

# シューベルト・カルキュラスの視点からの Hall-Littlewood 函数の一般化・母函数表示と応用

成瀬 弘 (山梨大学)\*

## 1. 背景

筆者は、シューベルト・カルキュラスに関連して登場する対称函数やシューベルト類を代表するシューベルト多項式について、ここ数年間研究を進めてきた。その中で、コホモロジー理論について知られている種々の結果を  $K$  理論の場合に拡張するという事をいくつか行ってきた。(cf. [2],[5],[7]) その過程で、 $K$  理論に限らずその他の種々のコホモロジー理論についても同様の拡張ができる可能性があると感じ、いくつかの場合について一般のコホモロジー理論への拡張の作業を行ってきた。ここでは、さらにシューベルト・カルキュラスの枠組みを含むより一般的な状況に対応するものとして、Hall-Littlewood 函数について一般コホモロジーの場合にどのようなものが考えられるかについての考察結果を報告したい。Hall-Littlewood 函数は、パラメータとなる変数  $t$  を含み、この  $t$  を特殊化することでシューア函数 ( $t = 0$  の場合) やシューア  $Q$  函数 ( $t = -1$  の場合) を得ることができる。そこで、この Hall-Littlewood 函数を考えることで、種々の結果を統一的に理解できることが期待できると考えられる。実際、ここでは特にこの一般化された Hall-Littlewood 函数の母函数表示を求める (cf.[13]) ことで、コホモロジーの積構造の特殊な場合の計算を比較的容易に行うことができる。また、 $K$ -理論においてシューベルト類を代表する多項式が行列式表示やパツフィアン表示を持つことが文献 [2] で示されたが、この事も母函数表示から自然に導びくことができる。なお、ここで報告する事柄の多くは、岡山大学の中川征樹氏との共同研究に基づくものである。(特に、文献 [11],[12] など)

## 2. 一般コホモロジー理論を規定する形式群について

ここでは、形式群から作られる一般コホモロジー理論について簡単に説明する。トポロジーの分野では、複素コボルディズム  $MU$  がこの一般コホモロジーを統制する。代数幾何の範疇では、代数的コボルディズムの理論が作られている。(cf.[9]) これらの詳細についての説明はここではできないが、基本的な演算として形式群が重要な役割を果たしている。

### 2.1. 形式群

形式群 (より正確には、1次元の可換な形式群) とは、次の性質をみたす2変数の形式冪級数  $F(x, y) \in R[[x, y]]$  のことをいう。(  $R$  は、可換環とする。 )

---

本研究は科研費 (課題番号:16H03921) 「シューベルト・カルキュラスの深化」の助成を受けたものである。

2010 Mathematics Subject Classification: 05E05, 14L05, 55N22, 19L41, 14N15

キーワード: Hall-Littlewood 函数, Schur 函数, 形式群, 一般コホモロジー, シューベルト・カルキュラス

\* 〒400-8510 山梨県甲府市武田 4-4-37 山梨大学 大学院総合研究部

e-mail: hnaruse@yamanashi.ac.jp

web: <http://www.ccn.yamanashi.ac.jp/~hnaruse/>

(1)  $F(x, y)$  は、次の形をしている。

$$F(x, y) = x + y + \sum_{i,j \geq 1} a_{i,j} x^i y^j, \quad (a_{i,j} \in R)$$

(2) 変数  $x, y$  について可換である。

$$F(x, y) = F(y, x)$$

(3) 結合法則をみたす。

$$F(x, F(y, z)) = F(F(x, y), z)$$

形式群と  $\mathbb{Z}$  上の共形場に関しては、文献 [6] があり、興味深い。

## 2.2. $\log_F(x)$ と $\exp_F(x)$

形式群  $F(x, y) \in R[[x, y]]$  に対して、

$$F(x, y) = \exp_F(\log_F(x) + \log_F(y))$$

をみたす  $\log_F(x)$  と  $\exp_F(x)$  を考える。一般には、このようなものは存在するとは限らないが、 $R$  がトーションを持たない可換環の場合は、 $R \otimes \mathbb{Q}$  を係数にもつ  $\log_F(x), \exp_F(x) \in R \otimes \mathbb{Q}[[x]]$  が、以下のように作れる。

$$\log_F(x) := \sum_{n=0}^{\infty} [\mathbb{C}P^n] \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

ここで、 $\mathbb{C}P^n$  は、複素  $n$  次元射影空間で  $[\mathbb{C}P^n]$  は、そのコホモロジー類を表す。例えば、 $F_m(x, y) = x + y + \beta xy$  のとき、 $[\mathbb{C}P^n] = (-\beta)^n$  である。

