確率最適輸送問題

力学における E. Schrödinger の確率論的問題のある一般化

三上　敏夫　(津田塾大学)*

概　要

E. Schrödinger は，1932-1932 年に発表した論文で次のような問題を考えた．ある場所 A にある複数個の粒子が，与えられた推移確率で各々独立に別の場所 B に移動する．B の各地点に存在できる粒子の数は決まっているものとする．このような事象の中で一番起こりやすい（確率が大きい）のはどんな場合か？Schrödinger は，変分問題の Euler 方程式として Schrödinger の汎関数方程式と呼ばれる方程式を導出した．Schrödinger 自身はこの方程式を解くことはなかったが，この方程式は，S. Bernstein の 1932 年の ICM の講演以降，Bernstein process (あるいは B. Jamison の reciprocal process) や h-path process の理論としても発展した．また，E. Nelson の確率力学の理論との密接な関係も知られている．本講演では，講演者の研究，特に，Schrödinger の問題の確率最適輸送問題としての一般化，確率最適輸送問題のゼロ雑音極限による Monge の問題の研究，Neson の確率力学への応用，mean field game/PDE との関連について時間の範囲内で解説する．

1. Schrödinger の考えた問題とその後の発展

E. Schrödinger が，1931-1932 年に発表した論文 [47, 48] で考えた問題を紹介する．ある場所 $A := \{x_1, \cdots, x_m\} \subset \mathbf{R}^3$ にある N 個の粒子が，与えられた推移確率で各々独立に別の場所 $B := \{y_1, \cdots, y_n\} \subset \mathbf{R}^3$ に移動する．ただし，B の各地点に存在する粒子の数は決まっているものとする．このような粒子の移動の仕方は必ずしも１通りとは限らない．以下，その確率が最大になる場合を求める．

点 $x_i \in A$ にある粒子が点 $y_j \in B$ に移動する確率＝推移確率を g_{ij},
点 $x_i \in A$ にある粒子で点 $y_j \in B$ に移動するものの数を c_{ij},
点 $x_i \in A$，$y_j \in B$ にある粒子の個数を k_i，ℓ_j

で表す．各粒子は独立なので，このような事象の起こる確率は,

$$\Pi_{i=1}^{m} \frac{k_i!}{c_{i1}! \times \cdots \times c_{in}!} g_{i1}^{c_{i1}} \times \cdots \times g_{in}^{c_{in}}. \tag{1}$$

ただし，次の付帯条件をみたさなければならない：

$$\sum_{j=1}^{n} c_{ij} = k_i, \quad \sum_{i=1}^{m} c_{ij} = \ell_j, \quad \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} = N. \tag{2}$$

本研究は科研費 (課題番号:No. 26400136(代表者三上), 16H03948(代表者早稲田大学石井仁司教授) の助成を受けたものである．
2010 Mathematics Subject Classification: 60J60, 93E20, 60G30
キーワード：量子力学, Schrödinger の汎関数方程式, Doob の h-path process, 確率最適輸送問題
* 〒187-8577 東京都小平市津田町 2-1-1　津田塾大学学芸学部数学科
e-mail: t.mikami@tsuda.ac.jp
web: http://edu.tsuda.ac.jp/~t.mikami/

(1) の確率を最大にする場合を考えることとその対数を最大にする場合を考えることは同じである．各 k_i, ℓ_j は与えられた定数であることと，各 c_{ij} は十分大であることを仮定すると（Stirling の公式 $\log(n!) \sim n(\log n - 1) + O(\log n)$ を用いて）以下の問題を考えることになる：

$$\max\left\{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(c_{ij}\log g_{ij} - c_{ij}\log c_{ij}) : \sum_{j=1}^{n} c_{ij} = k_i, \sum_{i=1}^{m} c_{ij} = \ell_j, \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} = N\right\}. \tag{3}$$

$$\mu_i := \frac{k_i}{N}, \quad \nu_i := \frac{\ell_i}{N}, \quad p_{ij} := \frac{c_{ij}}{N}$$

とすると，(3) は次と同値である：離散確率 $\mu := (\mu_i)_{i=1}^m$, $\nu := (\nu_j)_{j=1}^n$ に対して，

$$v(\mu,\nu) := \min\left\{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_{ij}\log\frac{p_{ij}}{g_{ij}} : \sum_{j=1}^{n} p_{ij} = \mu_i, \sum_{i=1}^{m} p_{ij} = \nu_j, \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1\right\}. \tag{4}$$

$\displaystyle\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_{ij}\log\frac{p_{ij}}{g_{ij}}$ は，離散確率 (p_{ij}) の (g_{ij}) に対する相対エントロピーである．また，これは離散確率最適輸送問題 ([22, 23, 30, 31] 参照) の例である．

$$g_{ij} \approx \exp(-\frac{\exists c(i,j)}{\varepsilon}), \quad c(i,j) \geq 0, \varepsilon > 0$$

