の論説 [野坂] を執筆中で, そちらに詳細を回している箇所も多い. 当論説もご高覧頂ければと思います.

2 トポロジーで扱うべき零群の諸性質

まず本稿で扱う用語を確定しておこう. G を群としたとき, $G_1 := G$ とし, G_2 を交換子群 $[G, G]$ として, 帰納的に $G_k := [G, G_k]$ とする. すると次の降下列を得る:

$$G = G_1 \supset G_2 \supset \cdots \supset G_{k-1} \supset G_k \supset \cdots .$$

G が**べき零**であるとは, ある m があって $G_m = 0$ となる事であった. また $\cap_{m\geq 0} G_m = 0$ となるとき, **被約べき零** (residually nilpotent) というのであった. 例えば, 自由群は被約べき零である. (被約) べき零群は色々な性質が知られている (例えば, 本 [MP] など参照).

[1]E-mail address: nosaka@math.teitech.ac.jp

本稿ではトポロジーが主題である為, 扱いやすい性質に限定して説明しよう. まず (被約) べき零群の同型類は, アーベル化と 2 次群ホモロジー群でほぼ決定されることが知られている：

定理 2.1 (Stalling の定理.)**.** $f: G \to K$ を群準同型とする. アーベル化の誘導射 $f_*: G_{\mathrm{ab}} \to K_{\mathrm{ab}}$ が同型で, 2 次ホモロジー群上で $f_*: H_2(G;\mathbb{Z}) \to H_2(K;\mathbb{Z})$ が全射だと仮定する.

この時, 任意の $q \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ で, べき零商の射 $f: G/G_q \to K/K_q$ は同型である.

証明は Hillman の本 [Hil] の一章に (5 完全列を用い) 数行で証明される.

この定理は, 応用例が多いが, 次の様に結び目理論への応用もある. X を 3 次元閉多様体とし, $H_*(X;\mathbb{Z}) \cong H_*(S^3;\mathbb{Z})$ とする. $L: \sqcup^q (S^1 \times D^2) \to X$ を埋込とし (つまり絡み目), その補空間 $X \setminus \mathrm{Im}(L)$ を E_L とする. 基点を曖昧にするが $L((* \times \partial D^2)_\ell) \in \pi_1(E_L)$ を**経線**といい $\mathfrak{m}_\ell$ とかく. 他方で $L((S^1 \times *)_\ell) \in \pi_1(E_L)$ を**緯線**といい $\mathfrak{l}_\ell$ とかく (図 1 参照. ここで基点の取り方を曖昧にしたが, 右図の様にすればよい). すると $\pi_1(Y)$ のべき零商群は綺麗な表示を持つ.

命題 2.2 ([M2, Tu])**.** べき零商 $\pi_1(E_L)/\pi_1(E_L)_m$ は次の様な群表示を持つ*:*

$$\Big\langle \ x_1, \dots, x_q \ \Big| \ [x_\ell, w_\ell^{(m)}] = 1 \text{ for } \ell \leq q, \quad F_m \ \Big\rangle, \tag{1}$$

ここで 語 x_i と $w_j^{(m)}$ はそれぞれ, j-番目経線と緯線の代表元を表す. また右辺内の F は $x_1, \dots, x_q$ で生成される自由群を意味し, F_m は中心降下列の m 番目を意味する.

これも Hillman の本 [Hil] の一章にあるように数行で証明されるが省略する.

結論を述べると, べき零的な情報は, 自由群のべき零商 F/F_m と緯線 (+基本類) でだいたい尽きている事が解る. 以下, それらについて順々に述べる.

図 1: 左図は, 経線と緯線の例. 右図は, 基点とのつなげかた.

3 自由群のべき零商と交換子, べき単的マグナス展開

べき零群の利点の一つとして, 定量的な扱いがしやすい事も挙げられる. 本節では, Gupta-Gupta [GG] の結果「任意のべき零群がべき単行列への忠実表現として書ける」 に着目する. 但し, 簡単の為, 自由群の場合に制限し, その利点を概観する.

用語を準備しよう. F を階数 q の自由群とし, $x_1, \dots, x_q$ を生成元とする. そして, Q_m で商群 $\Gamma_{m-1}F/\Gamma_m F$ とする. すると次の中心拡大を得る：

$$0 \longrightarrow Q_m \longrightarrow F/\Gamma_m F \xrightarrow{p_{m-1}} F/\Gamma_{m-1}F \longrightarrow 0 \qquad \text{(central extension)}. \tag{2}$$

Gupta-Gupta[GG] によるべき単的 Magnus 埋込みを記述しよう. この埋込みとは, 一言で言えば, $F/\Gamma_m F$ の或る忠実な線形表現である. ここで, 係数は可換多項式環 $\mathbb{Z}[\lambda_i^{(j)}]$ であ

る. 但し, 可換な不定元 $\lambda_i^{(j)}$ は $i \in \{1, 2, \ldots, m-1\}$, $j \in \{1, \ldots, q\}$ を走っている (即ち, 変数の個数は $qm - q$). そこで, **べき単的 Magnus 埋込み**とは

$$\Upsilon_m : F \longrightarrow GL_m(\Omega_m)$$

を次で定義された準同形とする:

$$\Upsilon_m(x_j) = \begin{pmatrix} 1 & \lambda_1^{(j)} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \lambda_2^{(j)} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & \lambda_{m-1}^{(j)} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

これは次のような, 面白い性質をもつ (cf. べき零群の例で, べき単行列群がよくあげられるが, 以下の性質はその一端である). ここで I_m を単位行列とする.

