

探検 深谷圏

太田 啓史 (名古屋大学多元数理)

1. 対象が1つの深谷圏＝ラグランジアン部分多様体に付随する A_∞ 代数

1.1. 係数環/体

まず、我々が使う係数環とその商体を導入する。 R を単位元をもつ可換環とする。 T を不定元として

$$\Lambda^R = \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} a_i T^{\lambda_i} \mid a_i \in R, \lambda_i \in \mathbb{R}, \lim_{i \rightarrow \infty} \lambda_i = +\infty \right\}$$

とおき、これを R 上の普遍ノビコフ体と呼ぶ。 Λ^R には

$$v_T\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i T^{\lambda_i}\right) = \inf_{a_i \neq 0} \lambda_i, \quad v_T(0) = +\infty$$

により非アルキメデスの付値 v_T が入り、 $\Lambda_0^R = \{x \in \Lambda^R \mid v_T(x) \geq 0\}$ は付値環となり R 上の普遍ノビコフ環と呼ぶ。この原稿では Remark 1.2 (1) 以外 $R = \mathbb{C}$ とし、その場合 Λ, Λ_0 などと書く。 Λ_0 は局所環。実際 $\Lambda_+ = \{x \in \Lambda_0 \mid v_T(x) > 0\}$ が Λ_0 の唯一の極大イデアルで $\Lambda_0/\Lambda_+ \cong \mathbb{C}$ となる。後の議論では、 $\lambda_i \in \mathbb{R}$ は擬正則円盤のシンプレクティック面積を表し、係数を $\Lambda_0/\Lambda_+ \cong \mathbb{C}$ に還元することは定値写像のみが寄与する古典的描像を考えることに対応する。また、付値 v_T を用いて Λ には T -進位相が入りそれによる種々の完備化を考える必要がある場合があるが、ここでは省略する。(例えば、Remark 3.6 (1) および [FOOO11] を参照。)

1.2. ラグランジアン部分多様体 L に付随する A_∞ 代数

(X, ω) を $2n$ 次元コンパクト¹ シンプレクティック多様体とし、 $L \subset X$ を向きづけられた相対スピン² な閉ラグランジアン部分多様体とする。 L の $\mathbb{C}$ 係数微分形式全体の空間を $\Omega(L)$ とし、 $\Omega(L; \Lambda) = \Omega(L) \otimes \Lambda$, $\Omega(L; \Lambda_0) = \Omega(L) \otimes \Lambda_0$ とおく。

Theorem 1.1 [FOOO3, FOOO4] 上のような任意のラグランジアン部分多様体 L に対し、 $\Omega(L; \Lambda_0)$ 上に 1_L を単位元³ とするフィルター付き A_∞ 代数の構造が入る。係数を $\Lambda_0/\Lambda_+ \cong \mathbb{C}$ に還元すると L のドラム DGA と A_∞ 代数としてホモトピー同値。

すなわち、任意の $k = 0, 1, 2, \dots$ に対し、次数 $+1$ の写像の列⁴

$$\mathbf{m}_k : B_k \Omega(L; \Lambda_0)[1] := \underbrace{\Omega^*(L; \Lambda_0)[1] \otimes \cdots \otimes \Omega^*(L; \Lambda_0)[1]}_{k \text{ times}} \longrightarrow \Omega^*(L; \Lambda_0)[1]$$

が存在し、次の関係式 (A_∞ 関係式) を満たす

$$\sum_{k_1+k_2=k+1} \sum_i (-1)^{\epsilon(i)} \mathbf{m}_{k_1}(x_1 \otimes \cdots \otimes \mathbf{m}_{k_2}(x_i \otimes \cdots \otimes x_{i+k_2-1}) \otimes \cdots \otimes x_k) = 0. \quad (1.1)$$

2017年度秋季数学会企画特別講演。科研費(課題番号:15H02054)の助成を受けている。Ver.20170731.

¹ コンパクトでなくても $\mathbb{C}^n$ などある種の凸性をもつものなら可。

² L が相対スピンであるとは $\exists st \in H^2(X; \mathbb{Z}_2)$ s.t. $st|_L \equiv w_2(L)$ をみたすこと。 L に境界をもつ擬正則円盤のモジュライ空間に向きが入るために必要 [FOOO4, Chapter 8]。

³ 1_L は L 上恒等的に 1 である定数関数。 $\mathbf{e}$ が単位元であるとは $\mathbf{m}_2(\mathbf{e}, x) = (-1)^{\deg x} \mathbf{m}_2(x, \mathbf{e}) = x$, $\mathbf{m}_k(\cdots, \mathbf{e}, \cdots) = 0$ ($k \neq 2$) を満たすこと。

⁴ $[1]$ は次数 1 ずらしを表す。 $C^d[1] = C^{d+1}$ 。

但し $\epsilon(i) = \deg' x_1 + \cdots + \deg' x_{i-1}$ ($\deg' = \deg + 1$)。以下符号は割愛する。フィルトレーションは $\mathcal{F}^\lambda \Lambda := \{x \in \Lambda \mid v_T(x) \geq \lambda\}$ から引き起こされるものを入れる。

(1.1) 式は次の (1.3) 式と同値である。 $k \leq m$ のとき、

$$\widehat{\mathbf{m}}_k(x_1 \otimes \cdots \otimes x_m) = \sum_{i=1}^{m-k+1} (-1)^{\epsilon(i)} x_1 \otimes \cdots \otimes \mathbf{m}_k(x_i \otimes \cdots \otimes x_{i+k-1}) \otimes \cdots \otimes x_m$$

とおき、 $k > m$ のとき、 $\widehat{\mathbf{m}}_k = 0$ とおく。但し、 $k = 0$ のときは、

$$\widehat{\mathbf{m}}_0(x_1 \otimes \cdots \otimes x_m) = \sum_{i=1}^{m+1} (-1)^{\epsilon(i)} x_1 \otimes \cdots \otimes x_{i-1} \otimes \mathbf{m}_0(1) \otimes x_i \otimes \cdots \otimes x_m$$

である。

$$\widehat{\mathbf{m}} = \sum_{k=0}^{\infty} \widehat{\mathbf{m}}_k \quad (1.2)$$

とおくと、これは $\oplus_k B_k \Omega(L; \Lambda_0)$ の T 進位相による完備化 $\widehat{B} \Omega(L; \Lambda_0)$ 上の余微分 (coderivation) を定める。

$$\widehat{\mathbf{m}} \circ \widehat{\mathbf{m}} = 0. \quad (1.3)$$

Remark 1.2 (1) $\mathbf{m}_k$ の構成には種数 0 の境界付き semi stable curve からの安定写像のモジュライ空間を用いる。1.4 節でもう少し一般的な状況でその構成法を説明する。[\[FOOO3, FOOO4\]](#) では、 L の $\Lambda_0^{\mathbb{Q}}$ 係数の特異チェイン複体のある部分複体上に A_∞ 代数の構造を構成した。横断正則性の問題を解決するために、そこでは種数 0 の境界付き安定写像の種々のモジュライ空間の倉西構造の多価摂動を用いた。ここでは **CF-摂動** (continuous family of perturbations) を用いてドラムモデルで話をする。CF-摂動は、一部 [\[FOOO4, FOOO8\]](#) でも導入していたが、[\[FOOO17, FOOO19\]](#) でより一般的な状況でも使い易いように整備した。CF-摂動を使うと、[\[FOOO3, FOOO4\]](#) で行っていた込み入った帰納的な構成が簡明になったり、また marked points の巡回対称性が得られ marked points の忘却写像がよい振る舞いをするようになるため、ドラムモデルでは単位元の存在⁵が従う [\[F3\]](#)。(その代わり係数は $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ となる。一方、CF-摂動ではなく [\[FOOO3, FOOO4\]](#) の議論を用いれば、 X がある条件 (spherically positive⁶) をみたせば多価ではなく一価摂動で A_∞ 代数を構成することができ、そのときは係数を $\Lambda_0^{\mathbb{Z}}$ あるいは $\Lambda_0^{\mathbb{Z}_2}$ にとることができる [\[FOOO13\]](#)。) なお、モース複体上に A_∞ 代数を構成することもできる [\[FOOO5\]](#)。

(2) どのモデルを使うにせよ、 A_∞ 構造は一旦はチェンレベル (微分形式レベル) で構成される。一旦チェイン上に構成できれば、障害理論やホモロジー摂動と呼ばれる標準的な方法 ([\[K\]](#), [\[KS\]](#) など) によりコホモロジー $H^*(L; \Lambda_0)$ 上に A_∞ 構造 $\mathbf{m}^{\text{can}}$ を作ることができる。

$$\mathbf{m}_k^{\text{can}} : \underbrace{H^*(L; \Lambda_0)[1] \otimes \cdots \otimes H^*(L; \Lambda_0)[1]}_{k \text{ times}} \longrightarrow H^*(L; \Lambda_0)[1]$$