$\log_F(x)$  と  $\exp_F(x)$  を用いて  $[t]_F$  倍を次で定める。

$$[t]_F x := \exp_F(t \log_F(x)).$$

$t = n$  自然数のとき、

$$[n]_F x = \overbrace{x +_F x +_F \cdots +_F x}^n$$

である。 $[-1]_F x = \bar{x}$  は、逆元であり、 $F(x, \bar{x}) = 0$  を満たす。

例  $F_m(x, y) = x + y + \beta xy$  とする。このとき、

$$\bar{x} = \frac{-x}{1 + \beta x}, \quad \exp_{F_m}(x) = \frac{e^{\beta x} - 1}{\beta}, \quad \log_{F_m}(x) = \frac{\log(1 + \beta x)}{\beta},$$

$$[t]_{F_m} x = tx + \frac{t(t-1)}{2!} \beta x^2 + \cdots + \frac{t(t-1) \cdots (t-n+1)}{n!} \beta^{n-1} x^n + \cdots$$

である。

### 2.3. 楕円コホモロジー

一般の楕円曲線は、5個のパラメータ  $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_6$  を用いて、

$$y^2 + \mu_1 xy + \mu_3 y = x^3 + \mu_2 x^2 + \mu_4 x + \mu_6$$

と表され、これに対応する形式群は、Buchstaber と Bunkova により文献 [1] で決定されている。特に、 $\mu_1, \mu_2$  のみ残して、 $\mu_i = 0, i = 3, 4, 6$  とした場合は、

$$F_{E_{\mu_1, \mu_2}}(x, y) = \frac{x + y - \mu_1 xy}{1 + \mu_2 xy}$$

となる。(Hyperbolic type と呼ばれる。) また、 $\mu_2, \mu_4$  のみ残して、 $\mu_i = 0, i = 1, 3, 6$  とした場合は、 $\delta = \mu_2, \varepsilon = \mu_2^2 - 4\mu_4$  とおき、 $S_{\delta, \varepsilon}(x) := 1 - 2\delta x^2 + \varepsilon x^4$  として、

$$F_{Ell_{\delta, \varepsilon}}(x, y) = \frac{x\sqrt{S_{\delta, \varepsilon}(y)} + y\sqrt{S_{\delta, \varepsilon}(x)}}{1 - \varepsilon x^2 y^2}$$

となる。(このとき、 $\exp_F(x) = sn(x; \delta, \varepsilon)$  は elliptic sine で  $(\exp_F(x))'^2 = S_{\delta, \varepsilon}((\exp_F(x)))$ 。)

これらの場合は、Krichever 形式群となり、可積分系と関係がある。[1]

### 2.4. $P_F(z)$

形式群

$$F(x, y) = x + y + \sum_{i, j \geq 1} a_{i, j} x^i y^j \in A[[x, y]],$$

に対して、 $P_F(z) \in A[[z]]$  を次のように定める。

$$P_F(z) := 1 + \sum_{i=1}^{\infty} a_{1, i} z^i$$

これは、次のようにも表される。第1変数での偏微分を  $F_1(x, y) := \partial_x F(x, y)$  と表すとき、

$$P_F(z) = F_1(0, z)$$

である。また、 $P_F(x, y) \in A[[x, y]]$  を

$$P_F(x, y) := \frac{x - y}{F(x, \bar{y})}$$

で、定める。このとき  $F(x, y)$  が、結合法則を満たすことを用いて次が示せる。

補題 1  $P_F(x, y)$  は、可逆であり  $P_F(x, x) = P_F(x)$  となっている。

例  $F_m(x, y) = x + y + \beta xy$  とする。このとき、

$$P_{F_m}(x, y) = 1 + \beta y, \quad P_{F_m}(x) = 1 + \beta x$$

である。

### 3. 形式群 $F$ で一般化された Hall-Littlewood 関数

Hall-Littlewood 関数 (cf. [10]) には、いくつかの変種が存在する。通常は、分割  $\lambda$  に添え字付けされているがここでは、その母関数を考えるため正整数列  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r)$  で添え字付けされる対称関数として以下のように定める。変数  $x_1, \dots, x_n$  に対して、 $r \leq n$  とする。

$A$  を係数環とし、形式冪級数  $T(x, y)$ , 形式 Laurent 級数  $H(z)$  を用意しておく。形式群  $F(x, y)$  に対して、一般化された Hall-Littlewood 関数を定める。

