非線形拡散系のダイナミクス
−漸近安定性とバタフライ効果−

柳田　英二　(東京工業大学)*

1. はじめに

バタフライ効果とは，天気予報の困難さを比喩的に表現するために，気象学者のローレンツによって導入された用語である．北京で蝶がはばたくと小さな気流の乱れ生じ，それが拡大してニューヨークで嵐が起こるという話がその由来であり，遠方における小さな揺らぎが大きく複雑な状態の変化を表すような現象を指す．数学的には，力学系における鋭敏な初期値依存性とその結果生じる複雑なダイナミクスのことである．

本講演の主題である非線形拡散系においても, 定常状態の不安定化の結果として生じる複雑な解の挙動が見られる．実際，２成分反応拡散系

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + f(u,v), \\ v_t = d\Delta v + g(u,v), \end{cases}$$

においては，拡散係数dや反応項f, gの選び方によって，きわめて複雑な時空間パターンが現れることがが知られている [15]．一方，単独反応拡散方程式

$$u_t = \Delta u + f(u)$$

では，適当な仮定のもとではそのダイナミクスは単純なものとなる．例えば，有界領域$\Omega \subset \mathbb{R}^N$におけるディリクレ境界値問題

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + f(u), & x \in \Omega,\ t > 0, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega,\ t > 0, \end{cases}$$

に対し，エネルギー汎関数

$$V(u) = \int_\Omega \left(\frac{|\nabla u|^2}{2} - F(u) \right) dx, \qquad F(u) := \int_0^u f(\xi)\, d\xi, \tag{1.1}$$

は

$$\frac{d}{dt}\Big\{ V(u(\cdot,t)) \Big\} = -\int_\Omega u_t^2 dx \le 0$$

を満たすことは容易に確かめられる．従って，エネルギーは時間的に単調減少し，エネルギーが下に有界ならば解は$u_t \to 0$ $(t \to \infty)$を満たす．これより，ω-極限集合

$$\omega(u) = \{ \varphi \mid u(\cdot, t_n) \to \varphi \text{ in } L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^N) \text{ as } \exists t_n \to \infty \}$$

は定常解のみから成り，解は時間とともにこれに近づいて行くことが分かる．ω-極限集合の一般的な性質として，ω-極限集合は連結であるから，ω-極限点が孤立していれ

* 〒152-8551 東京都目黒区大岡山 2-12-1 東京工業大学 理学院 数学系
e-mail: `yanagida@math.titech.ac.jp`
web: `http://www.math.titech.ac.jp/~yanagida/index.html`

ば普通の意味の収束を意味するが，ω-極限集合が連続体になる場合には解は定常解の族に近づき，必ずしも定常解のどれかに収束するとは限らない（これを仮似収束と呼ぶ）．特に $N=1$ あるいは f が解析的ならば ω-極限集合は必ず孤立していることが示され，有界な解は必ずある定常解に収束する [11, 24].

全空間上の初期値問題

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + f(u), & x \in \mathbb{R}^N,\ t>0, \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^N, \end{cases}$$

では状況は異なる．f は C^1 級で $f(0)=0$ を満たすと仮定し，また初期値 $u_0 \in C(\mathbb{R}^N)$ は有界であると仮定しよう．このとき有界な解は必ずしも仮似収束するとは限らない．例えば1次元 Allen-Cahn 方程式

$$u_t = u_{xx} + (u-a)(1-u^2), \qquad x \in \mathbb{R},$$

において ω-極限集合が進行波解からなる例が知られている [21]．ただし，この例では解が空間的に局在していない．すなわち，$|x| \to \infty$ のとき $u(x,t) \to 0$ を満たしていない．そこで局在解（$|x| \to \infty$ のとき 0 に減衰する解）に限るとどうなるであろうか．もし全空間においてもエネルギー (1.1) が有効に働けば，有界領域のディリクレ問題の解とよく似た挙動を示すことが期待される．解が空間的に指数減衰していればエネルギーが定義され，特に $f'(0)<0$ ならば任意の有界な解はある点 $\xi \in \mathbb{R}^N$ について球対称な定常解に漸近することが示される [4]．一方，$f'(0) \geq 0$ のときには自明解は指数的な安定性を持たず，ダイナミクスは複雑になる可能性がある．