(i) y を k 番目交換子 $\Gamma_k F$ の元とすると, $\Upsilon_m(y) - I_m$ は右上三角行列の形をし, $(1,2)$-, $(1,3)$- , $\ldots, (1, k-1)$-までの成分はゼロである.

(ii) 特に, m 番目交換子 $\Gamma_m F$ の像は, $\Upsilon_m(\Gamma_m F) = \{I_m\}$ となる.

(iii) [GG] で知られることに, その商射 $F/\Gamma_m F \to GL_m(\Omega_m)$ は単射準同形である.

(iv) 中心に制限した像 $\Upsilon_m(Q_m)$ は, 行列 $(1, m)$-成分のみに現れる (だから, 中心の中の元でどうかが判定しやすい).

その中心 $\Upsilon_m(Q_m)$ について言及する. それは自由加群であり, さらに Hall 基底という基底まで知られる. ここではマグナス展開による [CFL] の定式化を (結果だけ) 紹介する. その為に, 列の集合 $\bigcup_{s=1}^{\infty}\{1, 2, \ldots, q\}^s$ に辞書的順序を入れる. 列 $I = i_1 i_2 \cdots i_k$ が **standard** であるとは, 全ての $2 \leq s \leq k$ に対し不等式 $I < i_s i_{s+1} \cdots i_k$ が成立つ時をいう ([CFL] に他の同値な定義がある). 例えば長さ k の standard な列の集合を $\mathfrak{U}_k$ とかく.

定理 3.1 ([CFL, 定理 3.5 & 3.9]). $\{a\lambda_1^{(i_1)} \cdots \lambda_k^{i_k} \in \Omega_m \mid a \in \mathbb{Z},\ i_1 \cdots i_k \in \mathfrak{U}_k\ \}$ で生成される $\mathbb{Z}$ 部分加群 U を考える. $\pi : \Omega_m \to U$ を $\mathbb{Z}$-準同型の射影とする. このとき, 合成 $\pi \circ (\Upsilon_k$ の $(1, k+1)$-成分 $)$ は加群同型 $F_k/F_{k+1} \cong U$ を与える.

特に, 位数 $|\mathfrak{U}_k|$ は F_k/F_{k+1} のランクと等しい *([Hall] の結果)*.

4 ミルナー不変量の非自明初項

ミルナー不変量とは, 50 年代に, Milnor[M1, M2] により定義され、高次の絡み目数とも呼ばれる. それは Milnor 不変量と呼ばれ, 長く研究され, 位相的側面も理解されている. ([Hil, HM, IO, St] など参照). しかし, 任意の絡み目に対する当不変量は計算が難しいように思われた. 実際, 原論文の定義では, 非可換的な緯線の扱いが, 非常に困難に見えたからである (節 4 で 5 つ難点を詳述する). そこで筆者と小谷 久寿氏 [KN] は, Milnor 不変量の図的計算法を与えた (定理 4.2) ので，本節ではその紹介をする.

4.1 設定

ミルナー不変量を定義するために, 必要な設定事項を述べる.
設定として, 結び目論の用語も以下の様に確定する.

- $L \subset S^3$ を, q-成分の絡み目とする.
- 経線-緯線のペア $(\mathfrak{m}_\ell, \mathfrak{l}_\ell)$ を, preferred で固定する (ここで $\ell \leq q$)[2].
- $f_2 : \pi_1(S^3 \setminus L) \to F/\Gamma_2 F = \mathbb{Z}^q$ をアーベル化 Ab とする.

さらに 自由群 F と、次の中心拡大を思い起こそう：

$$0 \longrightarrow Q_m \longrightarrow F/\Gamma_m F \xrightarrow{p_{m-1}} F/\Gamma_{m-1}F \longrightarrow 0 \qquad \text{(central extension)}. \tag{3}$$

そして, この拡大を用い, $m \in \mathbb{N}$ に対して, 次の仮定を定義する:

- **仮定** $\mathcal{A}_m$. ${}^\forall k \leq m$ に対し, 準同形 $f_k : \pi_1(S^3 \setminus L) \to F/\Gamma_k F$ があり可換図式を満たす：

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(S^3 \setminus L) \arrow[d, "f_2"'] \arrow[dr, "f_3"] \arrow[drr, "f_4"] \arrow[drrr, phantom, "\cdots\cdots"] \arrow[drrrr, "f_m"] & & & & \\
F/\Gamma_2 F & F/\Gamma_3 F \arrow[l, "p_2"] & F/\Gamma_4 F \arrow[l, "p_3"] & \cdots\cdots \arrow[l] & F/\Gamma_m F. \arrow[l, "p_{m-1}"]
\end{tikzcd}$$

ここで幾つか注意を述べる．まず, 他の拡大 f'_m が合った場合, f_m と f'_m は共役で等価である (実際, 中心性から容易に確かめられる)．また, $[x_i] \in F/\Gamma_m F$ の中心化部分群は, $\{x_i^k\}_{k\in\mathbb{Z}} \times Q_m$ となる事が知られる[3]．であるため, f_m は全ての preferred 緯線 $\mathfrak{l}_\ell$ を中心 Q_m に送ると思ってよい (ここで $f_m(\mathfrak{m}_\ell)^{\pm 1}$ 倍は無視する).

