

p 進局所 Langlands 対応と岩澤主予想

ゼータ同型の関数等式について

中村 健太郎 (佐賀大学)*

1. はじめに

$\mathbb{Q}$ 上定義された固有滑らかな代数多様体に対して, $\mathbb{Q}_p$ 係数のエタールコホモロジーを取ることで $\mathbb{Q}$ の絶対 Galois 群 $G_{\mathbb{Q}}$ の p 進表現 (p 進 Galois 表現) が得られる. このようにして得られる p 進 Galois 表現 (幾何的 p 進 Galois 表現という) からは, L 関数という解析的な対象と Selmer 群や Tate-Shafarevich 群などの代数的, Galois コホモロジー的対象が定義される.

Dirichlet の類数公式 (代数体の Dedekind ゼータ関数の $s = 0$ の周りでの振る舞いと単数群やイデアル類群との関係) や Birch-Swinnerton-Dyer 予想 (代数体上の楕円曲線の L 関数の $s = 1$ の周りでの振る舞いと楕円曲線の有理点や Tate-Shafarevich 群との関係), さらに, これらの予想を全ての幾何的 p 進 Galois 表現に対して拡張した Bloch-加藤予想 ([BK90]) などでも知られているように, 出自の異なるこれらの対象の深い結び付きを調べることは整数論において重要な問題である. このような深い結び付きの背景には L 関数の Galois コホモロジーにおける対応物 (**ゼータ元**) の存在があると思われる. ゼータ元の存在はまだごく限られた場合にしか知られていないが, 例えば Dirichlet の類数公式と関連しては円単数, 楕円単数などの代数体の単数群の特別な元や, 保型形式に付随する p 進 Galois 表現に対しては加藤和也氏 ([Ka04]) が構成したゼータ元などがそのような対応物である. 90 年代に加藤氏が岩澤主予想の一般化として提唱した **一般化岩澤主予想** ([Ka93a], [FK06]) によれば, このようなゼータ元は個々の幾何的 p 進 Galois 表現ごとにばらばらに存在するのではなく, p 進 Galois 表現の連続変形 (族) に対しても存在するであろうと予想されている. p 進 Galois 表現の族に対するゼータ元は **ゼータ同型** と呼ばれる. 例えば, 円単数や加藤氏のゼータ元は, 円分体 $\mathbb{Q}(\zeta_n)$ ($n \geq 1$) に対して系 (Euler 系) をなして存在していることが知られているが, このことはゼータ同型が円分変形という特別な種類の Galois 表現の族に対しては存在していることを表している.

一方, p 進 Galois 表現と保型表現との対応に関する Langlands 予想によれば, 既約な幾何的 p 進 Galois 表現の L 関数は代数的カスプ保型表現の L 関数と一致することが予想されており, その帰結として幾何的 p 進 Galois 表現の L 関数も解析接続や関数等式などの解析的により性質を持つことが予想されている. ゼータ同型が L 関数の代数的対応物であるという考えに従えば, ゼータ同型も保型 L 関数と同様の “関数等式” を満たしているはずだと考えることは自然であろう. ゼータ同型の関数等式を考えるためには, L 関数の関数等式に現れる局所イプシロン因子の Galois コホモロジーにおける対応物を考える必要がある. 加藤氏は一般化岩澤主予想の局所版として, l 進体 $\mathbb{Q}_l$ の絶対 Galois 群 $G_{\mathbb{Q}_l}$ の p 進表現の族に対して, 局所イプシロン因子の Galois コホモロジーにお

本研究は科研費 (課題番号:16K17556) の助成を受けたものである。

2010 Mathematics Subject Classification: 11F80 (primary), 11F85, 11S25 (secondary)

キーワード: 岩澤主予想, p 進局所 Langlands 対応

* 〒 840-8502 佐賀県佐賀市本庄 1 佐賀大学 大学院工学系研究科数理科学専攻

e-mail: nkentaro@cc.saga-u.ac.jp

ける対応物 (**局所イプシロン同型**) の存在に関する**局所イプシロン予想**を定式化し, さらに, ゼータ同型は局所イプシロン同型を局所因子とする関数等式を満たすと予想した (**大域イプシロン予想** [Ka93b],[FK06]).