本講演の目的は，単独の非線形拡散方程式に対し，バタフライ効果によって引き起こされる複雑なダイナミクスの例について解説することにある．具体的には

- 藤田方程式 $u_t = \Delta u + u^p$
- フィッシャー方程式 $u_t = \Delta u + u(1-u)$
- 1次元対数拡散方程式 $u_t = (\log u)_{xx}$

に対し，拡散と非線形性との相互作用によって無限遠における小さな揺らぎが拡大し，解の様相が大きく変化して複雑な挙動が見られることを示す．異なる方程式に対する異なる現象ではあるが，その背後には共通した構造が隠されていることを明らかにする．

2. 藤田方程式

次の初期値問題を考えよう．

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + u^p, & x \in \mathbb{R}^N,\ t>0, \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^N. \end{cases} \tag{2.1}$$

ただし $p>1$ とする．また初期値 u_0 は連続であると仮定し，有界な正値解のみを考えることにする．藤田方程式の解の構造は p の値によって劇的に変化することが知られていて，特に正値定常解の存在と安定性に関わる臨界指数としては以下の値がある．まず，正値定常解の存在については，ソボレフ指数

$$p_S = \begin{cases} \dfrac{N+2}{N-2} & (N>2), \\ \infty & (N \leq 2), \end{cases}$$

が臨界指数となり，藤田方程式は $1 < p < p_S$ のときは正値定常解を持たないが，$p \geq p_S$ のときは球対称な正値定常解，すなわち

$$\Delta\varphi + \varphi^p = 0, \qquad x \in \mathbb{R}^N,$$

を満たす解 $\varphi = \varphi(|x|) > 0$ を持つ．より詳しく言えば，2階常微分方程式の初期値問題

$$\begin{cases} \varphi'' + \dfrac{N-1}{r}\varphi' + \varphi^p = 0, \quad r > 0, \\ \varphi(0) = \alpha > 0, \end{cases}$$

に対し，$p \geq \_S$ ならば各 $\alpha > 0$ に対して解は $r > 0$ の減少関数となり，$\varphi(r) \to 0$ $(|x| \to \infty)$ を満たす．これを φ_α と表すことにする

正値定常解の安定性には Joseph-Lundgren 指数と呼ばれる次の値が関わっている．すなわち，

$$p \geq p_{JL} := \begin{cases} \dfrac{N - 2\sqrt{N-1}}{N - 4 - 2\sqrt{N-1}} & (N > 10), \\ \infty & (N \leq 10), \end{cases}$$

とすると，$p_S \leq p < p_{JL}$ のときは定常解は不安定であるが，$p \geq p_c$ のときは適当な重み付き空間で局所安定となる [6, 7]．このような安定性の変化は実は定常解の族の構造の変化と関係している．つまり，$p_S \leq p < JL$ のとき任意の二つの定常解のグラフは交わるのに対し，$p \geq p_{JL}$ のときは定常解の族 $\{\varphi_\alpha\}$ は $\alpha > 0$ について単調に増加し，

$$\lim_{\alpha\to 0} \varphi_\alpha(r) = 0, \qquad \lim_{\alpha\to\infty} \varphi_\alpha(r) = \varphi_\infty(r),$$

を満たす．ここに，

$$\varphi_\infty(|x|) = K|x|^{-2/(p-1)}, \qquad K = \left\{ \frac{2}{p-1}\left(N - 2 - \frac{2}{p-1}\right)\right\}^{1/(p-1)},$$

は特異定常解と呼ばれ，原点で発散するが，それ以外では方程式を満たしている．この結果は局所的な安定性に関するものであるが，大域的な収束性へと拡張できて，各解は重み付きの摂動（速く減衰する摂動）にたいしては（大域的に）安定である．