と書けているとき，$v(\mu,\nu) = v^{\epsilon}(\mu,\nu)$ は次を満たす．

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon v^{\varepsilon}(\mu,\nu) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_{ij}c(i,j) : \sum_{j=1}^{n} p_{ij} = \mu_i, \sum_{i=1}^{m} p_{ij} = \nu_j, \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1\right\}. \tag{5}$$

これは離散最適輸送問題 ([26, 27, 28, 36, 43, 51] 参照) の例である．

$$g(t,z) := \frac{1}{\sqrt{2\pi t}^d}\exp(-\frac{|z|^2}{2t}), \quad t > 0, z \in \mathbf{R}^d.$$

E. Schrödinger は，(4) の最小解のみたすべき条件として，未定乗数法により Schrödinger の汎関数方程式と呼ばれるある方程式を導出した．

定義 1.1 (Schrödinger の汎関数方程式：確率密度関数がある場合) $\mathbf{R}^d$ 上の確率密度関数 p,q に対して，次をみたす非負関数 φ, ϕ を求めよ：

$$\begin{aligned} p(x) &= \varphi(x)\int_{\mathbf{R}^d} g(1, y-x)\phi(y)dy, \\ q(y) &= \phi(y)\int_{\mathbf{R}^d} \varphi(x)g(1, y-x)dx. \end{aligned} \tag{6}$$

1.1. Bernstein の定式化と Jamison による特徴づけ

ある確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上で定義された $\mathbf{R}^d$ 値確率過程 $\{X(t)\}_{0\leq t\leq 1}$ が Bernstein 過程 ([2] 参照) であるとは，次を満たすことである：$\forall 0 \leq s < t < u \leq 1$,

$$P(X(t) \in dx | X(v), v \in [0,s] \cup [u,1]) = P(X(t) \in dx | X(s), X(u)). \tag{7}$$

B. Jamison は Bernstein 過程 (あるいは reciprocal 過程) の特徴づけを与えた．

定理 1.1 ([17]) 任意の $\mu(dxdy) \in \mathcal{P}(\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d)$ に対して，次を満たす Bernstein 過程 $\{X(t)\}_{0 \le t \le 1}$ は法則の意味で一意に定まる $\forall 0 \le s < t < u \le 1$,

$$\begin{aligned} P(X(t) \in dx | X(s), X(u)) &= \frac{g(t-s, x - X(s)) g(u-t, X(u) - x) dx}{g(u-s, X(u) - X(s))}, \quad (8) \\ P((X(0), X(1)) \in dxdy) &= \mu(dxdy). \end{aligned}$$

特に，$\{X(t)\}_{0 \le t \le 1}$ が Markov 性を持つ，即ち，$\forall 0 \le s < t < u \le 1$,

$$P(X(t) \in dx | X(v), v \in [0,s]) = P(X(t) \in dx | X(s)), \quad \forall 0 \le s < t \le 1. \quad (9)$$

が成り立つことと次は同値である：ある σ-有限測度 ν_0, ν_1 が存在して：

$$\mu(dxdy) = \nu_0(dx) g(1, y-x) \nu_1(dy). \quad (10)$$

(10) は Schrödinger の汎関数方程式を導く．

定義 1.2 (Schrödinger の汎関数方程式) 任意の $\mu_0, \mu_1 \in \mathcal{P}(\mathbf{R}^d)$ に対して次を満たす σ-有限測度 ν_0, ν_1 を求めよ：

$$\begin{aligned} \mu_0(dx) &= \nu_0(dx) \int_{\mathbf{R}^d} g(1, y-x) \nu_1(dy), \quad (11) \\ \mu_1(dy) &= \nu_1(dy) \int_{\mathbf{R}^d} g(1, y-x) \nu_0(dx). \end{aligned}$$

1.2. Markov 性を持つ Bernstein 過程の SDE

B. Jamison による Markov 性を持つ Bernstein 過程の理論がある．B. Jamison は A. Beurling[3] のコンパクト位相空間上での Schrödinger の汎関数方程式の解の存在と一意性の結果を σ-コンパクトな空間に拡張した．特に，それが，Doob の h-path 過程と言われるある伊藤型確率微分方程式の解の初期と終期の結合確率分布であることを示した．以下，簡単な場合にそれを紹介する．

$$h(t,x) := \int_{\mathbf{R}^d} g(1-t, y-x) \nu_1(dy), \quad 0 \le t < 1. \quad (12)$$

今後 $W(t)$ であるフィルター付き確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \ge 0}, P)$ で定義された d 次元ブラウン運動を表す (例えば [14] 参照).