前置きが長くなってしまったが講演の主題は, この

「ゼータ同型の関数等式」

についてである. p 進 Galois 表現の族に対して存在すると予想されているゼータ同型が保型 L 関数と同様のよい性質を満たすことの背景には, Langlands 対応の p 進族版である p 進 Galois 表現の族と (現状, 正確な定義があるわけではないが) “ p 進保型表現” の族との対応があるのではないかと考えている. この対応の局所版として, Breuil, Colmez([Co10]) らにより, $\mathbb{Q}_p$ の絶対 Galois 群 $G_{\mathbb{Q}_p}$ の 2 次元 p 進表現 (の族) と $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ の p 進 Banach 表現 (の族) との間の対応が構成された ($\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ の **p 進局所 Langlands 対応**). 私は最近, この $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ の p 進局所 Langlands 対応の理論と局所イプシロン予想との間に非常に深い関係があることを発見し, その結果として $G_{\mathbb{Q}_p}$ の 2 次元 p 進表現の族に対する局所イプシロン予想を (ほとんどの場合に) 解決し, さらに加藤氏の構成した保型形式のオイラー系の関数等式 (大域イプシロン予想の特別な場合) を証明することに成功した ([Na17b]).

$$\text{「}p\text{ 進局所 Langlands 対応」} \stackrel{?}{\longleftrightarrow} \text{「局所イプシロン予想」}$$

講演およびこのアブストラクトではこれらの結果についての解説を行いたい.

2. 一般化岩澤主予想, 局所および大域イプシロン予想

2.1. 一般化岩澤主予想, 局所イプシロン予想

2.1.1. どんな予想か?

幾何的 p 進 Galois 表現 V からは, 様々な数論的な量や群, 写像などが定義される. 例えば考える体が $\mathbb{Q}$ の場合は, L 関数の特殊値や (V に対応する代数多様体の) モチビックコホモロジー, モチビックコホモロジーと他の実現 (Hodge 実現や p 進実現) におけるコホモロジーとを結びつけるレギュレーター写像などが定義される. 考える体が $\mathbb{Q}_l$ の場合は, 局所因子 (L 因子, イプシロン因子) の特殊値である局所定数 (L 定数, イプシロン定数), さらに $l = p$ の場合には (de Rham コホモロジーに対応する) $D_{\mathrm{dR}}(V)$, Bloch-Kato exponential 写像などが定義される. これらを適切に組み合わせることで, 本質的には V のガロアコホモロジーからなる 基本直線

$$\Delta(V)$$

と呼ばれる 1 次元ベクトル空間に標準的な基底

$$z^{\mathrm{geom}}(V) \in \Delta(V) \quad (\mathbb{Q} \text{ の場合}), \quad \varepsilon_l^{\mathrm{geom}}(V) \in \Delta(V) \quad (\mathbb{Q}_l \text{ の場合})$$

を定義することができる (ただし, $\mathbb{Q}$ の場合は V に対応する代数多様体に関して, L 関数の特殊値の有理性に関する Beilinson 予想などを仮定する必要がある). こうして幾何的 p 進 Galois 表現に対して標準的に定まる基底が全ての p 進 Galois 表現の族に対して拡張できることを主張するのが一般化岩澤主予想と局所イプシロン予想の内

容である. 例えば, $\mathbb{Z}_p[[T_1, \dots, T_d]]$ 係数の $G_{\mathbb{Q}}$ や $G_{\mathbb{Q}_l}$ の表現 T を考える. このとき, $\mathfrak{X} := \text{Spec}(\mathbb{Z}_p[[T_1, \dots, T_d]][1/p])$ の任意の閉点 $x \in \mathfrak{X}$ に対して, T の x での特殊化 V_x は p 進 Galois 表現になる (これより, T は各点 $x \in \mathfrak{X}$ の p 進 Galois 表現 V_x たちの形式スキーム $\text{Spf}(\mathbb{Z}_p[[T_1, \dots, T_d]])$ 上の族とみなせる). このような T に対しても, T の Galois コホモロジーを用いて, T の基本直線と呼ばれる階数 1 の自由 $\mathbb{Z}_p[[T_1, \dots, T_d]]$ 加群

$$\Delta(T)$$

を定義することができる. この加群の基底

$$z(T) \in \Delta(T) \quad (\mathbb{Q} \text{ の場合}), \quad \varepsilon_l(T) \in \Delta(T) \quad (\mathbb{Q}_l \text{ の場合})$$