これを [\[FOOO3, FOOO4\]](#) では **canonical model**⁷ と呼んだ。canonical model に移れば、特異チェインモデルの場合でも L の基本類 $\mathbf{e} := PD[L] \in H^0(L; \Lambda_0)$ は A_∞ 代数の

⁵特異チェインモデルでは L の基本サイクルはホモトピー単位元。単位元までは言えない [\[FOOO3, FOOO4\]](#)。

⁶定値でない任意の J -holomorphic map $u : S^2 \rightarrow X$ は $c_1(TX)[u] > 0$ となるような ω -compatible almost complex structure J が存在するもの。例えば Fano 多様体。

⁷minimal model と呼ぶ文献が多い。

単位元になる [FOOO3, Theorem A]。canonical model は有限次元であり、もとのチェインレベルの A_∞ 代数よりいろいろと代数的な扱いは易しくなるが、一方 $\mathbf{m}^{\text{can}}$ を $\mathbf{m}$ を用いて明示的に書き下すことは、樹木の足し上げを書き下す必要があり一般には難しい。(例えば、[FOOO5]、[FOOO3, Section 7.4] を参照。)

(3) 一気に A_∞ 構造を構成するのではない。安定写像の像のシンプレクティック面積を用いたある離散半順序集合 (離散モノイド) を考えることが擬正則写像の Gromov コンパクト性定理から可能であり、それに関する帰納的な構成を行う。帰納的なステップを進めるところではホモトピー的な議論 (障害理論) を組み合わせて A_∞ 構造を構成する [FOOO4]。安定写像のモジュライ空間から離散モノイド構造が現れることは Gromov コンパクト性定理の帰結の肝である。Theorem 1.1 の A_∞ 構造は、詳しく言えば、ある離散モノイド G に付随して構成され、その結果得られる A_∞ 構造を我々は **G -gapped filtered A_∞ 代数** と呼んだ。[FOOO3, Condition 3.1.6, Definition 3.2.26] を参照。

(4) 以上の構成で技術的に基礎となるのは倉西構造の理論による仮想基本チェインの方法である。[FOOO3, FOOO4] より詳細な記述が必要ならば [FOOO15]、特に [FOOO16], [FOOO18] をご覧頂きたい。また、[FOOO17, FOOO19] は CF-摂動を基軸に、倉西構造の理論を公理化、パッケージ化して使い易いように再構築するものである。

1.3. weak Maurer-Cartan 方程式, ポテンシャル関数, Floer cohomology

$(\Omega(L, \Lambda_0), \mathbf{m})$ を Theorem 1.1 の filtered A_∞ 代数とする。 $b \in \Omega^{\text{odd}}(L, \Lambda_0)$ を用いて A_∞ 代数は以下のように変形できる⁸。以下混乱がない場合テンソル $\otimes$ の記号を省略する。

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_k^b(x_1, \dots, x_k) &= \sum_{\ell_0, \dots, \ell_k} \mathbf{m}_{k+\sum \ell_i}(\underbrace{b, \dots, b}_{\ell_0}, x_1, \underbrace{b, \dots, b}_{\ell_1}, \dots, \underbrace{b, \dots, b}_{\ell_{k-1}}, x_k, \underbrace{b, \dots, b}_{\ell_k}) \\ &= \mathbf{m}(e^b x_1 e^b x_2 \dots x_{k-1} e^b x_k e^b) \end{aligned}$$

とおと、 $\mathbf{m}_k^b$ はまた A_∞ 構造を定める。但し

$$e^b := 1 + b + b \otimes b + \dots + b \otimes \dots \otimes b + \dots \quad (1.4)$$

とおいた。さて、 A_∞ 関係式 (1.1) において、 $\mathbf{m}_0 \neq 0$ ならば一般には $(\mathbf{m}_1)^2 \neq 0$ であることに注意する。そこで、 $\mathbf{m}_k$ を変形して $(\mathbf{m}_1^b)^2 = 0$ なるための b の条件を求めよう。 A_∞ 代数の単位元 1_L を用いると次の定義に至る。

Definition 1.3 $b \in \Omega^{\text{odd}}(L; \Lambda_0)$ に対し、

$$\mathbf{m}(e^b)(= \mathbf{m}_0^b(1)) = c_b 1_L, \quad \text{for } \exists c_b \in \Lambda_+$$

を **weak Maurer-Cartan 方程式** といい、その解の集合を $\mathcal{MC}_{\text{weak}}(L)$ とおく⁹。

$\mathcal{MC}_{\text{weak}}(L) \neq \emptyset$ の時、 L を weakly unobstructed という。更にこの時、

$$\mathfrak{P}\mathfrak{D}_L : \mathcal{MC}_{\text{weak}}(L) \longrightarrow \Lambda_+$$

⁸ $v_T > 0$ のところで先の T -進位相を用い、 $v_T = 0$ のところでは通常の $\mathbb{C}$ の位相を用いる。

⁹ 正確にはそのゲージ同値類の集合。[FOOO3, Chapter 4] を参照。また、 $\mathbf{m}(e^b) = 0$ を Maurer-Cartan 方程式という。因に、[FOOO3] では障害類の系列 $[o_k(L)] \in H^{\text{even}}(L; \mathbb{Q})$ がコホモロジー類として消えている時に、それをバウンドするコチェインの系列を用いて幾何学的に Maurer-Cartan 方程式の解を構成する方法を与えており、そのことから Maurer-Cartan 方程式の解を **bounding cochain** と呼んだ。記号 b はそれに由来する。

を $m(e^b) = \mathfrak{P}\mathfrak{D}_L(b)1_L$ で定義し、 $\mathfrak{P}\mathfrak{D}_L$ を L のポテンシャル関数と呼ぶ¹⁰。

次の補題は単位元の定義および m_k^b に対する A_∞ 関係式より直ちに従う。

Lemma-Definition 1.4 L が weakly unobstructed ならば、任意の $b \in \mathcal{MC}_{\text{weak}}(L)$ に対し、 $m_1^b \circ m_1^b = 0$ が成り立つ。このとき、

$$HF((L, b); \Lambda_0) := H(\Omega(L; \Lambda_0), m_1^b) \quad (1.5)$$

とおき、これを (L, b) の Floer cohomology とよぶ。

weak Maurer-Cartan 元が 2 つある場合、次が成り立つ。

Proposition 1.5

$$\delta_{b_1, b_0}(x) := \sum_{k_1, k_0 \geq 0} m_{k_1+k_0+1}(\underbrace{b_1, \dots, b_1}_{k_1}, x, \underbrace{b_0, \dots, b_0}_{k_0})$$

とおく。もし $b_i \in \mathcal{MC}_{\text{weak}}(L)$ ならば、

$$(\delta_{b_1, b_0} \circ \delta_{b_1, b_0})(x) = (-\mathfrak{P}\mathfrak{D}_L(b_1) + \mathfrak{P}\mathfrak{D}_L(b_0))x \quad (1.6)$$

が成り立つ¹¹。特に $\mathfrak{P}\mathfrak{D}_L(b_1) = \mathfrak{P}\mathfrak{D}_L(b_0)$ ならば、 $\delta_{b_1, b_0} \circ \delta_{b_1, b_0} = 0$ 。

1.4. バルク変形: 閉開写像 (closed-open map) q

1.2, 1.3 節にでてきた様々なもの (A_∞ 代数, $\mathcal{MC}_{\text{weak}}(L)$, $\mathfrak{P}\mathfrak{D}_L$ など) を、シンプレクティック多様体 X の各サイクル b により変形することができる [FOOO3, Subsection 3.8.5]。これを我々はバルク変形と呼んだ。次節以降の話もみな、バルク変形した族の話として捉えることができる。バルク変形を用いた応用として、[FOOO8], [FOOO10], [FOOO11], [FOOO14] をあげておく。[FOOO11] については Remark 3.6 (3) を参照。バルク変形は、後半でも重要な働きをする閉開写像 q を用いて定義される。ここではその構成を簡単に述べる。種数 0 で、 ℓ 個の interior marked points, $k+1$ 個の boundary marked points をもった境界付き semi-stable curve $(\Sigma, \vec{z}, \vec{z}^+)$ からの安定写像 w のモジュライ空間 $\mathcal{M}_{k+1, \ell}^{\text{main}}(L, \beta)$ (ただし $\beta \in H_2(X, L; \mathbb{Z})$) を考える。すなわち、

$$\mathcal{M}_{k+1, \ell}^{\text{main}}(L, \beta) := \{((\Sigma, \vec{z}, \vec{z}^+), w)\} / \sim$$