4.2 ミルナー不変量の定義と難点と結果

ミルナー不変量の非自明初項について復習し, その後, 難点を列挙し, 結果を述べる.
まず以上の設定下で不変量を定義しよう．つまり, 絡み目 L の**ミルナー不変量の非自明初項**とは, 次の q-tuple で定義される:

$$\big(f_m(\mathfrak{l}_1), \dots, f_m(\mathfrak{l}_q)\big) \in (Q_m)^q.$$

ミルナーの示した事に, この不変量は $\mathcal{A}_{m+1}$ のリフトの完全障碍である．明確には,

命題 4.1 ([M2])**.** $\mathcal{A}_m$ を仮定する．このとき, f_m がリフト $f_{m+1} : \pi_1(S^3 \setminus L) \to F/\Gamma_{m+1}F$ を許容する必要十分条件は, 全ての当 m 次初項が 0 である, つまり, ${}^\forall \ell \leq q,\ \ f_m(\mathfrak{l}_\ell) = 0 \in Q_m$.

定義はこう簡単であり, 既存の研究は沢山あるものの, 具体的な計算は難しいと思われた．ここでは次の 5 点を挙げよう:

(I) 商群 $F/\Gamma_m F$ を定量的に記述すべき点 (しかし前節のべき単的マグナス展開で克服できる).

---

[2] ここで, preferred とは, ${}^\forall \ell$ に対し, $\pi_1(S^3 \setminus L \xrightarrow{\text{アーベル化}} \mathbb{Z}^q \xrightarrow{\ell\text{-番目射影}}) \mathbb{Z}$ が $\mathfrak{l}_\ell$ を 0 に写すとする．ここでアーベル化は, 経線 $\mathfrak{m}_\iota$ を $\delta_{\ell,i}$ に写す写像である.

[3] なお, この証明は後のべき単的マグナス展開を用いれば, m の帰納法から容易に示せる.

(II) 次に, 緯線 $\mathfrak{l}_\ell$ の群表示も必要である. Milnor [M2, §3] ([Hil, Chapters 1 & 11–14] も参照) の解決策は, $f_m(\mathfrak{l}_\ell)$ のみで $\mathfrak{l}_\ell$ を記述する手だった (命題2.2の事). しかし, これは m と $q = \#L$ に応じ指数関数的にハードになる.

(III) あまつさえ, 準同形 f_m たちを, 非可換群 $F/\Gamma_m F$ 上に記述する必要がある.

(IV) さらに, Milnor [M2] の原論文では, 或る列 $I \subset \{1, 2, \dots, q\}^m$ に対し定義された. しかし, この方法はその列と不変量の関係が非常に複雑であった.

(V) 加えて, 高次の Milnor 不変量に関して, 原論文の定義が込入って代数的すぎる感がある ([M2, Hil, St] 参照). そして, 高次不変量がゼロになる場合もありえる.

しかしこの様な難点もあるが, (曖昧な陳述だが) 次の結果を得た.

定理 4.2 ([KN])**.** *$D \subset \mathbb{R}^2$ を L の絡み目図式とする.*
(1) べき単的マグナス展開を用いて, 準同型 f_m を図式的に記述する方法を与えた.
(2) さらに, ミルナー不変量も図式的に記述する方法を与えた.
(3) そして高次版の ミルナー不変量も精密化し, 図式計算法を与えた.

ここで, 環 Ω_m が可換より, この計算法は Mathematica のようなプログラムと相性がよい. 実際, 計算機にかけて多くのミルナー不変量の値を与える事が出来た.

なお, この証明のアイディアは, 「命題 4.1 に依れば, ミルナー不変量はリフトの完全障碍であった. だから障害類を記述すればミルナー不変量と等価なはず」である (図的説明は講演で述べる.). 詳細は論説 [野坂] に記したので, そちらをご笑覧ください.

5　３次基本類との関連

5.1　Orr 不変量—-べき零的な基本類

さらに節 4.1 の様に, べき零的な設定, つまり $\mathcal{A}_{m+1}$ を仮定して考察を進めよう (但し次数に注意). ここで絡み目補空間の相対ホモロジーを思い出そう:

$$H_3(S^3 \setminus L, \partial(S^3 \setminus L)) \cong \mathbb{Z}, \qquad H_2(S^3 \setminus L, \partial(S^3 \setminus L)) \cong \mathbb{Z}^q .$$

前者は相対基本 3-類で, 後者は境界のトーラスの成分ごとで生成されることが知られている. それらの f_m による押出を考えるのは, 自然と思われる. ミルナー不変量は, f_m による H_2 の押出として, 見る事が出来る.