定理 2.1. ([16]) $N > 10$ かつ $p > p_{JL}$ とし，

$$\mu := \frac{N - 2 - \sqrt{\{N-2-4/(p-1)\}^2 - 8\{N-2-2/(p-1)\}}}{2} > 0$$

とおく．二つの初期値 u_0, $\tilde{u}_0$ に対する (2.1) の解をそれぞれ u, $\tilde{u}$ とする．初期値が

$$0 \leq u_0(x),\ \tilde{u}_0(x) \leq \varphi_\infty(|x|), \qquad \lim_{|x|\to\infty} |x|^\mu |u_0(x) - \tilde{u}_0(x)| = 0,$$

を満たせば，解は $\mathbb{R}^N$ で一様に

$$\lim_{t\to\infty} |u(x,t) - \tilde{u}(x,t)| = 0$$

を満たす．

この定理は，初期値の差が速く減衰すれば，有界な範囲での初期値の差は拡散によってならされ，無限遠での初期値の挙動が解の長時間挙動を決定するということを表している．逆に，二つの初期値が定理の条件を満たしてなければ，解の差が時間とともに拡大する．実際，減衰の遅い摂動に対して定常解は不安定であり [6, 7]，減衰の仕方に依存して解の挙動が大きく変わる．この性質を用いると，初期値から解の漸近挙動が推測でき，いろいろな振る舞いをする解を構成できる．

定理 2.2. ([17]) $N > 10$ かつ $p > p_{JL}$ とする. このとき，任意の $0 \le \alpha \le \beta \le \infty$ に対して

$$\omega(u) = \{\varphi_\gamma : \alpha \le \gamma \le \beta\}$$

となる (2.1) の解が存在する．

証明は，定常解の大域的安定性と初期値に関する連続性を組み合わせ，φ_α と φ_β の間を振動しながら減衰する初期値に対して安定化と不安定化が交互に生じることを示すことによって得られる．このような初期値としては最大値がいくらでも小さいものがとれる．これは無限遠の小さな揺らぎが自明に近い状態に影響を及ぼして大きな変動を引き起こしていることになり，まさにバタフライ効果とみなせる．なお，定理2.1, 2.2で考えた解は特異定常解の下側に留まり，従って解は原点近くに局在した空間的プロファイルを持っているが，より巧妙に初期値をとると場所を変えて局在パターンが不規則に生成消滅を繰り返す解も構成できる [17].

ここで構成した不規則振動解および生成消滅解の，ω-極限集合は定常解の族である．したがって十分大きな各時刻において解は定常解の近くに留まっており，挙動自体は複雑であるが準静的なものである．それでは動的な解を ω-極限として持つ局在解は存在するだろうか．もし減衰が速ければ，このような解は存在しないことが，空間次元や非線形項に対する適当な仮定のもとで示されている [4, 12]. 次の結果は，空間3次元以上であれば，(2.1) は動的な ω-極限を持つことを示している．

定理 2.3. ([18, 19]) $N \ge 3$ かつ $p_S < p < p_{JL}$ とする．このとき，球対称かつ有界な局在解で，その ω-極限集合が自明解と他の非定常解の連続体からなる (2.1) の解が存在する．

証明は，爆発解（有限時間で無限大に発散する解）と自明解に収束する解の閾値上を振動する初期値をうまく選び，閾解の性質と特異定常解との交点数の議論を用いて行う．なお，この p の範囲ではホモクリニック解（自明解から出て自明解にもどる全域解）の存在が示されており [5]．おそらくこのホモクリニック軌道に沿って周回する軌道に対応していると推測される．

3. フィッシャー方程式

この節ではフィッシャー方程式に対する初期値問題

$$\begin{cases} \varepsilon u_t = \varepsilon^2 \Delta u + u(1-u), & x \in \mathbb{R}^N,\ t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}^N, \end{cases} \tag{3.1}$$

を扱う．ここで $\varepsilon > 0$ はパラメータであるとし，正値解のみを考える．フィッシャー方程式は生物個体群の増殖のモデルとなる単安定な方程式で，自明な定常解 $u \equiv 0$ は不安定，正の定数解 $u \equiv 1$ は安定である．実際，自明解に小さな正の摂動を加えると，解