ここで、

- (1) Σ は連結な境界 $\partial\Sigma$ を一つもつ種数 0 (単連結) の semi-stable curve で、いくつかの disk D^2 と sphere S^2 の connected union で、任意の 2 つの disk components は境界の高々 1 点 (その点を boundary node と呼ぶ) で交わり、disk component と sphere component は disk の内点の高々 1 点 (その点を interior node と呼ぶ) で交わる。3 つの components が 1 点で交わることはない。

¹⁰ Maslov 指数が 2 未満の擬正則円盤がない状況 (例えば Theorem 3.2 (1) の状況) で、canonical model におけるポテンシャル関数の一般的表示は [FOOO10, Appendix 1] に与えてある。

¹¹ δ_{b_1, b_0} は $\mathfrak{P}\mathfrak{D}_L$ の行列因子化を与える。

- (2) $\vec{z} = (z_0, \dots, z_k)$, $z_i \in \partial\Sigma$ は互いに異なる $k+1$ 個の boundary marked points で、boundary node ではない。順番は cyclic order (反時計回り)。
- (3) $\vec{z}^+ = (z_1^+, \dots, z_\ell^+)$, $z_i^+ \in \text{Int } \Sigma$ は互いに異なる ℓ 個の interior marked points で、interior node ではない。
- (4) $w : (\Sigma, \partial\Sigma) \rightarrow (X, L)$ は $[w] = \beta$ なる連続写像で、 Σ の各 component 上で J -holomorphic。
- (5) $((\Sigma, \vec{z}, \vec{z}^+), w) \sim ((\Sigma', \vec{z}', \vec{z}'^+), w') \Leftrightarrow \exists \varphi : \Sigma \rightarrow \Sigma$ biholomorphic map で、 $\varphi(z_i) = z'_i, \varphi(z_j^+) = z_j'^+, w = w' \circ \varphi$ をみたす。(このような φ を $((\Sigma, \vec{z}, \vec{z}^+), w)$ の自己同型写像とよぶ。)
- (6) **(安定性)** $((\Sigma, \vec{z}, \vec{z}^+), w)$ の自己同型写像の群は有限群。

このとき、評価写像

$$\begin{aligned} \text{ev}_i &: \mathcal{M}_{k+1,\ell}^{\text{main}}(L; \beta) \longrightarrow L, \quad i = 0, 1, \dots, k, \\ \text{ev}_j^+ &: \mathcal{M}_{k+1,\ell}^{\text{main}}(L; \beta) \longrightarrow X, \quad j = 1, \dots, \ell \end{aligned}$$

を $\text{ev}_i((\Sigma, \vec{z}, \vec{z}^+), w) = w(z_i)$ および $\text{ev}_j^+((\Sigma, \vec{z}, \vec{z}^+), w) = w(z_j^+)$ により定義し、

$$\text{ev}_\partial = (\text{ev}_1, \dots, \text{ev}_k), \quad \text{ev}_{\text{int}} = (\text{ev}_1^+, \dots, \text{ev}_\ell^+)$$

とおく。いま、interior marked points は対称群で同一視するため、

$$E_\ell \Omega(X; \Lambda_0) = B_\ell \Omega(X; \Lambda_0) / \sim := \underbrace{\Omega^*(X; \Lambda_0) \otimes \dots \otimes \Omega^*(X; \Lambda_0)}_{\ell \text{ times}} / \sim$$

とおく。ここで $\sigma \cdot \mathbf{h} \sim \mathbf{h}$ ($\sigma \in \mathfrak{S}_\ell, \mathbf{h} \in B_\ell \Omega(X; \Lambda_0)$) である。 $\mathbf{b} \in \Omega(X; \Lambda_0)$ に対し、

$$e^{\mathbf{b}} := \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{\mathbf{b}^{\otimes \ell}}{\ell!} \quad (1.7)$$

と¹² おく。¹³ 以上の準備の下で閉開写像

$$\mathbf{q}_{\ell,k} : E_\ell \Omega(X; \Lambda_0) \otimes B_k \Omega(L; \Lambda_0) \longrightarrow \Omega(L; \Lambda_0)$$

は次のように定義される。まず、各 $\beta \in H_2(X, L; \mathbb{Z})$ に対し、写像

$$\mathbf{q}_{\ell,k;\beta} : E_\ell \Omega(X; \mathbb{C}) \otimes B_k \Omega(L; \mathbb{C}) \longrightarrow \Omega(L; \mathbb{C})$$

を

$$\mathbf{q}_{\ell,k;\beta}(\mathbf{h} \otimes \mathbf{x}) := (\text{ev}_0)_!(\text{ev}_{\text{int}}^* \mathbf{h} \wedge \text{ev}_\partial^* \mathbf{x}) \quad (1.8)$$

により定義する。ここで $(\text{ev}_0)_!$ は評価写像 $\text{ev}_0 : \mathcal{M}_{k+1,\ell}(L, \beta) \rightarrow L$ に沿う積分であるが、評価写像は一般には必ずしも submersion ではない。 $(\text{ev}_0)_!$ を定義するためには、 $\mathcal{M}_{k+1,\ell}(L, \beta)$ の上の倉西構造を考えその上の多価摂動、あるいは CF-摂動をとる必要がある。¹⁴ 詳しくは [FOOO8, FOOO17, FOOO3] をみて頂きたい。

¹² $v_T = 0$ のところは普通の $\mathbb{C}$ の位相、 $v_T > 0$ では T 進位相で収束。

¹³ [FOOO3] では $E_\ell \Omega(X; \Lambda_0)$ を $\mathfrak{S}_\ell$ 不変部分空間として定義したが、ここでは [FOOO11] に倣い商空間として定義した。これに伴い [FOOO3] では $\mathbf{b}$ に対しても (1.4) のときと同じく「指数関数」の分母に階乗は現れなかったが、ここでは階乗が現れる。この指数関数はシャッフルによる余積の構造と相性がよい。[FOOO11, Remark 2.3.9] を参照。

¹⁴ 3節で扱う (複素 n 次元) トーリック多様体の中の T^n 軌道の場合は T^n 不変な摂動をとる。

Definition 1.6

$$q_{\ell,k} = \sum_{\beta} q_{\ell,k;\beta} T^{\omega[\beta]}.$$

Lemma-Definition 1.7 $\mathfrak{b} \in \widehat{\oplus_{\ell}} E_{\ell} \Omega^{\text{cl}}(X; \Lambda_0)$ ¹⁵ に対し、

$$q_k^{\mathfrak{b}}(x_1, \dots, x_k) = q(e^{\mathfrak{b}}, x_1, \dots, x_k) := \sum_{\ell=0}^{\infty} q_{\ell,k} \left(\frac{\mathfrak{b}^{\ell}}{\ell!}, x_1, \dots, x_k \right) \quad (1.9)$$

とおくと、これはまた $\Omega(L; \Lambda_0)$ 上に 1_L を単位元とするフィルター付き A_{∞} 代数の構造を定める。 $\mathfrak{b} = 0$ のときが Theorem 1.1 のフィルター付き A_{∞} 代数の構造に他ならない：

$$q_k^{\mathfrak{b}=0} = m_k.$$

$q_k^{\mathfrak{b}}$ を $m_k^{\mathfrak{b}}$ と書き、 m_k の $\mathfrak{b}$ による**バルク変形**とよぶ。

1.3 節のことをバルク変形付きで書くと以下のようになる。

Definition 1.8 $b \in \Omega^{\text{odd}}(L; \Lambda_0)$, $\mathfrak{b} \in \widehat{\oplus_{\ell}} E_{\ell} \Omega^{\text{cl}}(X; \Lambda_0)$ に対し、

$$m^{\mathfrak{b}}(e^b) (= m_0^{\mathfrak{b},b}(1)) = c_{\mathfrak{b},b} 1_L, \quad \text{for } \exists c_{\mathfrak{b},b} \in \Lambda_+$$

を $\mathfrak{b}$ **バルク変形 weak Maurer-Cartan 方程式** といい、その解 (のゲージ同値類) の集合を $\mathcal{MC}_{\text{weak}}(\mathfrak{b}, L)$ とおく。 $\mathcal{MC}_{\text{weak}}(\mathfrak{b}, L) \neq \emptyset$ の時、 L を $\mathfrak{b}$ バルク変形後 weakly unobstructed¹⁶ という。更にこの時、

$$\mathfrak{P}\mathfrak{D}_L^{\mathfrak{b}} : \mathcal{MC}_{\text{weak}}(\mathfrak{b}, L) \longrightarrow \Lambda_+$$