定理 1.2 ([17, 18]) 任意の $P_0, P_1 \in \mathcal{P}(\mathbf{R}^d)$ に対して，(11) はただ一つの解 $\nu_0(dx)\nu_1(dy)$ を持つ．$P_1(dy) \ll dy$ の時，$h \in C^{1,2}([0,1) \times \mathbf{R}^d)$，次を満たす確率微分方程式の弱解 $\{X(t)\}_{0 \le t \le 1}$ が一意に定まる．

$$\begin{aligned} dX(t) &= D_x \log h(t, X(t)) dt + dW(t), \quad 0 < t < 1, \quad (13) \\ P(X(t) \in dx) &= P_t(dx), \quad t = 0, 1. \end{aligned}$$

1.3. 確率最適制御による Markov 性を持つ Bernstein 過程の特徴づけ

$\gamma(t;\omega)$ をあるフィルター付き確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \ge 0}, P)$ で定義された $\mathbf{R}^d$-値 progressively measurable 確率過程とする (例えば [14] 参照).

$$dX^\gamma(t) = \gamma(t;\omega) dt + dW(t). \quad (14)$$

定理 1.3 ([12, 35, 52]) 定理 1.2 の $\{X(t)\}_{0\le t\le 1}$ は，次の変分問題の (もしそれが有限なら) 最小解である：任意の $P_0, P_1 \in \mathcal{P}(\mathbf{R}^d)$ に対して，

$$\begin{aligned} V(P_0,P_1) &:= \inf\left\{E\left[\int_0^1 |\gamma(t)|^2 dt\right]\middle| PX^\gamma(t)^{-1}=P_t, t=0,1\right\} \qquad (15)\\ &= \int_{\mathbf{R}^d} \log h(1,x)P_1(dx) - \int_{\mathbf{R}^d} \log h(0,x)P_0(dx), \end{aligned}$$

注意 1.1 $E[\frac{1}{2}\int_0^1 |\gamma(t)|^2 dt]$ は，$PX^\gamma(\cdot)^{-1}$ の $PX^0(\cdot)^{-1}$ に対する相対エントロピーである．

1.4. 確率最適輸送問題に向けて

Jamison の理論は，変分問題とは関係ない．Schrödinger の汎関数方程式を方程式として解けば良いだけである．それにより，与えられた初期分布と終期分布（及び拡散係数）を持つ確率微分方程式の解を構成することができる．ただし，それが元々の変分問題とどう関わるのか？それ自身からは不明確である．それを確率力学 ([13, 16, 39, 40, 41, 42] 参照) の立場から確率最適制御の手法で示したのが，Zambrini であった．しかし，逆に，それが Schrödinger の汎関数方程式とどう関わるかもそれ自身からは不明確であった．これらの点については，確率最適輸送問題の双対定理から明らかになる．一方，Bernstein 過程を与えるような確率微分方程式の理論はない ([19, 20, 44, 45, 50] 参照)．

本講演では，Schrödinger の元々の変分問題の一般化＝確率最適輸送問題の研究について考える ([12, 24, 25, 29, 30, 31, 32, 33, 35, 46, 49, 52] 参照)．そして，Schrödinger の汎関数方程式を方程式として解く ([2, 3, 11, 15, 17] 参照) というのではなく，

(1) 変分問題の有限性を調べる

(2) 変分問題が有限な場合に，その最小解が存在し，それが与えられた初期分布と周期分布（及び拡散係数）を持ち十分な可積分性のある確率微分方程式の解になることを示す．(結果的に，Jamison の結果の別証明もできる．)

我々の興味は何か？

（１）『与えられた初期分布と周期分布（及び拡散係数）を持つ確率微分方程式の解を構成』ということ自体，確率論的に面白い問題である．

（２）『Bernstein 過程を与えるような確率微分方程式の理論』を作りたい．

（２ ’）『Markov 性』を持たない semimartingale で，与えられた初期分布と周期分布（及び拡散係数）を持つ確率微分方程式の解を構成できるのか知りたい.（これは，最小解がマルコフ性を持たないような変分問題を作ればいいのだが。。。）

（３）『最適輸送問題』を含む理論として『確率最適輸送問題』を発展させたい.

（４）変分問題の制約条件を拡張して，Nelson の確率力学への応用を与えたい.

（５）『確率最適輸送問題』を『平均場ゲーム理論』([1, 21, 34] 参照) の枠組みで発展させたい.