で, 閉点 $x \in \mathfrak{X}$ で V_x が幾何的になるもの全てに対して, $z(T), \varepsilon_l(T)$ の x での特殊化 $z(V_x), \varepsilon_l(V_x)$ が

$$z^{\text{geom}}(V_x) = z(V_x) \in \Delta(V_x) \quad (\mathbb{Q} \text{ の場合}), \quad \varepsilon_l^{\text{geom}}(V_x) = \varepsilon_l(V_x) \in \Delta(V_x) \quad (\mathbb{Q}_l \text{ の場合})$$

を満たすものが存在することを主張するのがこれらの予想の内容である. 階数 1 の加群の基底を与えることは加群の自明化を与えることと等しいので, $z(T), \varepsilon_l(T)$ はそれぞれゼータ同型, 局所イプシロン同型 と呼ばれる.

2.1.2. 基本的な例

Bloch-加藤予想との関係 上の状況で $d = 0$, つまり $\mathbb{Z}_p$ 係数の Galois 表現 T の場合を考える. このとき $\mathfrak{X} = \text{Spec}(\mathbb{Q}_p) = \{x\}$ は 1 点集合であり, $V_x = T[1/p]$ となる. ここで, V_x は幾何的とすると, 上の予想は $\mathbb{Q}_p$ 上定義される基底 $z^{\text{geom}}(V_x), \varepsilon_l^{\text{geom}}(V_x) \in \Delta(V_x)$ が, 実はより強く, T から定まる $\mathbb{Z}_p$ 格子 $\Delta(T) \subseteq \Delta(V_x)$ の基底でもあることを主張する予想になる. これは, 考えている体が $\mathbb{Q}$ の場合には V_x に関する L 関数の特殊値の p 進整数性に関する Bloch-加藤予想 ([BK90]) と同値の主張になり, $\mathbb{Q}_l$ の場合には局所定数 ($l = p$ の場合にはさらに Bloch-加藤 exponential 写像など) の p 進整数性に関する Perrin-Riou 予想 ([Pe95]) と同値になる. 従って, 実際には表現の族とは言えないような場合でさえ, これらの予想は非自明である.

岩澤主予想との関係 この場合は主結果とも関わってくるので少し詳しく説明したい. まず, $\mathbb{Q}$ に 1 の p べき根全てを添加した体の Galois 群を $\Gamma := \text{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_{p^\infty})/\mathbb{Q})$ とおき, 岩澤代数を $\Lambda := \mathbb{Z}_p[[\Gamma]]$ とおく. この環は非標準的に $\mathbb{Z}_p[[[T]]] \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p[(\mathbb{Z}_p/2p)^\times]$ と同型になり, 上で考えたような表現の係数環と見なせる. ここで, V を幾何的 p 進 Galois 表現とし, T を Galois 作用で安定な V の $\mathbb{Z}_p$ 格子とする. このとき Λ 係数の Galois 表現

$$\mathbf{Dfm}(T) := T \otimes_{\mathbb{Z}_p} \Lambda$$

を Galois 群の元 g を $x \otimes y \in T \otimes_{\mathbb{Z}_p} \Lambda$ に対して

$$g(x \otimes y) := gx \otimes [\bar{g}]^{-1}y$$

と作用させることで定義する (ここで, $\bar{g} \in \Gamma$ は g を $\mathbb{Q}(\zeta_{p^\infty})$ に制限したもので $[\bar{g}] \in \Lambda$ は $\bar{g}$ の定める完備群環の元とする). この $\mathbf{Dfm}(T)$ を T の 円分変形 と呼ぶ. Shapiro の補題より, 例えば考えている体が $\mathbb{Q}_p$ の場合には $\mathbf{Dfm}(T)$ のガロアコホモロジーに対して Λ 加群の同型

$$H_{\text{Iw}}^i(\mathbb{Q}_p, T) := H^i(\mathbb{Q}_p, \mathbf{Dfm}(T)) \xrightarrow[\text{cor}]{\sim} \varprojlim H^i(\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^n}), T)$$