を $m^{\mathfrak{b}}(e^b) = \mathfrak{P}\mathfrak{D}_L^{\mathfrak{b}}(b) 1_L$ で定義し、 $\mathfrak{P}\mathfrak{D}_L^{\mathfrak{b}}$ を L の $\mathfrak{b}$ **バルクポテンシャル関数** と呼ぶ。

Lemma-Definition 1.9 L が $\mathfrak{b}$ バルク変形後 weakly unobstructed ならば、任意の $b \in \mathcal{MC}_{\text{weak}}(\mathfrak{b}, L)$ に対し、 $m_1^{\mathfrak{b},b} \circ m_1^{\mathfrak{b},b} = 0$ が成り立つ。このとき、

$$HF((L, \mathfrak{b}, b); \Lambda_0) := H(\Omega(L; \Lambda_0), m_1^{\mathfrak{b},b}) \quad (1.10)$$

とおき、これを (L, b) の $\mathfrak{b}$ **バルク (変形された) Floer cohomology** とよぶ。

2. 対象が2つの場合＝対 (L_1, L_0) に付随する A_{∞} 双加群

L_1, L_0 を X のラグランジアン部分多様体で Theorem 1.1 の通りとする。Theorem 1.1 より、各 L_1, L_0 に対し A_{∞} 代数 $(\Omega(L_1, \Lambda_0), m^1)$, $(\Omega(L_0, \Lambda_0), m^0)$ が構成されるが、このとき $(\Omega(L_1, \Lambda_0), m^1)$, $(\Omega(L_0, \Lambda_0), m^0)$ が左右から作用する A_{∞} bimodule が構成される。 L_1, L_0 が weakly unobstructed でありかつ $b_i \in \mathcal{MC}_{\text{weak}}(L_i)$ が $\mathfrak{P}\mathfrak{D}_{L_1}^{\mathfrak{b}_1}(b_1) = \mathfrak{P}\mathfrak{D}_{L_0}^{\mathfrak{b}_0}(b_0)$ を満たす時、対 $((L_1, b_1), (L_0, b_0))$ の Floer cohomology が定義される。これはシンプレクティック幾何の応用上で大切な不変量であるが、紙数の関係で割愛する。[FOOO3, FOOO4] をご覧頂きたい。後で述べる深谷圏はこれを更に一般化したものである。

¹⁵ $\widehat{\oplus_{\ell}}$ は $\oplus_{\ell}$ の完備化。 Ω^{cl} は閉形式を表す。

¹⁶ $c_{\mathfrak{b},b} = 0$ のとき、バルク変形後 unobstructed という。

3. トーリック多様体

この節では X が射影的なトーリック多様体で、そのラグランジアン部分多様体としてトーラス軌道の場合を考える。[FOOO7], [FOOO8], [FOOO11] の結果である¹⁷。

$\dim_{\mathbb{C}} X = n$ とする。 X のモーメント写像を π 、その像を P とする。

$$\pi : X \rightarrow P \subset \mathbb{R}^n$$

像 P は実 n 次元の凸多面体であることが知られている¹⁸。 $u \in \text{Int } P$ に対し $L(u) := \pi^{-1}(u)$ とおくと、これは丁度 T^n 作用の軌道であり、 T^n と微分同相なラグランジアン部分多様体となる。ここではラグランジアントーラスファイバーと呼ぶ。

Proposition 3.1 [FOOO7] (1) 任意の $u \in \text{Int } P$ に対し、 $L(u)$ は weakly unobstructed。
(2)

$$\frac{H^1(L(u); \Lambda_0)}{H^1(L(u); 2\pi\sqrt{-1}\mathbb{Z})} \subset \mathcal{MC}_{\text{weak}}(L(u)).$$

以下、ポテンシャル関数 $\mathfrak{PD}_{L(u)}$ を Proposition 3.1 (2) の左辺に制限したものと同じ $\mathfrak{PD}_{L(u)}$ で書くことにする。いま、 $\mathbf{e}_i = PD(T^{i-1} \times \text{pt} \times T^{n-i}) \in H^1(T^n; \mathbb{Z})$ とおくと、任意の $H^1(L(u); \Lambda_0)$ の要素は $\sum_{i=1}^n x_i(u) \mathbf{e}_i$ と書けるので $x_1(u), \dots, x_n(u)$ は $H^1(L(u); \Lambda_0)$ の座標を与える。

$$y_i(u) = e^{x_i(u)}$$

とおくと、これは商空間

$$\frac{H^1(L(u); \Lambda_0)}{H^1(L(u); 2\pi\sqrt{-1}\mathbb{Z})} \cong (\Lambda_0/2\pi\sqrt{-1}\mathbb{Z})^n$$

の座標を与え、ポテンシャル関数 $\mathfrak{PD}_{L(u)}$ は $y_i(u)$ の関数とみれる。

いま、 X のモーメント写像の像 P があるアファイン関数 ℓ_j を用いて

$$P = \{u = (u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n \mid \ell_j(u) \geq 0, j = 1, \dots, m\}$$

で与えられているとする。ここで、 j 番めの面の（内向き）法ベクトル

$$v_j = (v_{j1}, \dots, v_{jn}) := \left(\frac{\partial \ell_j}{\partial u_1}, \dots, \frac{\partial \ell_j}{\partial u_n} \right) \in \mathbb{Z}^n$$

は整数ベクトルである。このとき、以下が成り立つ。

Theorem 3.2 [CO][FOOO7][FOOO8] (1) X がトーリック Fano 多様体のとき

$$\mathfrak{PD}_{L(u)}(y_1(u), \dots, y_n(u)) = \sum_{j=1}^m y_1(u)^{v_{j1}} \dots y_n(u)^{v_{jn}} T^{\ell_j(u)}.$$

(2) X が Fano でないとき

$$\mathfrak{PD}_{L(u)}(y_1(u), \dots, y_n(u)) = \sum_{j=1}^m y_1(u)^{v_{j1}} \dots y_n(u)^{v_{jn}} T^{\ell_j(u)} + \text{extra terms}^{19}.$$

¹⁷ それらのサーベイである [FOOO12] も参照。

¹⁸ 例えば、 $X = \mathbb{C}P^n$ で標準的な Kähler 構造の場合、 P は標準 n 単体。

¹⁹ X が Fano のときはマスロフ指数が2の正則円盤を分類することができ、ポテンシャル関数を上のように明示的に書き下すことができる [CO] が、Fano でないと $c_1(TX)[C] \leq 0$ なる有理曲線 C が存在することに対応してバブルが起り、その効果として T のべきが大きくなる項が余分に出てきて、ポテンシャル関数は一般には無限和となる。詳しくは [FOOO8, Theorem 3.5] を参照。

上の定理の $\mathfrak{PD}_{L(u)}(y_1(u), \dots, y_n(u))$ は u に依っている関数であるが、更に

$$y_i = y_i(u)T^{u_i}$$

とおくと、ポテンシャル関数は u によらないことがわかる。これを $\mathfrak{PD}_X$ と書く。

$$\mathfrak{PD}_X : (\Lambda \setminus 0)^n \rightarrow \Lambda.$$

Corollary 3.3 X がトーリック Fano 多様体のとき、 $\mathfrak{PD}_X$ は物理の Landau-Ginzburg super potential²⁰ と一致する。

Example 3.4 $X = \mathbb{C}P^n$ のとき、 $u \in \text{Int}P$ に対し

$$\begin{aligned} \mathfrak{PD}_{L(u)}(y_1(u), \dots, y_n(u)) &= y_1(u)T^{u_1} + \dots + y_n(u)T^{u_n} + \frac{T^{1-u_1-\dots-u_n}}{y_1(u) \cdots y_n(u)} \\ \mathfrak{PD}_{\mathbb{C}P^n}(y_1, \dots, y_n) &= y_1 + \dots + y_n + \frac{T}{y_1 \cdots y_n}. \end{aligned}$$

トーラスファイバー $L(u)$ の場合、 $\mathfrak{PD}_X$ の臨界点の条件式は $\mathfrak{m}_1^b = 0$ を導くので、 $(L(u), b)$ の Floer cohomology は消えない²¹。実際、 $\mathfrak{PD}_X$ の臨界点は（その付値を考えることにより）、Floer cohomology が消えないトーラスファイバー $L(u)$ を完全に決定する [FOOO7, FOOO11]。