2. 確率最適輸送問題１：２点周辺分布固定型

このセクションでは，初期終期分布を固定した確率最適輸送問題を導入し，それに対する双対定理，確率最適輸送問題の有限性に関する研究を紹介する．また，応用として，Jamison の定理の別証明，Monge の問題の確率論的証明を与える．

以下，簡単のために次を仮定する

(A1) $L \in C^1(\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d; [0,\infty))$, uについて狭義凸．$|D_x L(x,u)|/(1+L(x,u))$，$L(y,u)/(1+L(x,u))$, $x, y \in \mathbf{R}^d$は有界．$\sup_{x\in\mathbf{R}^d} |D_x L(x,u)|$は局所有界．

$$\liminf_{|u|\to\infty} \frac{\inf_{x\in\mathbf{R}^d} L(x,u)}{|u|} = \infty.$$

定義 2.1 (確率最適輸送問題) $P_0, P_1 \in \mathcal{P}(\mathbf{R}^d)$に対して，

$$V(P_0,P_1) := \inf\Bigl\{E\Bigl[\int_0^1 L(X^\gamma(t),\gamma(t))dt\Bigr]\Bigm| PX^\gamma(t)^{-1} = P_t, t=0,1\Bigr\}. \tag{16}$$

$$H(x,z) := \sup_{u\in\mathbf{R}^d}\{\langle z,u\rangle - L(x,u)\}.$$

定理 2.1 (双対定理[35]) (A1)を仮定する．任意の$P_0, P_1 \in \mathcal{P}(\mathbf{R}^d)$に対して，

$$V(P_0,P_1) = \sup_{f\in C_b^\infty(\mathbf{R}^d)}\Bigl\{\int_{\mathbf{R}^d} f(x)P_1(dx) - \int_{\mathbf{R}^d} u(0,x;f)P_0(dx)\Bigr\} \in [0,\infty]. \tag{17}$$

ただし，$u(t,x;f)$は次のHJB(Hamilton-Jacobi-Bellman)方程式の古典解である：

$$\begin{aligned}\frac{\partial u(t,x;f)}{\partial t} + \frac{1}{2}\triangle_x u(t,x;f) + H(x;D_x u(t,x;f)) &= 0, \quad 0<t<1, x\in\mathbf{R}^d, \qquad (18)\\ u(1,\cdot;f) &= f.\end{aligned}$$

系 2.1 ([35]) (A1)を仮定する．任意の$P_0, P_1 \in \mathcal{P}(\mathbf{R}^d)$に対して，$V(P_0,P_1)$が有限なとき，その最小解は存在して次を満たす：

$$dX(t) = b(t,X(t))dt + dW(t) \tag{19}$$

ただし，$V(P_0,P_1)$の最大化列$\{f_n\}_{n\geq 1}$に対して，

$$b(t,x) := \lim_{n\to\infty} D_z H(x; D_x u(t,x;f_n))$$

は一意に定まる．

系 2.2 ([33]) (A1)及び次を仮定する：ある$\gamma > 0$が存在して，

$$\limsup_{|u|\to\infty} \frac{\sup_{x\in\mathbf{R}^d} L(x,u)}{|u|^\gamma} < \infty.$$

任意の$P_0(dx) = p_0(x)dx, P_1(dx) = p_1(x)dx \in \mathcal{P}(\mathbf{R}^d)$に対して，次の条件の下，$V(P_0,P_1)$は有限になる：

$$\sum_{i=1}^2 \int_{\mathbf{R}^d} (|D\log p_i(x)|^\gamma + |x|^\gamma) p_i(x)dx < \infty. \tag{20}$$

注意 2.1 $\gamma = 2$の時は，Vの有限性定理の条件(20)は，次のように弱められる：

$$\int_{\mathbf{R}^d\times\mathbf{R}^d} (\log p_1(y) + |x|^2 + |y|^2) p_0(x)dx p_1(y)dy < \infty. \tag{21}$$

(20)が(21)を導くのは次からである：対数Soborev不等式([51]参照)より，任意の確率密度関数$\rho(x)$に対して

$$\int_{\mathbf{R}^d} \rho(x)\log\rho(x)dx \leq -\frac{d}{2}\log(2\pi) + \frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}^d} \rho(x)dx(|D\log\rho(x)|^2 + 2\langle x, D\log\rho(x)\rangle).$$

定理 2.2 ([35]) (A.1)及び$D_u^2L(x,u)$が有界で一様に非退化であるとする．任意の$P_0, P_1 \in \mathcal{P}(\mathbf{R}^d)$に対して，$V(P_0,P_1)$が有限なとき，$V(P_0,P_1)$の最小解$\{X(t)\}_{0\le t\le 1}$は一意であり，ある$f(\cdot) \in L^1(\mathbf{R}^d, P_1(dx))$と$\sigma[X(s):0\le s\le t]$-連続セミマルチンゲール$\{Y(t)\}_{0\le t\le 1}$が存在して，

$$\{(X(t), Y(t), Z(t) := D_uL(X(t), b(t, X(t))))\}_{0\le t\le 1}$$

が次の前向後向確率微分方程式を満たす：$t \in [0,1]$,

$$\begin{aligned} X(t) &= X(0) + \int_0^t D_zH(X(s), Z(s))ds + W(t), \qquad (22)\\ Y(t) &= f(X(1)) - \int_t^1 L(X(s), D_zH(X(s), Z(s)))ds \\ &\quad - \int_t^1 < Z(s), dW(s) > . \end{aligned}$$