が成り立つ (以下, $\mathbf{Dfm}(-)$ に関して定まる様々な対象は添え字「Iw」を付けて表すとする. 例 $\varepsilon^{\text{Iw}}(T) := \varepsilon(\mathbf{Dfm}(T)), \Delta^{\text{Iw}}(T) := \Delta(\mathbf{Dfm}(T))$). 右辺のようなコホモロジーの逆極限は岩澤理論で自然に考えるものであり, 岩澤コホモロジー と呼ばれる. 実際に, $\mathbf{Dfm}(T)$ に関する一般化岩澤主予想は T に関する岩澤主予想, 特に T のオイラー系の存在と密接に関係する予想になる. 例えば, $\mu_{p^n} := \{x \in \overline{\mathbb{Q}} | x^{p^n} = 1\}$ とし, $G_{\mathbb{Q}}$ の $\mathbb{Z}_p$ 係数の表現 $\mathbb{Z}_p(1) := \varprojlim_n \mu_{p^n}$ を考える. このとき, Kummer 理論より 1 の原始 p^n 乗根 $\zeta_{p^n} \in \mu_{p^n}$ に対して円単数 $(1 - \zeta_{p^n}) \in \mathbb{Z}[\zeta_{p^n}, 1/p]^{\times}$ に対応するガロアコホモロジーの元

$$c_n \in H^1(\mathbb{Z}[1/p, \zeta_{p^n}], \mathbb{Z}_p(1)) \subseteq H^1(\mathbb{Q}(\zeta_{p^n}), \mathbb{Z}_p(1))$$

が定まる. ここで 1 の原始 p^n 乗根からなる集合 $\{\zeta_{p^n}\}_{n \geq 1}$ で $\zeta_{p^{n+1}}^p = \zeta_{p^n}$ となるものを考えると, この射影極限として岩澤コホモロジーの元

$$c := (c_n)_{n \geq 1} \in H_{\text{Iw}}^1(\mathbb{Z}[1/p], \mathbb{Z}_p(1)) \subseteq H_{\text{Iw}}^1(\mathbb{Q}, \mathbb{Z}_p(1))$$

を定義することができる. 加藤氏 ([Ka93a]) は, これを用いて $\mathbf{Dfm}(\mathbb{Z}_p(1))$ のゼータ同型

$$z^{\text{Iw}}(\mathbb{Z}_p(1)) \in \Delta^{\text{Iw}}(\mathbb{Z}_p(1))$$

を定義した (正確には, これが $\Delta^{\text{Iw}}(\mathbb{Z}_p(1)) \otimes_{\Lambda} \text{Frac}(\Lambda)$ の基底になることはオイラー系の一般論から従い, より強くこれが $\Delta^{\text{Iw}}(\mathbb{Z}_p(1))$ の基底になることは Mazur-Wiles, Rubin により証明された $\mathbb{Q}$ の円分拡大に対する岩澤主予想から従う). この階数 2 の表現への一般化として, 保型形式に付随する加藤氏のオイラー系 ([Ka04]) を用いると, 保型形式に付随するゼータ同型 (の候補) を構成することができる.

$$f(\tau) := q + \sum_{n \geq 2} a_n(f) q^n \quad (\tau \in \mathbb{C}, \text{Im}(\tau) > 0, q := \exp(2\pi i \tau))$$

をレベル N 重さ $k \geq 2$ のカスプ Hecke 固有新形式とする. 体の埋め込み $\overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \mathbb{C}$, $\overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \overline{\mathbb{Q}}_p$ を固定すると $a_n(f) \in \overline{\mathbb{Q}}_p$ とみなすことができるが, $\mathbb{Q}_p$ に $\{a_n(f)\}_{n \geq 2}$ を添加して得られる $\overline{\mathbb{Q}}_p$ の部分体を F_f とする. このとき, Eichler-志村, Deligne により, $G_{\mathbb{Q}}$ の F_f 係数の 2 次元幾何的表現 V_f で, その L 関数 $L(V_f, s)$ が f の L 関数

$$L(f, s) := \sum_{n \geq 1} \frac{a_n(f)}{n^s} \quad (\text{Re}(s) \gg 0)$$

と一致するものが構成されている. 加藤氏は V_f のガロアコホモロジーに対するオイラー系を構成したが, その p ベキ部分 $\{c_{n,f} \in H^1(\mathbb{Z}[1/Np, \zeta_{p^n}], V_f) | n \geq 1\}$ の射影極限として岩澤コホモロジーの元

$$c_f \in H_{\text{Iw}}^1(\mathbb{Z}[1/Np], V_f)$$

が得られる. この元を用いることで, $\mathbf{Dfm}(\mathbb{Z}_p(1))$ の場合と同様に基底

$$\tilde{z}^{\text{Iw}}(V_f) \in \Delta^{\text{Iw}}(V_f) \otimes_{\Lambda} \text{Frac}(\Lambda)$$