なのでこの節では, 基本類の押出を考えてみよう. 厳密には, 次の様にする. まず準同型 f_m を取り, $G = F/\Gamma_m F$ とし $K = \sqcup^q \mathbb{Z}$ とする. すると命題 4.1 から $f_m(\mathfrak{l}_\ell) = 0$ より, 押出 $(f_m)_*[Y; \partial Y]$ は相対群ホモロジー $H_3^{\mathrm{gr}}(F/\Gamma_m F, \ \sqcup^q \mathbb{Z}; \mathbb{Z})$ に入る. この押出は Orr[O] が定義した homotopy 不変量のホモロジー reduction というものに一致する (この定義の動機は [O, IO] を参照).

ここで不変量の値域について注記する. その値域である相対群ホモロジーは $H_3^{\mathrm{gr}}(F/\Gamma_m F; \mathbb{Z})$ に同型だが, これは Orr-Igusa により完全に決定されている.

定理 5.1 ([IO]). $H_2^{\mathrm{gr}}(F/\Gamma_h F) = Q_h$ の階数 $N_h \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ と書くとすると, 次の同型が成立つ.

$$H_3^{\mathrm{gr}}(K(F/\Gamma_k F, 1); \mathbb{Z}) \cong \bigoplus_{h=k}^{2k-2} \mathbb{Z}^{qN_h - N_{h+1}} .$$

この同型は, ある Lie ホモロジーに帰着し, その間のスペクトル系列の計算で行われる. その為, 計算したい押出 $(f_m)_*[Y; \partial Y]$ が右辺のどこに値を持つか (工夫なしには) 分からない. この故, Orr 不変量の計算例は少なかったと思われる. またこの不変量は経線 $\mathfrak{m}_\ell$ の選び方に依存していて, 正しくは絡み目 L の不変量ではなく, L と $\mathfrak{m}_\ell$ の組の不変量である.

5.2 String 絡み目からの考察

そこで, 筆者は以下の様に, string 絡み目のミルナー不変量に帰着し, 計算手法を与えた. 以下, これを陳述する.

まず string 絡み目を復習する (むしろ図 2 の説明である). I を閉区間 $[0,1]$ とし, $q \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を固定する. そこで **(q-成分) string 絡み目**とは, 向付きアーク $A_1, \ldots, A_q$ から立方体 I^3 への滑らかな埋込みで, 境界条件 $A_i = \{p_i, q_i\}$ を満たすものである, ここで $p_i = (j/2q, 0, 0)$ と $q_i = (j/2q, 0, 1) \in I^3$ とした. また**純くみひも**とは, string 絡み目で合成 $I = A_i \to I^3 \xrightarrow{z\text{-軸の射影}} I$ が恒等写像であるものをいう. 加えて, $T = \{A_i\}$ が string 絡み目が与えられた時, S^3 内の絡み目 $L = \{L_1, \ldots, L_q\}$ が $L_i = A_i \cup a_i$ によって定義される, ここで a_i は $S^3 \setminus L$ 内で p_i と q_i とをつなぐアークである. この絡み目は T の**閉包**と呼ばれ, $\overline{T}$ と書かれる; 図 2 参照.

定理を述べる為, string 絡み目の緯線を考察しよう ([HM, L1] 参照). String 絡み目 T に対し, $y_j \in \pi_1([0,1]^3 \setminus T)$ を $\{(j/2q, 0, 1)\}$ を一周するループとする; すると, 補足空間 $[0,1]^3 \setminus T$ に関しては, 仮定 $\mathcal{A}_m$ と違い, いつもリフトが存在する事が知られている:

命題 5.2 ([M2, L1]). 任意の m に対し, 準同形 $f_m : \pi_1([0,1]^3 \setminus T) \to F/\Gamma_m F$ があり次の可換図式を満たす：

$$\begin{tikzcd}
\pi_1([0,1]^3 \setminus T) \arrow[d, "f_2"'] \arrow[dr, "f_3"] \arrow[drrr, "f_m"] \arrow[drrrrr] & & \cdots\cdots & & \cdots\cdots & \\
F/\Gamma_2 F & F/\Gamma_3 F \arrow[l, "p_2"] & \cdots\cdots \arrow[l] & F/\Gamma_m F \arrow[l, "p_{m-1}"] & \cdots\cdots \arrow[l] &
\end{tikzcd} .$$

証明. F を $y_1, \ldots, y_n$ で生成する自由群とすると, 準同型 $\iota : F \to \pi_1([0,1]^3 \setminus T)$ を得る. 全射 $0 \cong H_2([0,1]^3 \setminus T) \to H_2^{\mathrm{gr}}(\pi_1([0,1]^3 \setminus T))$ に着目すれば, Stalling の定理 2.1 を満たし, 同型 $\iota_m : F/\Gamma_m F \to \pi_1([0,1]^3 \setminus T)/\Gamma_m \pi_1([0,1]^3 \setminus T)$ を得る. あとは f_m を ι_m の逆射として設定すればよい. □

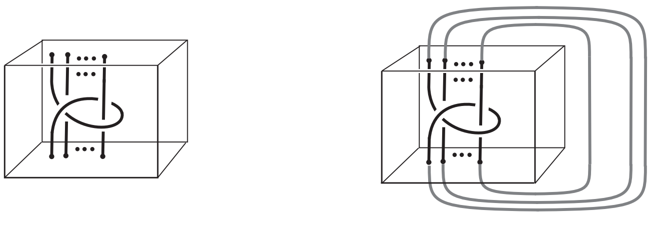

図 2: string 絡み目と, S^3 内での閉包の模式図.