は任意の有界集合上で一様に定常解 $u \equiv 1$ に収束する．一般に収束は全空間では一様ではなく，解が 1 に近い領域が全空間に広がって行く．特に $\varepsilon > 0$ が十分小さいと，解に 0 から 1 に急激に変化する遷移層（界面）が現れて時間とともに動く．

界面の拡大の様子は初期値の減衰の仕方に依存する．初期値が空間的に速く減衰する場合，すなわち

$$u_0(x) = o(-\exp(\varepsilon^{-1}|x|)) \quad (|x| \to \infty)$$

を満たすとき，界面はほぼ一定の速度 $c_{\min} = 2$ で伝播する [3]．一方，初期値が等方的にゆっくりと減衰する場合，すなわち，ある $\lambda \in (0,1)$ について

$$u_0(x) \simeq C \exp(-\varepsilon^{-1}\lambda|x|)$$

である場合，界面は漸近的に一定速度 $c = \lambda + \lambda^{-1} > 2$ で伝播する [1]．したがってこれらの場合，界面の形状は（大きさをリスケールすると）球面に近づく．

より一般の初期値に対しては次の定理が成り立つ．

定理 3.1. ([14]) $u(x,t)$ と $\tilde{u}(x,t)$ を，それぞれ正の初期値 $u_0(x)$ と $\tilde{u}_0(x)$ に対する (3.1) の解とする．もしある $L \in (0,1)$ に対して

$$\lim_{|x|\to\infty} \exp(\varepsilon^{-1}L|x|)u_0(x) = \infty, \qquad \lim_{|x|\to\infty} \exp(\varepsilon^{-1}|x|)\{u_0(x) - \tilde{u}_0(x)\} = 0,$$

を満たせば，解は $\mathbb{R}^N$ で一様に

$$\lim_{t\to\infty} |\tilde{u}(x,t) - u(x,t)| = 0$$

を満たす．

この結果は特に，ゆっくり減衰する初期値に対し，十分時間が経過すると，界面の拡大パターンは無限遠での初期値の挙動によってのみ決まることを主張している．

一方，過渡的な界面の動きについてはこれまでその理解が十分ではなかったが，フィッシャー方程式とある種のハミルトン・ヤコビ型方程式との関係が明らかにされ [14]，フィッシャー方程式における界面の運動についての理解がかなり進んだ．この結果，(多少の制限はあるが) かなり広いクラスの運動が観測されることが分かってきた．

まず，界面の運動を記述するハミルトン・ヤコビ方程式を形式的に導出しよう．方程式 (3.1) において

$$u = \frac{1}{2}\exp(\varepsilon^{-1}v)$$

とおくと，方程式は

$$v_t = \varepsilon\Delta v + |\nabla v|^2 + 1 - \frac{1}{2}\exp(\varepsilon^{-1}v)$$

と書き直される．最後の項は $v < 0$ であれば $\varepsilon > 0$ が小さいと無視できて

$$w^\varepsilon_t = \varepsilon\Delta w^\varepsilon + |\nabla w^\varepsilon|^2 + 1$$

となる．最後に極限 $\varepsilon \to 0$ をとることにより，ハミルトン・ヤコビ方程式

$$w_t = |\nabla w|^2 + 1$$

を得る．

フィッシャー方程式の界面の運動とハミルトン・ヤコビ方程式の関係をより厳密に調べるために，次のように問題を定式化する．まず，ハミルトン・ヤコビ方程式に対する初期値問題

$$\begin{cases} w_t = |\nabla w|^2 + 1 & x \in \mathbb{R}^N,\ t > 0, \\ w(x,0) = w_0(x), & x \in \mathbb{R}^N, \end{cases} \tag{3.2}$$

を考える．これは特性曲線法で解くことができる．特性曲線は直線の族

$$x = \xi - 2t\nabla w_0(\xi) \qquad (\xi \in \mathbb{R}^N)$$

で与えられる．これらが交わるとたとえ初期値が滑らかでも特異性が現れるが，このような場合はハミルトン・ヤコビ方程式の解を粘性解の意味で定義する．すなわち

$$\begin{cases} w_t^\varepsilon = \varepsilon\Delta w^\varepsilon + |\nabla w^\varepsilon|^2 + 1. & x \in \mathbb{R}^N,\ t > 0, \\ w^\varepsilon(x,0) = w_0(x), & x \in \mathbb{R}^N, \end{cases}$$