($\mathbf{Dfm}(V_f)$ に対するゼータ同型の候補) を定義することができる ([Ka04], [Na17b]). ここで, $\text{Frac}(\Lambda)$ 上になっているのは, この場合は $\mathbb{Q}$ の円分拡大の場合と異なり, 岩澤主予

想が一般には証明されていないからであり, この基底が $\Delta^{\text{Iw}}(V_f)$ の基底にもなっていることが岩澤主予想の成立と密接に関係している. 今回の講演における主結果の一つは

$$\text{「}\tilde{z}^{\text{Iw}}(V_f)\text{の関数等式」}$$

に関するものである ([Na17b]).

より一般的な例 これら以外にも様々な p 進 Galois 表現の族が整数論の重要な問題において自然に現れる. 例えば, 保型形式の p 進族に関する肥田理論により, 「 p で通常」という条件を満たす保型形式は, 保型形式の重さをパラメトライズする重さ空間とよばれる形式スキーム上の族 $\mathcal{F}$ (肥田族) をなして存在していることが知られており, これに対応する肥田族上の Galois 表現の族 $T_{\mathcal{F}}$ の存在も知られている. これに関する岩澤主予想, 言い換えれば, $\mathbf{Dfm}(T_{\mathcal{F}})$ に関する一般化岩澤主予想も近年活発に研究されている (落合 [Oc06] など). また, Mazur による Galois 表現の変形理論によれば, $\mathbb{F}_p$ 係数の Galois 表現 $\bar{T}$ を一つ固定すると, 法 p 還元して $\bar{T}$ と同型になる p 進 Galois 表現全体は $\mathbb{Z}_p[[T_1, \dots, T_d]]/I$ (I はあるイデアル) という形の環 R^{univ} (普遍変形環) 上の族 $T^{\text{univ}}(\bar{T}$ の普遍変形) をなしていることが知られている. これが最も普遍的な p 進 Galois 表現の族であるので, T^{univ} に対して

$$z(T^{\text{univ}}) \in \Delta(T^{\text{univ}}) \quad (\mathbb{Q} \text{ の場合}), \quad \varepsilon_l(T^{\text{univ}}) \in \Delta(T^{\text{univ}}) \quad (\mathbb{Q}_l \text{ の場合})$$

の存在を示すことが一般化岩澤主予想および局所イプシロン予想の最終目標となる. 近年の Galois 表現の保型性 (幾何的 Galois 表現が代数的保型表現に付随する Galois 表現であることを示す問題) の飛躍的な進展において 「 $R = T$ 」 と呼ばれる定理 (ガロア表現の変形が保型表現の変形 (Hecke 環 T) と等しいことを示す定理) が最も重要な定理であるが, この定理においても R^{univ} および T^{univ} は主要な対象になる. 将来的に, 「 $R = T$ 」定理と T^{univ} に関する一般化岩澤主予想を融合したような研究をしたいとおぼろげに思っているが, まだ実現できていない.

2.1.3. どこが難しいか?

これらの予想で最も難しい (と私が考えている) 点は, 幾何的 p 進 Galois 表現 V に対して $z^{\text{geom}}(V)$ や $\varepsilon_l^{\text{geom}}(V)$ を定義するのに用いられる (L 関数の特殊値や局所定数などの) ほとんどの対象は, 幾何的でない p 進 Galois 表現に対しては定義することができないということである. ここで, 再び最初の設定 (2.1.1 の設定) に戻って $\mathbb{Z}_p[[T_1, \dots, T_d]]$ 係数の Galois 表現 T を考える. $\mathfrak{X} := \text{Spec}(\mathbb{Z}_p[[T_1, \dots, T_d]][1/p])$ の閉点の部分集合

$$\mathfrak{X}^{\text{geom}} := \{x \in \mathfrak{X} \mid V_x \text{ は幾何的}\}$$

を考える. このとき, 一般には

$$\mathfrak{X}^{\text{geom}} \subsetneq \mathfrak{X}$$

であるため, $x \in \mathfrak{X}^{\text{geom}}$ に対してしか定義が適用できない $z^{\text{geom}}(V_x)$ や $\varepsilon_l^{\text{geom}}(V_x)$ たちを $\mathfrak{X}$ 全体に拡張するためには, 対応する代数多様体などに依存しない Galois 表現そのものの本質により適った別の定義を見つけないといけないのである.