系 2.3 ([35]) $L(x,u) = \frac{1}{2}|u|^2$とする．任意の$P_0, P_1 \in \mathcal{P}(\mathbf{R}^d)$に対して，$V(P_0,P_1)$が有限なとき，$V(P_0,P_1)$の最小解$\{X(t)\}_{0\le t\le 1}$は一意であり，定理2.2の$Y(0) = \exists f_0(X(0))$となり$\exp(-f_0(x))P_0(dx)\exp(f_1(y))dy$がSchrödingerの汎関数方程式の解になる．

$P_0 \in \mathcal{P}(\mathbf{R}^d)$，Borel可測な$f : \mathbf{R}^d \mapsto \mathbf{R}$に対して，

$$V^*_{P_0}(f) := \sup\Big\{\int_{\mathbf{R}^d} f(x)P(dx) - V(P_0,P) : P \in \mathcal{P}(\mathbf{R}^d)\Big\}. \qquad (23)$$

(A1)の下，$f \in C_b^\infty(\mathbf{R}^d)$に対して，

$$V^*_{P_0}(f) = \int_{\mathbf{R}^d} u(0,x;f)P_0(dx). \qquad (24)$$

特に，

$$V(P_0,P) = \sup\Big\{\int_{\mathbf{R}^d} f(x)P(dx) - V^*_{P_0}(f) : f \in C_b^\infty(\mathbf{R}^d)\Big\}. \qquad (25)$$

Schrödingerの汎関数方程式に対して，次の確率最適輸送問題による特徴付けができる．

命題 2.1 ([34]) $L(x,u) = \frac{1}{2}|u|^2$とする．任意の$P_0, P_1 \in \mathcal{P}(\mathbf{R}^d)$に対して，$P_1(dy) \ll dy$，$V(P_0,P_1)$が有限なとき，Schrödingerの汎関数方程式は次と同値である：

$$P_1(dy) = \frac{\delta V^*_{P_0}(\log h(1,\cdot))}{\delta f}(dy). \qquad (26)$$

ここで，$\dfrac{\delta V^*_{P_0}(f)}{\delta f}$は，$V^*_{P_0}(f)$のGâteaux微分を表す．

2.1. Mongeの問題との関係

$c \in C(\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d; [0,\infty))$とする．Mongeの問題（[37, 43, 51]参照）とは，次の最小解を求めることである．$P_0, P_1 \in \mathcal{P}(\mathbf{R}^d)$に対して

$$\inf\left\{\int_{\mathbf{R}^d} c(x,\varphi(x))P_0(dx)\middle| P_0\varphi^{-1} = P_1\right\}.$$

この問題は，Kantorovichにより線形化され，Monge-Kantorovich問題(あるいは最適輸送問題)として広く研究されている：

$$\inf\left\{\int_{\mathbf{R}^d\times\mathbf{R}^d} c(x,y)\mu(dxdy)\middle| \mu(dx\times\mathbf{R}^d) = P_0(dx), \mu(\mathbf{R}^d\times dy) = P_1(dy)\right\}.$$

これは，直感的には，我々の研究で$W(t)$を消した場合と考えられる．Wiener 過程Wの前に$\varepsilon>0$をつけたとき，$V(P_0,P_1)$を$V^\varepsilon(P_0,P_1)$，$V^\varepsilon(P_0,P_1*g(\varepsilon,\cdot))$の最小解を$X^\varepsilon$と書く．これについて，以下のように$c(x,y)=|x-y|^2$の時のMongeの問題の別証明を得ている．

定理 2.3 ([28]) $c(x,y)=|x-y|^2$, $L=|u|^2$とする．任意の２次のモーメントを持つ$P_0,P_1\in\mathcal{P}(\mathbf{R}^d)$に対して，$P_0(dx)\ll dx$の時，ある凸関数$\varphi$が存在して，

$$\lim_{\varepsilon\to 0}E[\sup_{0\le t\le 1}|X^\varepsilon(t)-(X(0)+t(D\varphi(X(0))-X(0))|^2]=0.$$

特に，$D\varphi(x)$はMongeの問題の最小解になる．

3. 確率最適輸送問題２：各点周辺分布固定型

このセクションでは，各時刻での分布を固定した確率最適輸送問題を導入し，それに対する双対定理を紹介する．また，応用として，Nelsonの問題を与える．

3.1. Nelsonの問題

$b:[0,1]\times\mathbf{R}^d\mapsto\mathbf{R}^d$と$\{P_t\}_{0\le t\le 1}\subset\mathcal{M}_1(\mathbf{R}^d)$が存在して次のFokker-Planck equationを満たすとする: $\forall f\in C_b^2(\mathbf{R}^d)$,