**定義 2**  $F, T, H$  に対する一般化された Hall-Littlewood 関数  $\mathcal{Q}_{\lambda_1, \dots, \lambda_r}^F(x_1, \dots, x_n; T, H)$  を、次の式で定める。

$$\mathcal{Q}_{\lambda_1, \dots, \lambda_r}^F(x_1, \dots, x_n; T, H) := \sum_{w \in S_n / (S_1^r \times S_{n-r})} w \left( x_1^{[\lambda_1]} \cdots x_r^{[\lambda_r]} \prod_{1 \leq i \leq r} \prod_{i < j \leq n} \frac{T(x_i, x_j)}{F(x_i, \bar{x}_j)} \right),$$

ここで、正整数  $k$  に対して  $x^{[k]} := H(x)T(x, x)x^{k-1}$  とおいた。また  $w$  は、対称群のコセットの代表を動き、変数  $x_1, \dots, x_n$  の置換として作用する。このように対称群で軌道取を取る操作は、幾何学的には push-forward の写像にあたる。cf. [11], [12]

通常は、 $T$  と  $H$  を、次のように特殊化した場合を考える。すなわち、

$T(x, y) = F(x, [t]_F \bar{y})$ ,  $H(x) = \frac{1}{T(x)}$  のとき、 $x^{[k]} = x^k$  で、このとき  $HP^F$  を定める。

$T(x, y) = F(x, [t]_F \bar{y})$ ,  $H(x) = 1$  のとき、 $x^{[k]} = F(x, [t]_F \bar{x})x^{k-1}$  で、このとき  $HQ^F$  を定める。

**定義 3**  $t$  を不定元とし、 $HP_\lambda^F(x_1, \dots, x_n; t)$ ,  $HQ_\lambda^F(x_1, \dots, x_n; t)$  を次で定める。

$$HP_\lambda^F(x_1, \dots, x_n; t) := \sum_{w \in S_n / (S_1^r \times S_{n-r})} w \left( x_1^{\lambda_1} \cdots x_r^{\lambda_r} \prod_{1 \leq i \leq r} \prod_{i < j \leq n} \frac{F(x_i, [t]_F(\bar{x}_j))}{F(x_i, \bar{x}_j)} \right)$$

$$HQ_\lambda^F(x_1, \dots, x_n; t) := \sum_{w \in S_n / (S_1^r \times S_{n-r})} w \left( x_1^{[\lambda_1]^F} \cdots x_r^{[\lambda_r]^F} \prod_{1 \leq i \leq r} \prod_{i < j \leq n} \frac{F(x_i, [t]_F(\bar{x}_j))}{F(x_i, \bar{x}_j)} \right)$$

ここで、正整数  $k > 0$  に対して、 $x^{[k]^F} := F(x, [t]_F(\bar{x}))x^{k-1}$  とする。

簡単のため、次の定理では  $H(z)$  は、形式冪級数とする。

**定理 4** (母関数表示) [13]

$A(z) := \frac{H(z)}{P_F(z)} \prod_{i=1}^n \frac{T(z, x_i)}{F(z, \bar{x}_i)}$  とおき、 $r \leq n$  に対して

$$A(z_1, \dots, z_r) := \prod_{k=1}^r A(z_k) \prod_{1 \leq i < j \leq r} \frac{F(z_j, \bar{z}_i)}{T(z_j, z_i)}.$$

と定める。このとき、正整数の列  $\lambda_1, \dots, \lambda_r$  に対して、 $A(z_1, \dots, z_r)$  における  $z^{-\lambda} := z_1^{-\lambda_1} \cdots z_r^{-\lambda_r}$  の係数は、 $\mathcal{Q}_\lambda^F(x_1, \dots, x_n; T, H)$  である。すなわち、次が成立する。

$$[z^{-\lambda}]A(z_1, \dots, z_r) = \mathcal{Q}_\lambda^F(x_1, \dots, x_n; T, H)$$

ここで、 $[z^{-\lambda}]f(z)$  は、 $f(z)$  の  $z^{-\lambda}$  の係数を取ることを表す。

注意 5  $H(z)$  が位数  $k$  の極を持つときは、 $\lambda_1, \dots, \lambda_r > k$  に対して、同様のことが成立する。