で$\varepsilon \downarrow 0$とした極限で定義する．初期値には以下の条件を仮定する．

(A1) $w_0(x)$は$x \in \mathbb{R}^N$についてリプシッツ連続であり，一様なリプシッツ定数$L \in (0,1)$を持つ．

(A2) $|x| \to \infty$のとき$w_0(x) \to -\infty$を満たす．

このとき，フィッシャー方程式とハミルトン・ヤコビ方程式には次のような関係がある．

定理 3.2. ([14]) 条件(A1)および(A2)を仮定する．(3.1)において，初期値を

$$u_0(x) = \min\{\frac{1}{2}\exp(\varepsilon^{-1}w_0(x)), 1\}$$

とする．このとき，$\varepsilon \downarrow 0$とすると，(3.1)の解$u(x,t)$の1/2-レベル集合は(3.2)の解$w(x,t)$の0-レベル集合に近づく．さらにもし$w_0(x)$が上に凸ならば，$u(x,t)$の1/2-レベル集合は$w(x,t)$の0-レベル集合の$O(\log(1+t))$の近傍にある．

この定理より，ハミルトン・ヤコビ方程式の解の零点の位置を調べるとフィッシャー方程式における界面の位置がほぼ特定できることになる．

特性曲線法を用いた解析により，初期値$w_0(x)$に依存して様々な界面運動が導かれることが分かる．特に非等方的に減衰する初期値として

$$w_0(x) = -k(\omega)r, \qquad \omega = \frac{1}{|x|}x \in \mathbb{S}^{N-1}, \quad r = |x| > r_0 > 0,$$

(ただし$k(\omega) : \mathbb{S}^{N-1} \to (0,1)$は滑らかな関数) ととると，$w(x,t)$の零点集合は相似形を保って一定の割合で拡がり，関数$k(\omega)$の選び方によって様々な形状で拡がる界面の存在が示される[14]．さらに，正の数の増加列$\{r_k\}$, $\{s_k\}$および$\mathbb{S}^{N-1}$上の関数列$\{k_n(\omega)\}$をうまく選び，

$$w_0(x) = -k_n(\omega)r, \qquad \omega = \frac{1}{|x|}x \in \mathbb{S}^{N-1}, \quad r = |x| \in (r_k, s_k),$$

とおいて定理3.1を用いると，形状を変えながら拡がる界面の存在が示される[14, 25]．

4. 対数拡散方程式

対数拡散方程式

$$u_t = \Delta(\log u)$$

は，物理学 [10, 13] や微分幾何学 [8] など，いろいろな分野に現れる方程式である．対数拡散方程式では u が小さいと拡散が速くなり，その結果たとえ正の初期値であっても有限時間で解が恒等的に 0 になる解の消滅現象が起こり得る．これは線形の熱方程式には見られない性質である．

ここでは次の空間 1 次元の場合の問題を考える．

$$\begin{cases} u_t = (\log u)_{xx}, & x \in \mathbb{R},\ t > 0, \\ \lim_{x\to-\infty} (\log u)_x = \alpha(t), \quad \lim_{x\to+\infty} (\log u)_x = -\beta(t), & t > 0, \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{4.1}$$

ただし，$\alpha(t)$, $\beta(t)$ は $x \to \pm\infty$ としたときの解の空間的減衰率に対応する与えられた正の連続関数である．対数拡散方程式では無限遠の影響を無視できないのでこの条件を課す必要がある．また初期値 u_0 は正の連続関数であると仮定し，無限遠の条件と整合性がとれているものとする．このとき，解の消滅が起こるまでは正値解が一意に存在する [20].