Theorem 3.5 [FOOO11] 任意の射影的トーリック多様体 X に対し、環同型

$$ks : QH(X) \xrightarrow{\sim} \text{Jac}(\mathfrak{PD}_X) \quad (3.1)$$

が存在する。ここで $QH^*(X)$ は X の量子コホモロジー環を表す。

Remark 3.6 (1) (3.1) の右辺は $\mathfrak{PD}_X$ の (Λ_0 上定義される) ヤコビ環である。Theorem 3.2 で述べたように X が Fano の場合は $\mathfrak{PD}_X$ はローラン多項式になるので普通のヤコビ環でよいが、 X が Fano でないと $\mathfrak{PD}_X$ は一般には無限級数になるので通常のヤコビ環の定義ではなく、ある種の T 進位相に関する完備化およびヤコビイデアルの閉包をとる必要がある。詳しくは [FOOO11] をご覧頂きたい。

(2) 同型射 ks は小平-スペンサー写像の類似で後 (4.7) で述べる閉開写像 $\mathfrak{q}$ を用いて幾何学的に陽に与えられる。 X がトーリック Fano 多様体の場合は、例えば A. Givental, V. Batyrev など色々な人々によって (色々な場合に) 上の同型は示されているが、具体的に同型射を与えて示すというより両辺を計算して同型を示すというものであり、我々の証明とは全く異なる。

(3) 左辺がシンプレクティックサイドで右辺が複素幾何サイドでこの同型はミラー対称性の一種である。[FOOO11, Chapter 3] では環同型だけでなくより詳しく、バルク変形 (1.4 節) の空間 $H^*(X; \Lambda_0)$ に入るフロベニウス多様体構造 (平坦構造 [Sa]) のレベルでの同型も証明している。[FOOO12] も参照。

²⁰ 例えば、[HV] を参照。

²¹ 実際、 $\mathfrak{m}_1^b = 0$ ゆえ、加群として $H(T^n; \Lambda)$ と同型になる。

4. 深谷圏

1 節では一つのラグランジアン部分多様体に対して A_∞ 代数が構成されることを述べた。ここではいくつかのラグランジアン部分多様体の族に対して深谷圏とよばれる A_∞ 圏が構成されることを述べる。深谷圏のアイデアは [F1] に遡る。

4.1. A_∞ 圏 $\mathcal{L}$

Theorem 4.1 [AFOOO1] シンプレクティック多様体 X の有限個の weakly unobstructed なラグランジアン部分多様体 L_i とその weak Maurer Cartan 元 $b_i \in \mathcal{MC}_{\text{weak}}(L_i)$ の対の集合を $\mathbf{L} = \{(L_i, b_i)\}$ とおく²²。 L_i たちは互いに横断的に交わると仮定する。このとき、 $\mathbf{L}$ を対象の集合とするフィルター付き A_∞ 圏 $\mathcal{L}$ が存在する。これを $\mathbf{L}$ の**深谷圏**という。

すなわち、 $\mathcal{L}$ の対象は (L_i, b_i) で、対象 (L_i, b_i) を以下では i と略記するとき、射の空間は

$$CF(i, j) = \begin{cases} \bigoplus_{p \in L_i \cap L_j} \Lambda \cdot p & \text{if } L_i \neq L_j, \\ \Omega(L_i; \Lambda) & \text{if } L_i = L_j \end{cases} \quad (4.1)$$

であり、 $\vec{\kappa} = (\kappa_0, \dots, \kappa_k)$ とおくとき写像の族

$$\mathbf{m}_{\vec{\kappa}} : B_{\vec{\kappa}}CF(\mathcal{L}) := CF(\kappa_0, \kappa_1) \otimes \cdots \otimes CF(\kappa_{k-1}, \kappa_k) \rightarrow CF(\kappa_0, \kappa_k) \quad (4.2)$$

で A_∞ 関係式

$$\sum_{\vec{\kappa}_1, \vec{\kappa}_2} \pm \mathbf{m}_{\vec{\kappa}_1}(\cdots, \mathbf{m}_{\vec{\kappa}_2}(\cdots, \cdots), \cdots) = 0 \quad (4.3)$$

をみたすものが存在する。

$\mathbf{m}_{\vec{\kappa}}$ の構成には $\vec{\kappa}$ を境界条件とする種数 0 の境界付き安定写像のモジュライ空間を用いる。Theorem 1.1 に比べ新たな技術的問題は現れない。倉西構造の理論をパッケージ化した [FOOO17, FOOO19] の命題を用いれば始めから証明をやり直す必要はない²³。

4.2. Hochschild (co)homology of $\mathcal{L}$

A_∞ 圏 $\mathcal{L}$ に対して、その ($\mathcal{L}$ 自身を係数とする) Hochschild (co)homology を導入する。まず、以下で用いる一般的な記号の説明を行う。 Λ 加群 C に対し、 $B_k C = \underbrace{C \otimes \cdots \otimes C}_{k \text{ times}}$ および $BC = \bigoplus_{k=0}^{\infty} B_k C$ とおく。(ただし $B_0 C = \Lambda_0$) BC には次の余積 $\Delta : BC \rightarrow BC \otimes BC$ により余結合的余代数の構造が入る。

$$\Delta(x_1 \otimes \cdots \otimes x_k) = \sum_{i=0}^k (x_1 \otimes \cdots \otimes x_i) \otimes (x_{i+1} \otimes \cdots \otimes x_k).$$

$\Delta^{n-1} : BC \rightarrow (BC)^{\otimes n}$ を

$$\Delta^{n-1} = (\Delta \otimes \underbrace{id \otimes \cdots \otimes id}_{n-2}) \circ (\Delta \otimes \underbrace{id \otimes \cdots \otimes id}_{n-3}) \circ \cdots \circ \Delta.$$

²² 相対スピン構造を考える際の $st \in H^2(X; \mathbb{Z}_2)$ は $st|_{L_i} \equiv w_2(L_i) \forall i$ をみたす。

²³ [F2][FOOO6] の定式化も参照。

により定義すると $\mathbf{x} \in B_k C$ は

$$\Delta^{n-1}(\mathbf{x}) = \sum_c \mathbf{x}_c^{(n;1)} \otimes \cdots \otimes \mathbf{x}_c^{(n;n)} \quad (4.4)$$

と書き表すことができる。ここで、 c は $\mathbf{x}$ を n 個のテンソル積の形に分割するやり方を指定する添字の集合を走る。

Lemma-Definition 4.2 以下で定義される $(CH_*(\mathcal{L}), \partial_H)$ は複体をなす。これを A_∞ 圏 $\mathcal{L}$ の Hochschild chain complex といい、そのホモロジーを $HH_*(\mathcal{L})$ と書き、 $\mathcal{L}$ の Hochschild homology という。 $\vec{\kappa} = (\kappa_0, \dots, \kappa_k)$ としたとき

$$\begin{aligned} CH_*(\mathcal{L}) &:= \bigoplus_{\vec{\kappa}} CF(\kappa_0, \kappa_1) \otimes \cdots \otimes CF(\kappa_k, \kappa_0) \\ \partial_H(\mathbf{x}) &:= \sum_c \pm \mathbf{x}_c^{(3;1)} \otimes \mathbf{m}(\mathbf{x}_c^{(3;2)}) \otimes \mathbf{x}_c^{(3;3)} + \sum_c \pm \mathbf{m}(\mathbf{x}_c^{(3;3)} \otimes \mathbf{x}_c^{(3;1)}) \otimes \mathbf{x}_c^{(3;2)}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Lemma-Definition 4.3 以下で定義される $(CH^*(\mathcal{L}), \delta_H)$ は複体をなす。これを A_∞ 圏 $\mathcal{L}$ の Hochschild cochain complex といい、そのホモロジーを $HH^*(\mathcal{L})$ と書き、 $\mathcal{L}$ の Hochschild cohomology という。 $\vec{\kappa} = (\kappa_0, \dots, \kappa_k)$ としたとき

$$\begin{aligned} CH^*(\mathcal{L}) &:= \prod_{\vec{\kappa}} \text{Hom}(CF(\kappa_0, \kappa_1) \otimes \cdots \otimes CF(\kappa_{k-1}, \kappa_k), CF(\kappa_0, \kappa_k)) \\ \delta_H(\varphi)(\mathbf{x}) &:= \sum_c \pm \mathbf{m}(\mathbf{x}_c^{(3;1)} \otimes \varphi(\mathbf{x}_c^{(3;2)}) \otimes \mathbf{x}_c^{(3;3)}) + \sum_c \pm \varphi(\mathbf{x}_c^{(3;1)} \otimes \mathbf{m}(\mathbf{x}_c^{(3;2)}) \otimes \mathbf{x}_c^{(3;2)}). \end{aligned} \quad (4.6)$$

Remark 4.4 Hochschild homology は Hochschild cohomology 上の加群の構造を自然にもつ (キャップ積)。

Lemma-Definition 4.5 $\varphi, \psi \in HH^*(\mathcal{L})$ に対し

$$m_2(\varphi, \psi) := \sum \pm \mathbf{m}(\cdots, \varphi(\cdots), \cdots, \psi(\cdots), \cdots)$$