系 6 [12]

$$[z^{-\lambda}] \left( \prod_{k=1}^r \left( \frac{1}{P_F(z_k)} \prod_{i=1}^n \frac{F(z_k, [t]\bar{x}_i)}{F(z_k, \bar{x}_i)} \right) \prod_{1 \leq i < j \leq r} \frac{F(z_j, \bar{z}_i)}{F(z_j, [t]\bar{z}_i)} \right) = HQ_\lambda^F(x_1, \dots, x_n; t),$$

$$[z^{-\lambda}] \left( \prod_{k=1}^r \left( \frac{z_k}{P_F(z_k)F(z_k, [t]\bar{z}_k)} \prod_{i=1}^n \frac{F(z_k, [t]\bar{x}_i)}{F(z_k, \bar{x}_i)} \right) \prod_{1 \leq i < j \leq r} \frac{F(z_j, \bar{z}_i)}{F(z_j, [t]\bar{z}_i)} \right) = HP_\lambda^F(x_1, \dots, x_n; t)$$

$F(x, y) = x + y$  の場合の通常コホモロジーのときは、 $HQ^F$  は通常の Hall-Littlewood  $Q$  函数となり、上記の系はその知られた母函数表示となる。 $t = 0$  や  $t = -1$  の場合の代数的コボルディズムでのこれらに対応する幾何学的な構成については、[3],[4] を参照の事。

#### 4. connective $K$ 理論の場合の具体例と応用

ここでは、connective  $K$  理論の場合に、具体形に関する結果と応用について述べる。

以下では、 $x \oplus y = F_m(x, y) = x + y + \beta xy =, x \ominus y = F_m(x, \bar{y}) = \frac{x - y}{1 + \beta y}$  の記号を用いる。

系 7 (Determinant-Pfaffian formula)[2]  $F = F_m(x, y) = x + y + \beta xy$  とし、 $\lambda$  を長さ  $r$  の分割とする。 $T(x, y) = F(x, [t]\bar{y})$  で  $H(z) = 1$  ないし  $H(z) = \frac{z}{T(z, z)}$  とおく。

このとき、 $t = 0$  で、次の式を得る。

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_{\lambda_1, \dots, \lambda_r}(x_1, \dots, x_n) &= \det \left( [z_i^{-(\lambda_i + j - i)}] \frac{1}{(1 + \beta z_i)^{r-i}} A(z_i) \right)_{r \times r} \\ &= \det \left( [z_i^{-(\lambda_i + j - i)}] \frac{1}{(1 + \beta z_i)^{j-i}} A(z_i) \right)_{r \times r}, \end{aligned}$$

$t = -1$  のときは、次の Pfaffian 公式を得る。(  $r$  は偶数とする。 )

$$\mathcal{Q}_{\lambda_1, \dots, \lambda_r}(x_1, \dots, x_n) = \text{Pf} \left( [z_i^{-\lambda_i} z_j^{-\lambda_j}] \frac{1}{(1 + \beta z_i)^{r-i-1}} \frac{1}{(1 + \beta z_j)^{r-j}} A(z_i) A(z_j) \frac{z_j \ominus z_i}{z_j \oplus z_i} \right)_{r \times r}.$$

補題 8

$$\frac{z_2 \ominus z_1}{z_2 \oplus z_1} = \sum_{i \geq j \geq 0} g_{i,j} z_1^i z_2^{-j}$$

ここで  $g_{i,j} := (-1)^i \beta^{i-j} \left( 2 \binom{i}{j} + \binom{i}{j+1} - \delta_{j,0} \right) \delta_{i,j}$  は Kronecker の delta 記号。

母函数の式に、この補題を用いることで、 $K$  理論的な Schur  $Q$ -函数  $GQ_\lambda = GQ_\lambda(x_1, \dots, x_n)$  ( $GQ, GP$  については [5] を参照) について、2 行の分割し対応するものを 1 行の積の和で表す式や、1 行の  $GQ, GP$  の積の分解にあたる Pieri 公式の特別の場合が得られる。

命題 9  $k > \ell > 0$  に対し、次が成立する。

$$GQ_{k,\ell} = \sum_{j=0}^{\ell} \sum_{i=j}^{\infty} c_{i,j} GQ_{k+i} GQ_{\ell-j}$$

ここで、

$$c_{i,j} = \begin{cases} g_{i,j} & (0 \leq j < \ell) \\ (-1)^i \beta^{i-j} \left( 2 \binom{i-1}{j-1} + \binom{i-1}{j} \right) & (j = \ell). \end{cases}$$