方程式 (4.1) を $\mathbb{R}$ 上で積分し，無限遠での条件を用いると

$$\frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}} u(x,t)dx = -\{\alpha(t) + \beta(t)\}$$

を得る．これは解は有限時間で消滅し，消滅時刻 $t = T$ は

$$\int_0^T \{\alpha(t) + \beta(t)\}dt = \int_{\mathbb{R}} u_0(x)dx$$

で定まることを表している．消滅時刻 $t = T$ の近傍での振る舞いを見るために，変換

$$u(x,t) = (T-t)v(x,s), \qquad t = T - e^{-s},$$

を行うと，(4.1) は

$$\begin{cases} v_s = (\log v)_{xx} + v, \qquad x \in \mathbb{R}, \quad s \in (-\log T, \infty), \\ (\log v)_x \to +\alpha(T - e^{-s}) > 0 \qquad (x \to -\infty), \\ (\log v)_x \to -\beta(T - e^{-s}) < 0 \qquad (x \to +\infty), \\ v(x, -\log T) = v_0(x) := \dfrac{1}{T}u_0(x), \end{cases} \tag{4.2}$$

と書き直される．これより，(4.1) で $t \uparrow T$ としたときの解 $u(x,t)$ の振る舞いを見るには，(4.2) での $s \to \infty$ としたときの解 $v(x,s)$ の挙動を調べればよい．ここで

$$\int_{\mathbb{R}} v(x,s)ds = \frac{1}{T-t}\int_{\mathbb{R}} u(x,t)dx = \frac{1}{T-t}\int_{T-t}^{T} \big\{\alpha(t) + \beta(t)\big\}dt$$

に注意すると

$$\int_{\mathbb{R}} v(x,s)ds \to \alpha(T) + \beta(T) \qquad (s \to \infty),$$

特に$\alpha(t) \equiv \alpha_0$および$\beta_(t) \equiv \beta_0$が定数関数のときは

$$\int_{\mathbb{R}} v(x,s)dx \equiv \alpha_0 + \beta_0, \qquad s \in [-\log T, \infty),$$

である．

消滅時刻における(4.2)の解の挙動については，$\alpha(t) \equiv \beta(t) \equiv \gamma$（定数）で初期値が偶対称な場合には，偶対称な定常解に収束することが示されている[9]．より一般に，$\alpha(t) \equiv \alpha_0$および$\beta(t) \equiv \beta_0$が異なる定数のときは，正値定常解の代わりに

$$v_s = (\log v)_{xx} + v, \qquad x \in \mathbb{R}, \tag{4.3}$$

の進行波解を考える必要がある．動座標$z = x - cs$を使って，$v(x,s) = \varphi(z)$, $z = x - cs$, の形の解を考える．ただしcは伝播速度であり，$\varphi > 0$は進行波の波形を表す．$v = \varphi(z)$を方程式(4.3)に代入すると，φについての方程式

$$\begin{cases} (\log\varphi)_{zz} + c\varphi_z + \varphi = 0, \qquad z \in R, \\ (\log\varphi)_z(-\infty) = \alpha, \quad (\log\varphi)_z(-\infty) = -\beta, \end{cases} \tag{4.4}$$

を得る．さらに補助変数として$\psi := (\log\varphi)_z$をとると，(4.4)は2次元力学形

$$\begin{cases} \varphi_z = \varphi\psi, \\ \psi_z = -c\varphi\psi - \varphi, \end{cases} \tag{4.5}$$

の形に帰着する．相面図を用いた解析により，各$\alpha, \beta > 0$に対して$c = c(\alpha, \beta)$が一意的に存在し，(4.5)に$(0, \alpha)$と$(-\beta, 0)$を結ぶ軌道の存在が示される．また，対応する(4.4)の解は正で単峰性であることが分かるので，$z = 0$で最大値をとるように正規化すると(4.4)の解が一意に定まるので，これを$\varphi(\cdot; \alpha, \beta)$と表すことにする．速度$c$は$\alpha \in (0, \infty)$について単調減少，$\beta \in (0, \infty)$について単調増加であり，$c \gtreqless 0 \Longleftrightarrow \alpha \gtreqless \beta$. を満たしている．

さて，$\alpha(t) \equiv \alpha_0 > 0$および$\beta(t) \equiv \beta_0 > 0$の場合には，消滅時刻での解の挙動について次の定理が成り立つ．