命題 4.1 と違い, 緯線はリフトの障害と関係なさそうであるが, もうすこし緯線を考えてみよう. つまり, T の ℓ-番目成分に平行にそったループを $\lambda_\ell \in \pi_1([0,1]^3 \setminus T)$ と書くことにする. この λ_ℓ は T **の ℓ-番目の緯線**という. そして, この m 次べき零への商 $\phi_*^{-1}(\lambda_\ell) \in F/\Gamma_m F$ は T **の m 次 μ-不変量**と呼ぼう. 気づきたい事に, 閉包 $\overline{T}$ が仮定 $\mathcal{A}_{k+1}$(節 4 参照) を満たす必要十分条件は, λ_j が $\Gamma_k F$ に入る事である. この際に, $\lambda_j = f_{k+1}(\mathfrak{l}_j) \in \Gamma_k F/\Gamma_{k+1}F$ modulo $\Gamma_{k+1}F$ に注意しておこう.

その様な string 絡み目 T に対し, μ-不変量 $\lambda_j \in \Gamma_k F$ を modulo $\Gamma_{2k-1}F$ で考えてみよう (つまり $m = 2k-1$ の場合を考える). ここで商 $\Gamma_k F/\Gamma_{2k-1}F$ がアーベルな事に気づこう ($\because$ $[\Gamma_k F, \Gamma_k F] \subset \Gamma_{2k}F \subset \Gamma_{2k-1}F$). さらに等式

$$[x_1, \lambda_1][x_2, \lambda_2] \cdots [x_q, \lambda_q] = 1 \in \pi_1([0,1]^3 \setminus T) \tag{4}$$

も言及しておく. これは左辺の基本群の元がほどける事による. なので, 和

$$\sum_{j:\ 1 \le k \le q} (x_j \otimes \lambda_j) \in \mathbb{Z}^q \otimes_{\mathbb{Z}} \Gamma_k F/\Gamma_{2k-1}F \qquad \text{modulo } \Gamma_{2k-1}F \tag{5}$$

は次の交換子の Kernel に入っていることが解る.

$$[\bullet, \bullet] : F/\Gamma_2 F \otimes \Gamma_k F/\Gamma_{2k-1}F \longrightarrow \Gamma_{k+1}F/\Gamma_{2k}F; \quad x \otimes y \longmapsto xyx^{-1}y^{-1}.$$

ここで気づきたい事に, この Kernel の階数は定理 5.1 の右辺の階数と同じである. なので, Milnor と Orr 不変量が等価な予感がする ([IO, HM, Cha] では, その等価性がほぼ示唆されている).

5.3 定理

そこで筆者は Milnor と Orr 不変量が一致する事を明示しておいた.

定理 5.3 ([N2])**.** $\mathbb{Q}$-ベクトル同型写像

$$\Phi \circ \eta^{-1} : \mathbb{Q} \otimes \mathrm{Ker}([\bullet, \bullet]) \xrightarrow{\sim} H_3(F/\Gamma_k F; \mathbb{Q}),$$

があって, それは閉包 $\overline{T}$ が仮定 $\mathcal{A}_{k+1}$ を満たすストリング絡み目 T に対し次式を満たす.

$$\Phi \circ \eta^{-1}\big((x_1 \otimes \lambda_1) + \cdots + (x_q \otimes \lambda_q)\big) = (f_m)_*([S^3 \setminus \overline{T}, \partial(S^3 \setminus \overline{T})]). \tag{6}$$

これにより, $\overline{T}$ の Orr 不変量は計算可能になる. 実際, 次の手順を取ればよい. まず一般論として, 両辺に同じ不変量値をもつ純組み紐 σ_T が存在する (事が構成的に知られている). すると σ_T の緯線は定義より $x_1, \dots, x_q$ で簡単に記述できる. なので, (6) の左辺が計算出来て, よって右辺が解ったことになる. そして, 冪単的なマグナス展開を使うと, 左辺の計算結果を定量的に見れる事になる.

ちなみにであるが, 筆者は次の 3 事項も示せたので, 紹介したい.

(i) まず, Orr 不変量の位相的意味をひとつ与えた. 実際, コホモロジー $H^3(F/\Gamma_m F; \mathbb{Z})$ が或るマッセイ積たちを基底に持つことを示した [N4] . である為, Orr 不変量は補空間 $S^3 \setminus \overline{T}$ のマッセイ積構造を反映している事になる.

(ii) もう一つは, 次数の格上げである. 以上の結果は次数が $2k-2$ のミルナー不変量であったが, 次数を $2k-1$ まで挙げる事が出来た. 正しく述べると, $2k-1$ まで上げた物が, オリジナルの Orr 不変量 (ホモトピー群を値に持つ) に等価となる事を示した.