と定義すると、これは $HH^*(\mathcal{L})$ に結合的な積を定め $HH^*(\mathcal{L})$ は環構造をもつ。

4.3. 開閉写像 $\hat{\mathbf{p}}$, 閉開写像 $\hat{\mathbf{q}}$ (open-closed, closed-open maps)

我々は [FOOO2] (その出版版 [FOOO3, Theorem 3.8.9, Theorem 3.8.32]) において各ラグランジアン部分多様体 $L \subset X$ に対して、種数0境界付き安定写像のモジュライ空間の interior marked point, boundary marked point をそれぞれ出力点として用いることにより次の写像を構成した。²⁴

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &: HF(L, b) \rightarrow QH^*(X) \quad \text{s.t. } \mathbf{p} \equiv i_! \mod \Lambda_+ \\ \mathbf{q} &: QH^*(X) \rightarrow HF(L, b) \quad \text{s.t. } \mathbf{q} \equiv i^* \mod \Lambda_+. \end{aligned} \quad (4.7)$$

ここで $i: L \hookrightarrow X$ は包含写像で $i_!$ は Gysin 写像。 $\mod \Lambda_+$ は係数を $\Lambda_0/\Lambda_+ \cong \mathbb{C}$ に還元することを意味する。最近では $\mathbf{p}$ を開閉写像、 $\mathbf{q}$ を閉開写像と呼び $\mathcal{OC}, \mathcal{CO}$ などと書く人が多いようである。これを深谷圏 $\mathcal{L}$ の場合に一般化することは直接的である。

²⁴ Definition 1.6 で $\ell = 1$ の場合の $\mathbf{q}_0$ 。

Proposition 4.6 [AFOOO1] Λ 加群の射

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{p}} &: HH_*(\mathcal{L}) \rightarrow QH^*(X), \\ \hat{\mathbf{q}} &: QH^*(X) \rightarrow HH^*(\mathcal{L})\end{aligned}\tag{4.8}$$

で、 $\mathcal{L} = \{(L, b)\}$ (対象が唯一) のとき (4.7) の $\mathbf{p}, \mathbf{q}$ に一致するものが存在する。更に、 $\hat{\mathbf{q}}$ は環準同型射になり、 $\hat{\mathbf{p}}$ は $QH^*(X)$ -加群の射となる。

Remark 4.4 により、 $HH_*(\mathcal{L})$ は $HH^*(\mathcal{L})$ -加群と思えるが、更に (4.8) の環準同型射 $\hat{\mathbf{q}} : QH^*(X) \rightarrow HH^*(\mathcal{L})$ を経由することで $\hat{\mathbf{p}}$ を $QH^*(X)$ -加群の射とみることができ、というのが最後の主張である。

射 $\hat{\mathbf{p}}$ と $\hat{\mathbf{q}}$ は次の意味で互いに双対である。

Proposition 4.7 [AFOOO1] 任意の $x \in QH^*(X)$ と $\mathbf{y} \in HH_*(\mathcal{L})$ に対し

$$\langle \hat{\mathbf{q}}(x), \mathbf{y} \rangle_{HH} = \pm \langle x, \hat{\mathbf{p}}(\mathbf{y}) \rangle_{PD_X}$$

が成り立つ。ここで、 $\langle \cdot, \cdot \rangle_{HH}$ は Hochschild cohomology と Hochschild homology の自然な pairing で、 $\langle \cdot, \cdot \rangle_{PD_X}$ は X の Poincaré pairing を表す。

Remark 4.8 (1) 上の双対性は直感的には当たり前の式なのであるが、 $\hat{\mathbf{p}}, \hat{\mathbf{q}}$ を構成する際の摂動の取り方がそれぞれで異なるのでそれらをつなげる議論が必要となる。

(2) X が Liouville 多様体で、 $\mathcal{L}$ が完全なラグランジアン部分多様体からなる場合に S. Ganatra は同種の双対性を示している [G]。

4.4. Trace map

深谷圏 $\mathcal{L}$ の射の空間 $CF(i, j)$ に次により内積を入れる。

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{L}} := \begin{cases} \pm \langle \cdot, \cdot \rangle_{PD_L} & \text{if } L_i = L_j \\ \pm 1 & \text{if } p_i, p_j \in L_i \cap L_j \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

いま、 $\mathcal{L}, \mathcal{U}$ ($\mathcal{L} = \mathcal{U}$ も可) をシンプレクティック多様体 X のラグランジアン部分多様体のなす深谷圏とし、 $\mathcal{L} \cup \mathcal{U}$ の対象のラグランジアン部分多様体は互いに横断的に交わりと仮定する。このとき、 $\mathcal{L} \cup \mathcal{U}$ にも A_∞ 圏の構造と内積が入る。

Definition 4.9 [AFOOO1][FOOO11] Λ 双線形写像

$$Z : CH_*(\mathcal{L}) \times CH_*(\mathcal{U}) \rightarrow \Lambda$$

を $\mathbf{x} \in CH_*(\mathcal{L})$, $\mathbf{y} \in CH_*(\mathcal{U})$ に対し、

$$Z(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{c_1, c_2} \sum_{f_1, f_2} \pm \langle \mathbf{m}(\mathbf{x}_{c_1}^{(2;1)}, f_1^\vee, \mathbf{y}_{c_2}^{(2;2)}), f_2^\vee \rangle \langle \mathbf{m}(\mathbf{y}_{c_2}^{(2;1)}, f_1, \mathbf{x}_{c_1}^{(2;2)}), f_2 \rangle \tag{4.9}$$

と定める。ここで $\sum_{f_1, f_2}$ は $f_1 \in U_{v(c_2;2)} \cap L_{\kappa(c_1;2)}$, $f_2 \in L_{\kappa(c_1;1)} \cap U_{v(c_2;1)}$ なる f_1, f_2 をわたる。ただし、 $\kappa(c_1;1)$, $\kappa(c_1;2)$, $v(c_2;1)$, $v(c_2;2)$ は

$$\mathbf{x}_{c_1}^{(2;1)} = x_1^{c_1} \otimes \cdots \otimes x_{a(c_1)}^{c_1}, \quad \mathbf{y}_{c_2}^{(2;1)} = y_1^{c_2} \otimes \cdots \otimes y_{b(c_2)}^{c_2}$$

と表したとき、

$$\begin{aligned} x_1^{c_1} &\in CF(L_{\kappa(c_1;1)}, L_{\kappa'}), & x_{a(c_1)}^{c_1} &\in CF(L_{\kappa''}, L_{\kappa(c_1;2)}), \\ y_1^{c_2} &\in CF(U_{v(c_2;1)}, U_{v'}), & y_{b(c_2)}^{c_2} &\in CF(U_{v''}, U_{v(c_2;2)}) \end{aligned}$$

となるような対象の添字である。また、 $f_1 \in U_{v(c_2;2)} \cap L_{\kappa(c_1;2)}$ のとき $f_1^\vee$ は点として f_1 と同じであるが $f_1^\vee \in L_{\kappa(c_1;2)} \cap U_{v(c_2;2)}$ とみている。右辺の内積は $\mathcal{L} \cup \mathcal{U}$ 上の内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{L} \cup \mathcal{U}}$ を表す。

このとき、直接計算により次がわかる。

Lemma-Definition 4.10 $\mathbf{x} \in CH_*(\mathcal{L})$, $\mathbf{y} \in CH_*(\mathcal{U})$ に対し、

$$Z(\delta_H \mathbf{x}, \mathbf{y}) + \pm Z(\mathbf{x}, \delta \mathbf{y}) = 0$$

が成り立つ。よって

$$Z : HH_*(\mathcal{L}) \times HH_*(\mathcal{U}) \rightarrow \Lambda$$

を引き起こす。これを **Trace map** とよぶ。

Theorem 4.11 [AFOOO1][FOOO11] 任意の $\mathbf{x} \in HH_*(\mathcal{L})$, $\mathbf{y} \in HH_*(\mathcal{U})$ に対し、

$$Z(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \langle \hat{\mathbf{p}}_{\mathcal{L}}(\mathbf{x}), \hat{\mathbf{p}}_{\mathcal{U}}(\mathbf{y}) \rangle_{PD_X} \quad (4.10)$$

が成り立つ。この等式はしばしば **Cardy relation** と呼ばれる。ここで $\hat{\mathbf{p}}_{\mathcal{L}}, \hat{\mathbf{p}}_{\mathcal{U}}$ は $\mathcal{L}, \mathcal{U}$ における $\hat{\mathbf{p}}$ 写像を表す。