定理 4.1. ([23]) vを(4.2)で$\alpha(t) \equiv \alpha_0 > 0$および$\beta(t) \equiv \beta_0 > 0$としたの場合の解とする．このとき任意の初期値に対してある定数$c \in \mathbb{R}$と$\theta \in \mathbb{R}$が存在し，解は$x \in \mathbb{R}$について一様に

$$\lim_{s \to \infty} v(x,s) = \varphi(x - cs - \theta)$$

を満たす．

この定理は(4.1)の解の進行波への大域的収束性を示したものである．特に，$t \uparrow T$のときに，解$u(x,t)$のホットスポット（空間的最大点）は，$\alpha_0 < \beta_0$ならば$-\infty$に，$\alpha_0 > \beta_0$ならば$+\infty$に行き，$\alpha_0 = \beta_0$のときはある点に収束することを示している．なお，$\mathbb{R}^N$上の熱方程式では，L^1正値解のホットスポットは初期値の重心に収束する[22]．

それでは，$\alpha(t)$と$\beta(t)$が必ずしも定数でない場合はどうだろうか．この場合，ホットスポット$h(t)$の挙動について次の定理が成り立つ．

定理 4.2. ([26]) 任意の初期値に対してある $t_0 \in (0,T)$ が存在し， $t \in (t_0,T)$ に対して (4.1) の解 $u(x,t)$ のホットスポットは一点から成る．さらに，ホットスポット $h(t)$ は次を満たす．
(i) $\alpha(T) > \beta(T)$ ならば $h(t) \to +\infty$ $(t \uparrow T)$.
(ii) $\alpha(T) < \beta(T)$ ならば $h(t) \to -\infty$ $(t \uparrow T)$.
(iii) 任意の正数 T, γ と正の初期値に対し，ある正の連続関数 $\alpha(t)$ と $\beta(t)$ で $\alpha(T) = \beta(T) = \gamma$ および

$$\limsup_{t\uparrow T} h(t) = +\infty, \qquad \liminf_{t\uparrow T} h(t) = -\infty,$$

を満たすものが存在する．

特に (iii) は，無限遠における減衰条件のわずかな揺らぎによって，(4.2) の解 $v(x,t)$ に大きく不規則な振動が発生することを表している．

証明の方針は以下の通りである．まず，対数拡散方程式に対する交点数非増加の原理を証明する．これは二つの異なる解に対し，その交点（差の零点）の数が時間的に非増加であるという性質であり，半線形方程式についてはよく知られている [2]．対数拡散方程式の場合は無限大での取り扱いに多少注意が必要であるが，以下の議論には問題なく成立する．なお，比較原理は交点数非増加の原理の特別な場合である．次に，交点数非増加の原理を用いて v は $s \in (-\log T, \infty)$ で一様有界であること，および有限の時間で単峰性になることを示す．最後に，解 $v(x,s)$ と位相のずれた二つの進行波解 $v_1(x,s) := \varphi(x - c(\alpha_1,\beta_1)s + \theta_1)$ および $v_2(x,s) := \varphi(x - c(\alpha_2,\beta_2)t - \theta_2)$ との交点数に着目し，$\alpha(t)$ と $\beta(t)$ をうまく調整することによりホットスポットの位置をコントロールできる．なお，初期値としては，積分値と無限遠での挙動のみが重要であり，その最大値は任意に小さくできる．

5. あとがき

本稿では非線形熱方程式に対し，初期値の空間的減衰率が解の時間的漸近挙動を決定し，初期値の無限遠での減衰率の揺らぎが解も複雑な振る舞いを引き起こすことを見た．ここで取り上げた問題は異なる方程式に対して定式化されたものであるが，いずれも外乱のクラスを制限するとある種の大域的漸近安定性を満たす一方，そのクラスからはずれた外乱に対しては不安定性を示すという共通点ある．その結果，不安定化によって大きな変動が生じる一方，漸近安定性によって解の挙動をコントロールできるのである．さらには，小さな初期値を用いて複雑な挙動を示す解を構成した点に特色がある．

参考文献

[1] M. Alfaro and A. Ducrot, Sharp interface limit of the Fisher-KPP equation when initial data have slow exponential decay Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B **16** (2011), 15–29.