ここで, 考えている体が $\mathbb{Q}_l$ で, かつ $l \neq p$ の場合は例外的にこのような現象は起きない. この場合, Grothendieck の局所モノドロミー定理と呼ばれる定理によって, $G_{\mathbb{Q}_l}$ の

全ての p 進表現 V から Weil-Deligne 群の表現 という表現論的対象 $W_l(V)$ を定義することができる.

$$V \mapsto W_l(V)$$

Deligne, Langlands の局所因子の理論 ([De73]) により, Weil-Deligne 群の表現からは局所因子, さらにはその特殊値の局所定数 $L_l(W_l(V)), \varepsilon_l(W_l(V))$ を定義することができ, これらを用いて V に対して基底 $\varepsilon_l^{\text{geom}}(V) \in \Delta(V)$ を定義することができる. このような理由もあり, $l \neq p$ の場合は $G_{\mathbb{Q}_l}$ の全ての p 進表現が幾何的 p 進表現と定義される.

$$\text{「} G_{\mathbb{Q}_l} (l \neq p) \text{ の幾何的 } p \text{ 進表現} \text{」} = \text{「} \text{全ての } p \text{ 進表現} \text{」}$$

これから直ちに従うというわけでは全くないが, このような特殊事情のおかげで, 体が $\mathbb{Q}_l$ で, かつ $l \neq p$ の場合は局所イプシロン予想は一般の場合に既に解決されている (安田 [Ya09]).

以上のことから, p 進表現の族への拡張という問題において真の困難が生じるのは

- 一般化岩澤主予想 (大域体 $\mathbb{Q}$ の場合)
- $l = p$ の場合の ($G_{\mathbb{Q}_p}$ の p 進表現の族に関する) 局所イプシロン予想

の2つの場合になる. 今回解説したい主結果の一つは $G_{\mathbb{Q}_p}$ の2次元 p 進表現の族に関する局所イプシロン予想である. そこで, $l = p$ の場合の局所イプシロン予想について次で少し詳しく解説したい.

2.1.4. $l = p$ の場合の局所イプシロン予想 (主結果 1)

$G_{\mathbb{Q}_p}$ の幾何的 p 進表現 まずは, $G_{\mathbb{Q}_p}$ の幾何的 p 進表現がどのようなものであるか, ごく簡単に説明することから始めたい. $G_{\mathbb{Q}_p}$ の p 進表現 V に対して, Fontaine の p 進周期環 ([Fo82], [Fo94]) という重要な環を用いて有限次元 $\mathbb{Q}_p$ ベクトル空間

$$D_{\text{crys}}(V), \quad D_{\text{dR}}(V)$$

を対応することができる. これらは単なるベクトル空間ではなく, $D_{\text{crys}}(V)$ は Frobenius 作用 $\varphi : D_{\text{crys}}(V) \xrightarrow{\sim} D_{\text{crys}}(V)$, $D_{\text{dR}}(V)$ は減少フィルトレーション (Hodge フィルトレーション) $\{D_{\text{dR}}^i(V)\}_{i \in \mathbb{Z}}$ という付加構造が付いている. V が $\mathbb{Q}_p$ 上の代数多様体 X のエタールコホモロジー $H_{\text{ét}}^i(X \otimes_{\mathbb{Q}_p} \overline{\mathbb{Q}_p}, \mathbb{Q}_p)$ の場合は, $D_{\text{dR}}(V)$ は X の de Rham コホモロジー $H_{\text{dR}}^i(X/\mathbb{Q}_p)$ と同型であり, さらに X が固有かつ $\mathbb{Z}_p$ 上の良いモデル $\mathfrak{X}$ を持つ場合は, $D_{\text{crys}}(V)$ は $\mathfrak{X}_{\mathbb{F}_p} := \mathfrak{X} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{F}_p$ のクリスタリンコホモロジー $H_{\text{crys}}^i(\mathfrak{X}_{\mathbb{F}_p}/\mathbb{Z}_p)$ と同型になる (付加構造も込みで同型である. これらは p 進 Hodge 理論の非常に深い定理である!!). このような対応関係に関する (当時の) 予想を背景として, Fontaine は $* = \{\text{crys}, \text{dR}\}$ に対して等式