双対性 Proposition 4.7 を用いると

$$Z(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \langle \hat{\mathbf{q}}_{\mathcal{U}} \circ \hat{\mathbf{p}}_{\mathcal{L}}(\mathbf{x}), \mathbf{y} \rangle_{HH(\mathcal{U})}. \quad (4.11)$$

Theorem 4.11 の証明には、**アニュラスからの安定写像** のモジュライ空間を用いる。アニュラスからの安定写像のモジュライを使った議論は、既に [A], [FOOO11] にある。

Remark 4.12 (1) [FOOO11, Definition 1.3.22] では A_∞ 代数の場合（深谷圏で対象が一つの場合）に Trace map を導入した。深谷圏への一般化 [AFOOO1] は直接的である。性質 (4.10) は [FOOO11, Theorem 3.4.1. Proposition 3.5.2, Remark 3.10.18 もみよ] に相当し、これはコンパクトトーリック多様体の場合に小平スペンサー写像²⁵

$$ks : QH^*(X) \rightarrow \text{Jac}(\mathfrak{P}\mathfrak{D}_X)$$

が $QH^*(X)$ および $\text{Jac}(\mathfrak{P}\mathfrak{D}_X)$ 上の内積を保つという重要な結果を導き [FOOO11, Chapter 3], Remark 3.6 (3) で述べたフロベニウス多様体構造の同型を示すキーとなる。

(2) Definition 4.9 で導入した写像 Z は深谷圏 $\mathcal{L}$ が巡回対称性をもてば $\mathcal{L}$ の巡回ホモロジー $HC_*(\mathcal{L})$ 上の写像を引き起こす。これは [ST] の辞書に従うと斎藤恭司氏の Higher Residue pairings に対応すべきものとなる。

(3) D. Shklyarov は独立に、proper smooth $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ -graded dg 圏に対して Trace map を代数的に構成し、特に孤立特異点の行列因子化の圏の場合にその巡回ホモロジーに定まる写像が Higher Residue pairings に定数倍を除いて一致することを示した [Shk]。N. Sheridan はその構成を A_∞ 圏の場合に直接的に一般化している [Sh]。

²⁵Theorem 3.5 より X がコンパクトトーリック多様体の時、 ks は環同型写像。

5. Generation criterion

M. Abouzaid は [A] において、 X が Liouville 多様体で完全ラグランジアン部分多様体のなす深谷圏について、その生成元の判定条件を与えた。この場合は Remark 4.8 (2) でも触れたように、バブルが起こらずそれにともなうモジュライ空間の解析は容易になる。ここでは、これまでの我々の結果を用いて、一般のコンパクトシンプレクティック多様体 X と完全とは限らないコンパクトラグランジアン部分多様体のなす深谷圏の場合に判定条件を与える。

X をコンパクトシンプレクティック多様体とし、そのある有限個の weakly unobstructed かつ互いに横断的に交わるラグランジアン部分多様体の族 $\{L_i\}$ とその weak Maurer-Cartan 元 $\{b_i\}$ の対の集合 $\mathbf{L} = \{(L_i, b_i)\}$ から Theorem 4.1 により得られる深谷圏を $\mathcal{L}$ とする。 1_X を X の基本類のポアンカレ双対とすると $1_X \in QH^0(X)$ は量子コホモロジー環の単位元となる。

Theorem 5.1 [AFOOO1] 上の状況で、深谷圏 $\mathcal{L}$ は条件

$$1_X \in \text{Image}(\hat{\mathfrak{p}} : HH_*(\mathcal{L}) \rightarrow QH^*(X)) \quad (5.1)$$

をみたしていると仮定する。このとき、任意の (別の) weakly unobstructed なラグランジアン部分多様体 U とその weak Maurer-Cartan 元 b_U で $HF((U, b_U); \Lambda) \neq 0$ をみたすものに対し、 $(L, b) \in \mathbf{L}$ が存在し、

$$\mathfrak{P}\mathfrak{D}_L(b) = \mathfrak{P}\mathfrak{D}_U(b_U)$$

が成り立つ。

証明には、4.4 節で導入した Trace map Z を用い、Theorem 4.11 が本質的に用いられる。

さて、 $\lambda := \mathfrak{P}\mathfrak{D}_L(b) = \mathfrak{P}\mathfrak{D}_U(b_U)$ とおき、 $\mathbf{L}_\lambda := \{(L, b) \in \mathbf{L} \mid \mathfrak{P}\mathfrak{D}_L(b) = \lambda\}$ がなす $\mathcal{L}$ の A_∞ 充満部分圏を $\mathcal{L}_\lambda \subset \mathcal{L}$ とする。また、

$$\mathcal{U}_\lambda = \mathcal{L}_\lambda \cup \{(U, b_U)\}$$

とおくと Theorem 5.1 より包含写像が引き起こす自然な関手

$$I_\lambda : \mathcal{L}_\lambda \longrightarrow \mathcal{U}_\lambda$$

が存在する。このとき、

Theorem 5.2 [AFOOO1] I_λ は次の導来圏の同値を引き起こす²⁶:

$$I_\lambda : D^\pi(\mathcal{L}_\lambda) \xrightarrow{\sim} D^\pi(\mathcal{U}_\lambda). \quad (5.2)$$

すなわち、 $\mathfrak{P}\mathfrak{D}_L(b)$ の値が λ である対象のなす導来圏の中では、新たな対象 (U, b_U) は不要であり、条件 (5.1) をみたす深谷圏 $\mathcal{L}_\lambda$ があれば十分ということである。その意味で条件 (5.1) は深谷圏の生成を意味する条件を与える。更に次が成り立つ。

²⁶ A_∞ 圏の twisted complex から三角圏を作り (シフト、射の錐を繰り返して得られるものを加える)、その後ベキ単完備化をとったものを D^π と書く。ホモロジー的ミラー対称性予想を考える際に必要。例えば [Se] を参照。

Theorem 5.3 [AFOOO1] 条件 (5.1) は次の (1) または (2) と同値。

- (1) $\hat{p}$ は全単射。
- (2) $\hat{q}$ は全単射。

すなわち、条件 (5.1) をみたす深谷圏 $\mathcal{L}$ は、シンプレクティック多様体 X の量子コホモロジーの情報をすべてもっているということになる。従って、次が基本問題となる。

Problem 5.4 シンプレクティック多様体 X が与えられたとき、条件 (5.1) をみたす深谷圏 $\mathcal{L}$ を見つけよ。

次節では X が射影的なトーリック多様体の場合にその例をあげる。

6. Example

X を射影的なトーリック多様体とし、3 節の記号をそのまま用いる。

$$\text{Crit}(\mathfrak{PD}_X) := \left\{ \vec{y} = (y_1, \dots, y_n) \in (\Lambda \setminus 0)^n \mid y_i \frac{\partial \mathfrak{PD}_X}{\partial y_i}(\vec{y}) = 0 \ \forall i, v_T(\vec{y}) \in \text{Int } P \right\}$$

$$\mathcal{L} := \{(L(u), \vec{y}) \mid \vec{y} \in \text{Crit}(\mathfrak{PD}_X)\}$$

とおく。ここで Theorem 3.5 の直前で述べたことより、任意の $(L(u), \vec{y}) \in \mathcal{L}$ に対し、 $HF((L(u), \vec{y}); \Lambda) \neq 0$ であることに注意。このとき、

Theorem 6.1 [AFOOO2] $\mathcal{L}$ は条件 (5.1) をみたす。特に、 $\mathcal{L}$ は X の深谷圏 (の導来圏) を生成する。

Example 6.2 Example 3.4 より $X = \mathbb{C}P^n$ のとき、 $\mathfrak{PD}_{\mathbb{C}P^n}(y_1, \dots, y_n)$ の臨界点は、 ζ_{n+1} を 1 の原始 $(n+1)$ 乗根として

$$\vec{y}_k = (\zeta_{n+1}^k T^{\frac{1}{n+1}}, \dots, \zeta_{n+1}^k T^{\frac{1}{n+1}}), \quad k = 0, 1, \dots, n$$

で与えられる。

$$\mathcal{L} = \left\{ \left(L\left(\frac{1}{n+1}, \dots, \frac{1}{n+1}\right), \vec{y}_k \right) \mid k = 0, 1, \dots, n \right\}$$

とおくと、これが $\mathbb{C}P^n$ の深谷圏の生成元を与える。このとき、 $\mathfrak{PD}_{\mathbb{C}P^n}$ は Morse で

$$\mathfrak{PD}_{\mathbb{C}P^n}(\vec{y}_k) = (n+1)\zeta_{n+1}^k T^{\frac{1}{n+1}}$$