[2] S. Angenent, The zero set of a solution of a parabolic equation, J. Reine Angew. Math. **380** (1988), 79–96.

[3] G. Barles and P. E. Souganidis, A remark on the asymptotic behavior of the solution of the KPP equation, C. R. Acad. Sci. Paris série I **319** (1994), 679–684.

[4] G. Busca, M.-A. Jendoubi and P. Poláčik, Convergence to equilibrium for semilinear parabolic problems in $\mathbb{R}^N$, preprint. Comm. Partial Differential Equations **27** (2002), 1793–1814.

[5] M. Fila and E. Yanagida, Homoclinic and heteroclinic orbits for a semilinear parabolic equation, Tohoku Math. J. **63** (2011), 561–579.

[6] C. Gui, W.-M. Ni, and X. Wang, On the stability and instability of positive steady states of a semilinear heat equation in $\mathbb{R}^n$, Comm. Pure Appl. Math. **45**, 1153–1181.

[7] C. Gui, W.-M. Ni, and X. Wang, Further study on a nonlinear heat equation, J. Differential Equations **4169** (2001), 588–613.

[8] R. Hamilton, The Ricci flow on surfaces, Contemp. Math. **71** (1988), 237–262.

[9] S.-Y. Hsu, Dynamics near extinction time of a singular diffusion equation, Math. Ann. **323** (2002), 281–318.

[10] K. E. Longman and A. Hirose, Expansion of an electron cloud, Phys. Lett. A **59** (1976), 285–286.

[11] H. Matano, *Convergence of solutions of one-dimensional semilinear parabolic equations*, J. Math. Kyoto Univ. **18** (1978), 221–227.

[12] H. Matano and P. Poláčik, Dynamics of nonnegative solutions of one-dimensional reaction-diffusion equations with localized initial data. Part I: A general quasiconvergence theorem and its consequences, Comm. Partial Differential Equations **41** (2016), 785–811.

[13] H. P. McKean, The central limit theorem for Carleman's equation, Israel J. Math. **21** (1975), 54–92.

[14] H. Ninomiya and E. Yanagida, Dynamics of interfaces in the Fisher-KPP equation for slowly varying initial data, preprint.

[15] 西浦廉政，散逸系における粒子パターンの複製・崩壊・散乱のダイナミクス，数学 **55** (2003), 113–127.

[16] P. Poláčik and E. Yanagida, On bounded and unbounded global solutions of a supercritical semilinear heat equation, Math. Ann. **327** (2003), 745–771.

[17] P. Poláčik and E. Yanagida, Nonstabilizing solutions and grow-up set for a supercritical semilinear diffusion equation, Differential Integral Equations **17** (2004), 535–548.

[18] P. Poláčik and E. Yanagida, Global unbounded solutions of the Fujita equation in the intermediate range, Math. Ann. **360** (2014), 255–266.

[19] P. Poláčik and E. Yanagida, Localized solutions of a semilinear parabolic equation with a recurrent nonstationary asymptotics, SIAM J. Math. Anal. **46** (2014), 3481–3496.

[20] A. Rodríguez and J. L. Vázquez, A well posed problem in singular Fickian diffusion, Arch. Rational Mech. Anal. **110** (1990), 141–163.

[21] J. Rougemont, *Dynamics of kinks in the Ginzburg-Landau equation: approach to a metastable shape and collapse of embedded pairs of kinks*, Nonlinearity **12** (1999), 539–554.

[22] 坂口茂，拡散方程式の解の空間臨界点と零点の挙動，数学 **54** (2003), 249–264.

[23] M. Shimojo, P. Takáč and E. Yanagida, Asymptotic behavior of solutions to the logarithmic diffusion equation with a linear source, to appear.

[24] L. Simon, *Asymptotics for a class of nonlinear evolution equations, with applications to geometric problems*, Annals Math. **118** (1983), 525–571.

[25] E. Yanagida, Irregular behavior of solutions for Fisher's equation, J. Dynam. Differential Equations **19** (2007), 895–914.

[26] E. Yanagida, in preparation.