(iii) 最後に, Kontsevich 不変量に関してである. それは量子不変量を普遍的に捉える不変量で, 耳にした方も多いと思う. 但し, グラフに値を持つため, 位相的意味がつけづらかった. そこで筆者 [N2] は「Kontsevich 不変量のツリーパート (次数 d が $k \leq d < 2k$ の範囲) が, Orr 不変量とがアポステリオリに等価である事」を示しておいた. 図でまとめると, 以下となる:

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge]
\boxed{\begin{array}{c}\text{Orr invariant}\\ \text{of degree } k\end{array}} \arrow[r, equal, "\text{(iii)}"] & \boxed{\begin{array}{c}\text{Tree-reduced Kontsevich}\\ \text{invariant of degree} < 2k\end{array}} \arrow[r, equal, "\text{Theorem 5.3}"] \arrow[r, shift right=2ex, "\text{Recover via}"', "\text{HOMFLYPT [MY]}"'] & \boxed{\begin{array}{c}\text{Milnor } \mu\text{-invariant}\\ \text{of degree} < 2k\end{array}}
\end{tikzcd}$$

6 結び目のべき零版の高次 Alexander 多項式

さて話題が変わるが結び目の場合[4](即ち, 連結成分は 1) の際に, べき零的研究はどうなるだろうか？まず注意したい事に, 結び目群のべき零商は (命題 4 より) 自明群である. なのでミルナー不変量と全く同じ設定は, 無意味である.

そこで「べき零」を「可解」に置き換え, 理論構築する方法もあり, それは Cochran-Orr-Teichner[COT] 理論と呼ばれる (非可換むすび目理論 [Coc] も参照). 可解群のハイテクが使われ大変高尚な理論である. だが, 難解で技術的な部分も多く, 計算例に乏しい短所もあった.

そこで筆者 [N4] は次の様な設定を考えてみた. まずアーベル化 $\pi_1(S^3 \setminus K) \to \mathbb{Z}$ をとり, その核 (交換子群) を π'_K と書くことにする. そこで, π'_K の中心降下列を考えよう, つまり

$$\pi_K^{(2)} := [\pi'_K, \pi'_K] \supset \pi_K^{(3)} := [[\pi'_K, \pi'_K], \pi'_K] \supset \cdots \supset \pi_K^{(n+1)} := [\pi_K^{(n)}, \pi'_K] \supset \cdots . \tag{7}$$

アイディアは, ＣＯＴ理論に平行な理論を構築しようというものである. 可解では成功しているので, 同様の議論がべき零で上手くいくよう期待しても良いだろう.

[COT] の真似事に感じるが, この (7) の設定の狙いは, 3 つほどある.

- 同導降下列は割り方が強く, 計算可能な量を見出しづらかったが, (7) はそれを克服できそうな点. 実際, 中心降下列の中心 (の有理化) は有限生成になりやすいので, 定量的な情報が取りやすく, それも $\pi_K^{(n)}$ への $\mathbb{Z}$ 作用も記述できる.
- π'_K は被約べき零になる場合が多々ある点 (例えばファイバー結び目[5] がある).
- $\mathbb{Z}$-同変の有限型不変量の様に, 無限巡回被覆のべき零情報が研究されている点. 実際, (7) はそういった関係性がありそうな降下列である.

この狙いが何処まで上手く進むかは未知だが, その上手く進めた一端 (高次アレクサンダー多項式) を紹介する.

[4] この節の話は, ベッチ数 1 のコンパクト三次元多様体にも拡張できるが, 簡単の為, 本節では結び目の設定で説明する.

[5] ここで結び目 $S^3 \setminus K$ がファイバーであるとは, 或る穴付き閉曲面 $\Sigma_{g,1}$ があって, ファイバー束 $\Sigma_{g,1} \to S^3 \setminus K \to S^1$ が取れる時をいう

6.1 高次アレクサンダー多項式と, その性質

高次アレクサンダー多項式を紹介するにあたり, まず係数環を設定する. 商群の群環 $\mathbb{Z}[\pi_1(S^3\setminus K)/\pi_K^{(n)}]$ と, その部分環 $\mathbb{Z}[\pi_K'/\pi_K^{(n)}]$ を考える. この $\mathbb{Z}[\pi_K'/\pi_K^{(n)}]$ は Ore domain というものになる事が確かめられ, よって環の局所化が設定できる. 今書いた群環たちを局所化し, 新しい記号で書いておこう:

$$\mathbb{K}_n := (\mathbb{Z}[\pi_K'/\pi_K^{(n)}]\setminus 0)^{-1}\,\mathbb{Z}[\pi_K'/\pi_K^{(n)}], \quad R_n := (\mathbb{Z}[\pi_K'/\pi_K^{(n)}]\setminus 0)^{-1}\,\mathbb{Z}[\pi_1(S^3\setminus K)/\pi_K^{(n)}]$$

すると, $\mathbb{K}_n$ は非可換体であり, R_n は (非可換の意味の) ＰＩＤになる事が確かめられる. 実際, 捩れ多項式環への環同型 $R_n\cong\mathbb{K}_n[\tau^{\pm1}]$ が作れる (但しこの同型は, τ の取り方, つまり経線の取り方に依存する).