ゆえ、 $(n+1)$ 個の臨界値は互いに異なる。また、C-H.Cho[C] の結果により、Floer cohomology $HF\left(\left(L\left(\frac{1}{n+1}, \dots, \frac{1}{n+1}\right), \vec{y}_k\right)\right)$ は $\mathfrak{PD}_{\mathbb{C}P^n}$ のヘッシアンに付随した Clifford 代数と同型になる。C. Kassel[Ka] の結果 (の A_∞ 版) によれば、Clifford 代数の Hochschild cohomology は 1 次元になる。よって $HH^*(\mathcal{L}) \cong \Lambda^{\oplus(n+1)}$ 。一方、 $\mathbb{C}P^n$ の量子コホモロジー環は半単純で $QH^*(\mathbb{C}P^n) \cong \Lambda[y]/(y^{n+1} = T) \cong \Lambda^{\oplus(n+1)}$ と直和分解する。よって、この場合は直接計算によっても同型 $QH^*(\mathbb{C}P^n) \cong HH^*(\mathcal{L}) \cong \Lambda^{\oplus(n+1)}$ を確認することができる。

参考文献

- [A] M. Abouzaid, *A geometric criterion for generating the Fukaya category*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. No. 112 (2010), 191–240.
- [AFOOO1] M. Abouzaid, K. Fukaya, Y.-G. Oh, H. Ohta and K. Ono, *Quantum cohomology and split generation in Lagrangian Floer theory*, in preparation.
- [AFOOO2] M. Abouzaid, K. Fukaya, Y.-G. Oh, H. Ohta and K. Ono, *Homological mirror symmetry for compact toric manifolds*, in preparation.
- [C] C.-H. Cho, *Holomorphic disks, spin structures and the Floer cohomology of the Clifford torus*, Int. Math. Res. Not. 2004, no. 35, 1803–1843.
- [CO] C.-H. Cho and Y.-G. Oh, *Floer cohomology and disc instantons of Lagrangian torus fibers in Fano toric manifolds*, Asian J. Math. 10 (2006), 773–814.
- [F1] K. Fukaya, Morse homotopy, A^∞ -categories, and Floer homologies, Proc. of the 1993 Garc Workshop on Geometry and Topology ed. by H. J. Kim, Lecture Notes series 18, Seoul Nat. Univ. (1993), 1–102.
- [F2] K. Fukaya, *Floer homology and mirror symmetry II*, 31–127, Adv. Stud. Pure Math., 34, (2002).
- [F3] K. Fukaya, *Cyclic symmetry and adic convergence in Lagrangian Floer theory*, Kyoto J. Math. 50 (2010), no. 3, 521–590.
- [FOOO1] K. Fukaya, Y.-G. Oh, H. Ohta and K. Ono, *Lagrangian intersection Floer theory-anomaly and obstruction*, Kyoto University preprint, 2000.
- [FOOO2] K. Fukaya, Y.-G. Oh, H. Ohta and K. Ono, *Lagrangian intersection Floer theory-anomaly and obstruction*, expanded version of [FOOO1], 2006 & 2007.
- [FOOO3] K. Fukaya, Y.-G. Oh, H. Ohta and K. Ono, *Lagrangian intersection Floer theory-anomaly and obstruction, Part I*, AMS/IP Studies in Advanced Math. vol. 46.1, International Press/ Amer. Math. Soc. (2009).
- [FOOO4] K. Fukaya, Y.-G. Oh, H. Ohta and K. Ono, *Lagrangian intersection Floer theory-anomaly and obstruction, Part II*, AMS/IP Studies in Advanced Math. vol. 46.2, International Press/ Amer. Math. Soc. (2009).
- [FOOO5] K. Fukaya, Y.-G. Oh, H. Ohta and K. Ono, *Canonical models of filtered A_∞ -algebras and Morse complexes*, 201–227, CRM Proc. Lecture Notes, 49, Amer. Math. Soc., Providence, RI, (2009).
- [FOOO6] K. Fukaya, Y.-G. Oh, H. Ohta and K. Ono, *Anchored Lagrangian submanifolds and their Floer theory*, 15–54, Contemp. Math., 527, Amer. Math. Soc., (2010).
- [FOOO7] K. Fukaya, Y.-G. Oh, H. Ohta and K. Ono, *Lagrangian Floer theory on compact toric manifolds I*, Duke Math. J. 151, (2010), no.1, 23–174.
- [FOOO8] K. Fukaya, Y.-G. Oh, H. Ohta and K. Ono, *Lagrangian Floer theory on compact toric manifolds II: bulk deformations*, Selecta Math. New Series 17, (2011), 609–711.
- [FOOO9] K. Fukaya, Y.-G. Oh, H. Ohta and K. Ono, *Antisymplectic involution and Floer cohomology*, Geom. Topol. 21 (2017), no. 1, 1–106.
- [FOOO10] K. Fukaya, Y.-G. Oh, H. Ohta and K. Ono, *Toric degeneration and non-displaceable Lagrangian tori in $S^2 \times S^2$* , Int. Math. Res. Not. IMRN (2012), no. 13, 2942–2993.
- [FOOO11] K. Fukaya, Y.-G. Oh, H. Ohta and K. Ono, *Floer theory and mirror symmetry on compact toric manifolds*, Astérisque No. 376 (2016).
- [FOOO12] K. Fukaya, Y.-G. Oh, H. Ohta and K. Ono, *Lagrangian Floer theory on compact toric manifolds: survey*, Surveys in Differential Geometry XVII (2012) 229–298.
- [FOOO13] K. Fukaya, Y.-G. Oh, H. Ohta and K. Ono, *Lagrangian Floer theory over integers*:

- spherically positive symplectic manifolds*, Pure and Applied Math. Quarterly 9, No 2, (Special Issue: In Honor of Dennis Sullivan), 189–289 (2013).
- [FOOO14] K. Fukaya, Y.-G. Oh, H. Ohta and K. Ono, *Spectral invariants with bulk, quasi-morphisms and Lagrangian Floer theory*, arXiv:1105.5123. To appear in Mem. Amer. Math. Soc.
 - [FOOO15] K. Fukaya, Y.-G. Oh, H. Ohta and K. Ono, *Technical details on Kuranishi structure and virtual fundamental chain*, arXiv:1209.4410.
 - [FOOO16] K. Fukaya, Y.-G. Oh, H. Ohta and K. Ono, *Shrinking good coordinate systems associated to Kuranishi structures*, J. Symplectic Geom. 14 (2016), no. 4, 1295–1310.
 - [FOOO17] K. Fukaya, Y.-G. Oh, H. Ohta and K. Ono, *Kuranishi structure, pseudo-holomorphic curve, and virtual fundamental chain: Part I*, arXiv:1503.0763.
 - [FOOO18] K. Fukaya, Y.-G. Oh, H. Ohta and K. Ono, *Exponential decay estimates and smoothness of the moduli space of pseudoholomorphic curves*, arXiv:1603.07026.
 - [FOOO19] K. Fukaya, Y.-G. Oh, H. Ohta and K. Ono, *Kuranishi structure, pseudo-holomorphic curve, and virtual fundamental chain: Part II*, arXiv:1704.01848.
 - [G] S. Ganatra, *Symplectic cohomology and duality for the wrapped Fukaya category*, arXiv1304.7312.
 - [HV] K. Hori and C. Vafa, *Mirror symmetry*, arXiv:hep-th/0002222.
 - [K] T.V. Kadeišvili, *The algebraic structure in the homology of an A_∞ -algebra*, Soobshch. Akad. Nauk Gruzin. SSR 108, (1982). 249–252.
 - [Ka] C. Kassel, *A Künneth formula for the cyclic cohomology of $\mathbf{Z}_2$ -graded algebras*, Math. Ann. 275, 683–699 (1986).
 - [KS] M. Kontsevich and Y. Soibelman, *Homological mirror symmetry and torus fibrations*, in ‘Symplectic Geometry and Mirror Symmetry’ ed. by K. Fukaya et al. World Sci. Publishing, (2001). 203–263.
 - [Sa] K. Saito, *Period mapping associated to a primitive form*, Publ. R.I.M.S. 19 (1983), 1231 - 1261.
 - [ST] K. Saito and A. Takahashi, *From primitive forms to Frobenius manifolds*, 31–48, Proc. Sympos. Pure Math., 78, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2008.
 - [Se] P. Seidel, *Fukaya categories and Picard-Lefschetz theory*, Zurich Lectures in Advanced Mathematics. European Mathematical Society, (2008).
 - [Sh] N. Sheridan, *Formulae in noncommutative Hodge theory*, arXiv1510.03795.
 - [Shk] D. Shklyarov, *Matrix factorizations and higher residue pairings*, arXiv1306.4878.