命題 10  $k \geq l > 0$  に対して、

$$\begin{aligned} (1) \quad GQ_k \times GQ_l &= (GQ_{k,l} + 2\beta GQ_{k+1,l} + \beta^2 GQ_{k+2,l}) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{l-1} (2GQ_{k+i,l-i} + 3\beta GQ_{k+1+i,l-i} + \beta^2 GQ_{k+2+i,l-i}) \\ &\quad + (2GQ_{k+l,0} + \beta GQ_{k+l+1,0}) \end{aligned}$$

$$(2) \quad GP_k \times GP_l = GP_{k,1} + \beta GP_{k+1,1} + GP_{k+1}$$

$k \geq l \geq 2$  のとき、

$$\begin{aligned} GP_k \times GP_l &= (GP_{k,l} + 2\beta GP_{k+1,l} + \beta^2 GP_{k+2,l}) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{l-2} (2GP_{k+i,l-i} + 3\beta GP_{k+1+i,l-i} + \beta^2 GP_{k+2+i,l-i}) \\ &\quad + (2GP_{k+l,1} + 2\beta GP_{k+l+1,1}) \\ &\quad + GP_{k+l}. \end{aligned}$$

## 5. 今後の課題

今後の課題として以下が考えられる。

1. BCD 型の Hall-Littlewood 函数の一般化
2. Hyperbolic type などの楕円コホモロジーの場合の具体形を記述する。
3.  $t$  を 1 のべき根に特殊化した場合の多項式の意味について ( $p$ -compact 群と関係している。)
4. Hall-Littlewood 函数を Schur 函数で展開したときの係数の具体形を求める。(Kostka 係数の一般化となる。)
5. ホモロジーの Schubert 基底に対応する多項式についても、母函数表示を求める問題がある。例えば、次の例がある。

Dual stable Grothendieck polynomial  $g_\lambda(y_1, y_2, \dots) \in \mathbb{Z}[\beta][[y_1, y_2, \dots]]$  は、次で定義される。

$$\prod_{i,j} \frac{1}{1 - x_i y_j} = \sum_{\lambda} G_{\lambda}(x) g_{\lambda}(y).$$

命題 11 長さ  $r$  の分割  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r)$  ( $r \leq n$ ) に対して、次が成立する。

$$[u^\lambda] \left( \prod_{k=1}^r \prod_{j=1}^m \frac{1}{1 - y_j u_k} \right) \prod_{1 \leq i < j \leq r} \frac{u_i \ominus u_j}{u_i} = g_\lambda(y_1, \dots, y_m)$$

c.f.[8]

## 参考文献

- [1] V. M. Buchstaber and E. Yu. Bunkova, Krichever formal groups Functional Analysis and Its Applications, Volume 45,99-116 (2011).
- [2] T.Hudson,T.Ikeda,T.Matsumura and H.Naruse, Degeneracy Loci Classes in  $K$ -theory - Determinantal and Pfaffian Formula, Advances in Mathematics Volume 320,115–156, 2017.
- [3] T.Hudson and T.Matsumura, Segre classes and Kempf-Laksov formula in algebraic cobordism, arXiv:1602.05704
- [4] T.Hudson and T.Matsumura, Symplectic and odd orthogonal Pfaffian formulas for algebraic cobordism, ,arXiv:1710.07093.
- [5] T.Ikeda and H.Naruse, K-theoretic analogues of factorial Schur P- and Q- functions , Adv. Math. 243 (2013), no. 1, 22–66.
- [6] T.Katsura, Y.Shimizu and K.Ueno, Formal groups and conformal field theory over  $\mathbb{Z}$ , Adv. Stud. Pure Math. 19, 347–366 (1989).
- [7] A.N.Kirillov and H.Naruse, Construction of double Grothendieck polynomials of classical types using Id-Coxeter algebras , Tokyo Journal of Mathematics, Vol.39 no.3,(2017), 695–728.
- [8] A. Lascoux and H.Naruse, Finite sum Cauchy identity for dual Grothendieck polynomials, Proc. Japan Acad. Ser. A. Math. Sci. Volume 90, No.7(2014), 87—91.
- [9] M.Levine and Morel, Algebraic Cobordism, Springer 2007.
- [10] I.G.Macdonald, Symmetric functions and Hall polynomials, 2nd edition, Oxford Univ. Press, Oxford, 1995.
- [11] M.Nakagawa and H.Naruse, The universal Gysin formulas for the universal Hall-Littlewood functions, to appear in Contemporary Mathematics AMS, arXiv:1604.00451v2.
- [12] M.Nakagawa and H.Naruse, Generating functions for the universal Hall-Littlewood P- and Q-functions ,arXiv:1705.04791.
- [13] H. Naruse, Elementary proof and application of the generating function for generalized Hall-Littlewood functions , arXiv:1705.02856.