次に, 商射 $\pi_1(S^3\setminus K)\to\pi_1(S^3\setminus K)/\pi_K^{(n)}$ を取る事で, R_n を局所系係数と思おう. すると, その 1 次ホモロジーを考えると次が確かめられる:

命題 6.1 ([COT, 節 4] の部分的結果)**.** *$H_1(S^3\setminus K;R_n)$ は捩れ R_n 有限生成加群である. つまり, ある $\Delta_n\in R_n$ があり, ホモロジーの任意の元 x に対し, $x\Delta_n=0$ となる.*

すると, (非可換の意味の) ＰＩＤに対し単因子論 ([Cohn, 10 章] 参照) というのがあり, 捩れ性から次の右 R_n 加群同型を得る.

$$H_1(S^3\setminus K;R_n)\cong R_n/e_1R_n\oplus\cdots\oplus R_n/e_kR_n$$

ここで $e_i\in R_n$ であり $e_i\|e_{i+1}$ という性質を満たす.

定義 6.2 ([Coc])**.** この $e_k\in R_n$ を **(べき零版の局所化された) 高次 Alexander 多項式**と呼ぶ.

ここで, 次の問が考えられる. (i) この多項式は結び目のみに依るのか？(ii) 依る量は部分的に取り出せるか？(iii) それは計算できるか？

注意 6.3. (i) に関し, 二つ注意事項を述べる. 第一に, 上記の環同型 $R_n\cong\mathbb{K}_n[\tau^{\pm1}]$ は, 切断 $\mathfrak{s}:\mathbb{Z}\to\pi_1(S^3\setminus K)$ に依っている. 実際, $\tau=\mathfrak{s}(1)$ と置き, その環同型を得ている.

第二に, 同型 $R_n\cong\mathbb{K}_n[\tau^{\pm1}]$ を通じ, e_k を $\mathbb{K}_n[\tau^{\pm1}]$ の元と思った時を考える. 但し, 単因子の取り方より, e_k の定義は, $(\mathbb{K}_n)^\times$ と $\tau^{\pm1}$ 倍の取り方に差が出ているので, 注意したい. この視点では, e_k は結び目 K と切断 $\mathfrak{s}$ の取り方に依存している不変量と言える.

なので, 結び目 K だけに依存する量を取り出すことが少々困難と思われた (但し, [Coc] では e_k の次数を不変量として考えおり, [Horn] で計算例が幾らかある).

そこで問 (ii) を解決するうえで, 次を示した.

定理 6.4 (右正規化. [N4])**.** *上記の e_k に関し, それにうまく $(\mathbb{K}_n)^\times$ 倍と $\tau^{\pm1}$ 倍すれば, 次のように出来, その表示は一意である： ある $n\in\mathbb{Z}_{\geq0}$ と多項式 $f(\tau)\in\mathbb{K}_n[\tau^{\pm1}]$ があって, $e_K=\sum_{i=-n}^{n}a_i\tau^i$ と展開でき (対称性), さらに, $e_k=(\tau-1)f(\tau)+1$ とできる (正規性).*

正規化してもまだ結び目不変量になっていない. しかし, 中心降下列を考えた功を奏し, 部分的な情報を取り出すことができる.

6.2 ファイバー結び目の高次アレクサンダー多項式の計算法.

次に問 (iii) に答えよう. 但し, 簡単のため, K がファイバーになる場合で説明しよう. つまり, 交換子群 π'_K がある自由群 F になる場合である. この場合, 次の様なリフトがある事になる

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(S^3\setminus K) \arrow[d, "f_2"'] \arrow[dr, "f_3"] \arrow[drrr, "f_m"] \arrow[drrrrr] & & & & & \\
\mathbb{Z} & \mathbb{Z}\rtimes F/\Gamma_3 F \arrow[l, "p_2"] & \cdots\cdots \arrow[l] & \mathbb{Z}\rtimes F/\Gamma_m F \arrow[l, "p_{m-1}"] & \cdots\cdots \arrow[l] & {}
\end{tikzcd}.$$

このリフトは, 命題5.2に似ている. しかし, R_n 係数ホモロジーを計算する上では, f_m を記述しなければならない. しかし, それはベキ単 Magnus 展開により, f_m は或る行列で書けるようになる (但し, f_m は $\pi_1(S^3\setminus k)/\pi_K^{(m)}$ に落すと, 群同型になるようにする).

次に, ホモロジーの議論をコホモロジーの言葉で焼き直そう. 実際, 次を示せた:

命題 6.5 ([N4]). *(1) 次の右 R_n-加群同型が存在する* .

$$H_1(S^3\setminus K;R_n)\cong H^1(S^3\setminus K,\partial(S^3\setminus K);R_n/\Delta_K^{(n)}R_n).$$

(2) さらに, 高次 Alexander 多項式 $\Delta_K^{(n)}$ は次の最小多項式に等しい (但し $(\mathbb{K}_n)^\times$ と $\tau^{\pm1}$ 倍の差がある).

$$\mathrm{Min}\{f\in R_n \mid \ H^1(S^3\setminus K,\partial S^3\setminus K;R_n/fR_n)=0\ \}.$$

相対コホモロジー群というと, 一見計算しづらいに様に思える. しかし, 論文 [N3] では, 右辺を結び目図式から計算する方法を確立している. であるので, まとめるとファイバー結び目の場合に, 図的な計算法を与えたことになる. 高次のアレクサンダー多項式が, 計算できそうな状況に落とし込むことが出来た.