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbf{R}^d}f(x)P_t(dx)=\Big(\frac{1}{2}\triangle f(x)+\langle b(s,x),Df(x)\rangle\Big)P_t(dx),\quad t\in(0,1).\tag{27}$$

定義 3.1 (Nelsonの問題[41]([4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 24, 38, 53]と文献参照)) (27)のbと$\{P_t\}_{0\le t\le 1}\subset\mathcal{M}_1(\mathbf{R}^d)$に対して次のSDEの弱解を構成せよ：

$$\begin{aligned} dX(t) &= b(t,X(t))dt+dW(t),\quad 0<t<1, \\ PX(t)^{-1} &= P_t,\quad 0\le t\le 1. \end{aligned}\tag{28}$$

この問題を少し変更して，次の問題を考える

定義 3.2 (確率最適輸送によるNelsonの問題) (27)の$\{P_t\}_{0\le t\le 1}\subset\mathcal{M}_1(\mathbf{R}^d)$に対してある$b_o$が存在して次のSDEが弱解を持つことを示せ：

$$\begin{aligned} dX(t) &= b_o(t,X(t))dt+dW(t),\quad 0<t<1, \\ PX(t)^{-1} &= P_t,\quad 0\le t\le 1. \end{aligned}\tag{29}$$

この問題を考えるために，次の確率最適輸送問題を考える．$\mathbf{P}:=\{P_t\}_{0\le t\le 1}\subset\mathcal{M}_1(\mathbf{R}^d)$に対して，

$$\mathbf{V}(\mathbf{P}):=\inf\Big\{E\Big[\int_0^1 L(X^\gamma(t),\gamma(t))dt\Big]\Big|PX^\gamma(t)^{-1}=P_t,0\le t\le 1\Big\}.\tag{30}$$

定理 3.1 ([31]) (A1) の下，任意の$\mathbf{P}:=\{P_t\}_{0\le t\le 1}\subset\mathcal{M}_1(\mathbf{R}^d)$に対して，

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(\mathbf{P}) &= \inf\Big\{\int_0^1\int_{\mathbf{R}^d}L(x,b(t,x))dtP_t(dx)\Big|b(t,x),P_t(dx)\text{ は (27) を満たす}\Big\} \\ &= \sup_{f\in C_b^\infty([0,1]\times\mathbf{R}^d)}\Big\{\int_0^1\int_{\mathbf{R}^d}f(t,x)dtP_t(dx)-\int_{\mathbf{R}^d}\phi(0,x;f)P_0(dx)\Big\}. \end{aligned}$$

ここで，$\phi(t,x)=\phi(t,x;f)$ は次の HJB 方程式の古典解：$\phi(1,x)=0$,

$$\frac{\partial\phi(t,x)}{\partial t}+\frac{1}{2}\triangle_x\phi(t,x)+H(x,D_x\phi(t,x))+f(t,x)=0. \tag{31}$$

$\mathbf{V}(\mathbf{P})$ が有限な時，$\mathbf{V}(\mathbf{P})$ の最小解 $\{X(t)\}_{0\le t\le 1}$ は存在して，(29) を満たす．実際，(31) の最大化列 $\{\phi_n\}_{n\ge 1}$ をとると，

$$b_o(t,x)=\lim_{n\to\infty}D_zH(x,D_x\phi_n(t,x)),\quad dtP_t(dx)-a.e.. \tag{32}$$

注意 3.1 確率最適輸送による Nelson の問題については，前節の確率最適輸送問題を小さな時間区間に対して考え，その連続極限をとるという方法もある ([24, 29] 参照).

(31) より，Nelson の問題に対する（未解決な）汎関数方程式をうる：

定義 3.3 (Nelson の問題に対する汎関数方程式 [31]) $\{P_t\}_{0\le t\le 1}\subset\mathcal{M}_1(\mathbf{R}^d)$ に対して，次を満たす $f\in L^1(dtP_t(dx),[0,1]\times\mathbf{R}^d)$ を求めよ: $t\in(0,1]$,

$$\frac{P_t(dy)}{dy}=\int_{\mathbf{R}^d}P_0(dx)\frac{g(t,y-x)E[\exp(\int_0^1 f(s,x+W(s))ds)|(t,x+W(t)=y)]}{E[\exp(\int_0^1 f(s,x+W(s))ds)]}. \tag{33}$$

4. Coupled Fokker-Planck-Hamilton-Jacobi-Bellman eqn.

h-path 過程 $X(t)$ の $h(t,x)=h(t,x,PX(t)^{-1})$ が実は $t,x,PX(t)^{-1}$ の可測関数であり，その周辺分布 $PX(t)^{-1}$ が Mean field PDE system と言われる Coupled Fokker-Planck-Hamilton-Jacobi-Bellman Eqn を満たすことはページ数の関係で省略する．時間があれば，講演では触れたい（[34] 参照）.