最後に今後の事を述べると, この計算アルゴリズムを早くし, 色々な計算例を挙げ, 応用例が与えられればと願っている.

参考文献

[CEGS] J. S. Carter, J. S. Elhamdadi, M. Graña, M. Saito, *Cocycle knot invariants from quandle modules and generalized quandle homology*, Osaka J. Math. **42** (2005), 499–541.

[CFL] K. T. Chen, R. H. Fox, R. C. Lyndon, *Free differential calculus IV, the quotient groups of the lower central series*, Ann. of Math. **68** (1958), 81–95.

[COT] T. D. Cochran, K. E. Orr, P. Teichner, *Knot concordance, Whitney towers and L^2- signatures*, Ann. of Math. .2/ 157 (2003) 433-519

[Cha] J. C. Cha, *Rational Whitney tower filtration of links* Mathematische Annalen, to appear.

[Coc] TD Cochran, *Noncommutative knot theory*, Algebr. Geom. Topol. 4 (2004) 347398

[Cohn] *Free rings and their relations*, second editions, LMS

[GG] C. K. Gupta, N. D. Gupta, *Generalized Magnus embeddings and some applications*, Math. Z. **160** (1978), 75–87.

[HM] K. Habiro, J.-B. Meilhan, *Finite type invariants and Milnor invariants for Brunnian links*, Int. J. Math. **19** (2008), 747–766.

[Heap] A. Heap. *Bordism invariants of the mapping class group,* Topolog, **45**(5): 851–886, 2006.

[Hil] J. Hillman, *Algebraic invariants of links*, Series on Knots and everything. **32** World Scientiffc (2012).

[Horn] P. D. Horn, *On computing the first higher-order Alexander modules of knots*, Exprimental Mathematics **23** (2014), 153–169.

[IO] K. Igusa, K. Orr, *Links, pictures and the homology of nilpotent groups*, Topology **40** (2001), 1125–1166.

[Ki] T. Kitano, *Johnson's homomorphisms of subgroups of the mapping class group, the Magnus expansion and Massey higher products of mapping tori*, Topology Appl. **69** (1996), no. 2, 165–172.

[KN] H. Kodani, T. Nosaka, *Milnor invariants via unipotent Magnus embeddings*, preprint.

[L1] J.P. Levine, *The $\bar{\mu}$-invariants of based links*, Differential topology (Siegen, 1987), 87–103,

[L2] J.P. Levine, Addendum and correction to: *Homology cylinders: an enlargement of the mapping class group*. Algebr. Geom. Topol., 2: 1197–1204 (electronic), 2002.

[Mas] G. Massuyeau, *Infinitesimal Morita homomorphisms and the tree-level of the LMO invariant*, Bull. Soc. Math. France 140:1 (2012) 101–161.

[MKS] W Magnus, A Karrass, D Solitar, *Combinatorial Group Theory*, Interscience Publ., New York (1966)

[M1] J. W. Milnor, *Link groups*, Ann. of Math. **59** (1954) 177–195.

[M2] ———, *Isotopy of links*, in "Algebraic geometry and topology. A symposium in honor of S. Lefschetz", 280–306, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1957

[MY] J.B. Meilhan, A. Yasuhara, *Milnor invariants and the HOMFLYPT polynomial*, Geom. Topol **16** (2012), 889–917.

[MP] R. Mikhailov, I. B. Singh *Lower Central and Dimension Series of Groups*, Lecture notes in Mathematics, Springer

[Mu1] K. Murasugi, *Nilpotent coverings of links and Milnor's invariant*, Low-dimensional topology, London Math. Soc. Lecture Note Ser., **95**, Cambridge Univ. Press, Cambridge-New York (1985), 106–142.

[N1] T. Nosaka, *Cocycles of nilpotent quotients of free groups*, preprint

[N2] T. Nosaka, *Milnor-Orr invariants from the Kontsevich invariant*, preprint

[N3] T. Nosaka, *Twisted cohomology pairings of knots I; diagrammatic computation*, Geometriae Dedicata.

[N4] T. Nosaka, in preparation.

[野坂] 野坂 武史, 「３次元多様体のコホモロジーペアリングとその図的計算法.」, 日本数学会「数学」論説, 投稿中.

[O] K. Orr, *Homotopy invariants of links*, Inventiones Math. **95** (1989), 379–394.

[Po] R. Porter, *Milnor's $\bar{\mu}$-invariants and Massey products*, Trans. Amer. Math. Soc. **275** (1980), 39–71.

[Tu] V.G.Turaev, *Milnor's invariants and Massey products*, J. SovietMath. **12** (1979), 128–137.

[St] D. Stein, *Computing Massey product invariants of links*, Topology and its Applications, **32** (1989), 169–181.