参考文献

[1] Bensoussan, A., Frehse, J., Yam, P.: Mean Field Games and Mean Field Type Control Theory. SpringerBriefs in Mathematics. Springer, New York (2013)

[2] Bernstein, S.: Sur les liaisons entre les grandeurs alétoires. Verh. des intern. Mathematikerkongr. Zurich 1932, Band **1**.

[3] Beurling, A.: An Automorphism of Product Measures. Ann. of Math. **72**, 189-200 (1960)

[4] Carlen, E.A.: Conservative diffusions. Commun Math Phys **94**, 293-315 (1984)

[5] Carlen, E.A. : Existence and sample path properties of the diffusions in Nelson's stochastic machanics. In: Stochastic processes-Mathematics and Physics, Bielefeld 1984, (eds. S. Albeverio, Ph. Blanchard and L. Streit), Lecture Notes in Math., **1158**, Springer-Verlag, 1986, pp. 25-51.

[6] Carmona, R.: Probabilistic construction of Nelson processes, In: Proc. Probabilistic Methods in Mathematical Physics, Katata 1985, (eds. K. Itô and N. Ikeda), Kinokuniya, 1987, pp. 55-81.

[7] Cattiaux, P., Léonard, C.: Minimization of the Kullback information of diffusion processes. Ann Inst H Poincaré Probab Statist **30**, 83-132 (1994)

[8] Cattiaux, P., Léonard, C.: Correction to: "Minimization of the Kullback information of diffusion processes" [Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist. 30 (1994), no. 1, 83–132]. Ann Inst H Poincaré Probab Statist **31**, 705–707 (1995)

[9] Cattiaux, P., Léonard, C.: Large deviations and Nelson processes. Forum Math **7**, 95–115 (1995)

[10] Cattiaux, P., Léonard, C.: Minimization of the Kullback information for some Markov processes. In: Azema, J. etal. (eds.): Séminaire de Probabilités, XXX, Lecture Notes in Math., 1626. Berlin Heidelberg New York Tokyo: Springer-Verlag 1996, pp. 288–311

[11] Chen, Y., Georgiou, T., Pavon, M.: Entropic and displacement interpolation: a computational approach using the Hilbert metric. SIAM J. Appl. Math. **76**, no. 6, 2375-2396 (2016)

[12] Dai Pra, P. : A stochastic control approach to reciprocal diffusion processes. Appl. Math. Optim. **23**, 313-329 (1991)

[13] 江沢 洋: 物理学の視点一力学 確率 量子．培風館，東京 (1983)

[14] Fleming, W. H., Soner, H. M.: Controlled Markov Processes and Viscosity Solutions, 2nd ed. Springer, New York (2006)

[15] Fortet, R.: Résolution d'un Système d'équations de M. Schroedinger. J. Math. Pures Appl. **IX**, 83-105 (1940)

[16] 保江邦夫: 量子力学と最適制御理論一確率量子化と確率変分学への誘い．海鳴社，東京 (2008).

[17] Jamison, B.: Reciprocal Processes. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete **30**, 65–86 (1974)

[18] Jamison, B.: The Markov process of Schrödinger. Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete **32**, 323–331 (1975)

[19] Krener, A. J. : Reciprocal diffusions and stochastic differential equations of second order. Stochastics **107** (4), 393-422 (1988).

[20] Krener, A. J. : Reciprocal diffusions in flat space. Probability Theory and Related Fields **107** (2), 243-281 (1997).

[21] Lasry, J-M., Lions, P. L.: Mean field games. Jpn. J. Math. **2**, 229-260 (2007)

[22] Léonard, C. : From the Schrödinger problem to the Monge-Kantorovich problem. J. Funct. Anal. **262**, 1879–1920 (2012)

[23] Léonard, C. : A survey of the Schrödinger problem and some of its connections with optimal transport. Special Issue on Optimal Transport and Applications. Discrete Contin. Dyn. Syst. **34**, 1533–1574 (2014)

[24] Mikami, T.: Variational processes from the weak forward equation. Commun. Math. Phys. **135**, 19–40 (1990)

[25] Mikami, T.: Markov marginal problems and their applications to Markov optimal control. In: McEneaney, W. M., Yin, G. G., Zhang, Q. (eds.) Stochastic Analysis, Control, Optimization and Applications. A Volume in Honor of W. H. Fleming, 457-476. Boston: Birkhauser 1999.

[26] Mikami, T.: Dynamical systems in the variational formulation of the Fokker-Planck equation by the Wasserstein metric. Appl. Math. Optim. **42**, 203-227 (2000)

[27] Mikami, T.: Optimal control for absolutely continuous stochastic processes and the mass transportation problem. Electron. Comm. Probab. **7**, 199-213 (2002)

[28] Mikami, T.: Monge's problem with a quadratic cost by the zero-noise limit of h-path processes. Probab. Theory Related Fields **129**, 245–260 (2004)

[29] Mikami, T.: Semimartingales from the Fokker-Planck equation. Appl. Math. Optim. **53**, 209–219 (2006)

[30] 三上敏夫: 確率力学としての最適輸送問題. 日本数学会「数学」第５８巻第４号 (2006) 364–383.

[31] Mikami, T.: Marginal problem for semimartingales via duality. In: Giga, Y. , Ishii, K., Koike, S. et al. (eds) International Conference for the 25th Anniversary of Viscosity Solutions, Gakuto International Series. Mathematical Sciences and Applications **30**, pp.

133–152. Gakkotosho, Tokyo (2008)

[32] Mikami, T.: A characterization of the Knothe-Rosenblatt processes by a convergence result. SIAM J. Cont. Optim. **50** (4), 1903-1920 (2012)

[33] Mikami, T.: Two end points marginal problem by stochastic optimal transportation. SIAM J. Cont. Optim. **53** (4), 2449-2461 (2015)

[34] Mikami, T.: Regularity of Schrödinger's functional equation and mean field PDEs for h-path processes. arXiv:1703.07021.

[35] Mikami, T., Thieullen, M.: Duality theorem for the stochastic optimal control problem. Stochastic Process. Appl. **116**, 1815–1835 (2006)

[36] Mikami, T., Thieullen, M.: Optimal Transportation Problem by Stochastic Optimal Control. SIAM J. Cont. Optim. **47**, 1127-1139 (2008)

[37] Monge, G.: Mémoire sur la théorie des déblais et des remblais, HIstoire de l'Académie Royale des Sciences de Paris, 666-704 (1781)

[38] Nagasawa, M.: Transformations of diffusion and Schrödinger process, Probab. Theory Related Fields, **82**, 109-136 (1989)

[39] 長澤正雄: シュレーディンガーのジレンマと夢一確率過程と波動力学. 森北出版, 東京 (2003)

[40] 長澤正雄: 増補改訂版　マルコフ過程論による新しい量子理論. 創英社/三省堂書店, 東京 (2015).

[41] Nelson, E: Dynamical Theories of Brownian Motion. Princeton Univ Pr, Princeton (1967)

[42] Nelson, E: Quantum Fluctuations. Princeton Univ Pr, Princeton (1985)

[43] Rachev, S.T., Rüschendorf, L.: Mass transportation problems, Vol. I: Theory, Vol. II: Application. Springer-Verlag, Berlin (1998)

[44] Roelly, S., Thieullen, M.: A characterization of reciprocal processes via an integration by parts formula on the path space. Probability Theory and Related Fields **123** (1), 97-120 (2002)

[45] Roelly, S., Thieullen, M.: Duality formula for the bridges of a brownian diffusion: Application to gradient drifts. Stochastic Processes and their Applications **115** (10), 1677-1700 (2005)

[46] Rüschendorf, L., Thomsen, W.: Note on the Schrödinger equation and I-projections. Statist. Probab. Lett. **17**, 369–375 (1993)

[47] Schrödinger, E.: Ueber die Umkehrung der Naturgesetze. Sitz. Ber. der Preuss. Akad. Wissen., Berlin, Phys. Math., p. 144 (1931)

[48] Schrödinger, E.: Théorie relativiste de l'electron et l'interprétation de la mécanique quantique. Ann. Inst. H. Poincaré **2**, 269-310 (1932)

[49] Tan, X., Touzi, N.: Optimal transportation under controlled stochastic dynamics. Ann. Probab. **41**, 3201–3240 (2013)

[50] Thieullen, M.: Second order stochastic differential equations and non-Gaussian reciprocal diffusions. Probability Theory and Related Fields **97** (1-2), 231-257 (1993).

[51] Villani, C.: Optimal Transport: Old and New. Springer-Verlag, Berlin, 2008.

[52] Zambrini, J. C.: Variational processes. In: Albeverio, S., etal. (eds.) Stochastic processes in classical and quantum systems (Ascona, 1985), Lecture Notes in Phys. **262**, pp. 517–529. Springer, Berlin (1986).

[53] Zheng, W.A.: Tightness results for laws of diffusion processes application to stochastic mechanics. Ann. Inst. Henri Poincaré **21**, 103-124 (1985)