$$\dim_{\mathbb{Q}_p} D_*(V) = \dim_{\mathbb{Q}_p}(V)$$

を満たす V を, それぞれ クリスタリン表現, de Rham 表現 と定義した. 上で述べたことから, 任意の X に対して $H_{\text{ét}}^i(X \otimes_{\mathbb{Q}_p} \overline{\mathbb{Q}_p}, \mathbb{Q}_p)$ は de Rham 表現であり, さらに X が固有かつ $\mathbb{Z}_p$ 上の良いモデルを持つ場合は, これはクリスタリン表現になる. このような対応に基づき, $G_{\mathbb{Q}_p}$ の p 進 Galois 表現では de Rham 表現のことを幾何的 p 進表現と呼ぶ.

$$\text{「} G_{\mathbb{Q}_p} \text{ の幾何的 } p \text{ 進表現} \text{」} = \text{「} \text{de Rham 表現} \text{」}$$

先ほど述べたように, $l = p$ の場合は幾何的でない p 進表現が (幾何的であるものよりもはるかに多く!) 存在するということが我々の問題において重要な点であった.

$$\{\text{de Rham 表現}\} \subsetneq \{\text{全ての } p \text{ 進表現}\}$$

$\varepsilon_p^{\text{geom}}(V) \in \Delta(V)$ の定義について次に, de Rham 表現 V に対して $\varepsilon_p^{\text{geom}}(V) \in \Delta(V)$ がどのような対象を用いて定義されるか簡単に解説したい. まず重要なのは, $l \neq p$ の場合の Grothendieck の局所モノドロミー定理の $l = p$ 版である p 進局所モノドロミー定理 ([Be02]) である (証明は $l = p$ の場合の方がはるかに難しい!). 定理の詳細な内容は述べないが, この定理によって de Rham 表現 V に対しても Weil-Deligne 群の表現 $W_p(V)$ を定義することができ, 従って V の局所定数を $W_p(V)$ の局所定数 $L_p(W_p(V)), \varepsilon_p(W_p(V))$ として $l \neq p$ の場合と同様な仕方で定義することができる.

$$V \mapsto W_p(V)$$

ここで重要なのは, $l \neq p$ の場合は対応 $V \mapsto W_l(V)$ で V の情報のほとんどが保たれるのに対して, $l = p$ の場合は対応 $V \mapsto W_p(V)$ によって V の重要な情報が抜け落ちてしまうという点である. この事実と対応して, $l = p$ の場合の $\varepsilon_p^{\text{geom}}(V)$ の定義のためには局所定数 $L_p(W_p(V)), \varepsilon_p(W_p(V))$ だけでは不十分である. 局所定数以外に $\varepsilon_p^{\text{geom}}(V)$ を定義するのに必要なものは, まずは, $D_{\text{dR}}(V)$ の Hodge フィルトレーションの情報である. $D_{\text{dR}}^{-i}(V)/D_{\text{dR}}^{-i+1}(V) \neq \{0\}$ となる整数 i のことを V の Hodge-Tate 重み といい, $\varepsilon_p^{\text{geom}}(V)$ の定義においては V の Hodge-Tate 重みの情報が必要になる. これでもまだ全然十分ではない, $\varepsilon_p^{\text{geom}}(V)$ の定義において最も重要な対象は, Bloch-加藤 exponential 写像と呼ばれる写像 ([BK90])

$$\exp_V : D_{\text{dR}}(V)/D_{\text{dR}}^0(V) \rightarrow H^1(\mathbb{Q}_p, V)$$

およびその双対である双対 exponential 写像

$$\exp_V^* : H^1(\mathbb{Q}_p, V) \rightarrow D_{\text{dR}}^0(V)$$

と呼ばれる写像である ([Ka93a]). 定義についてはここで述べることはできないが, 特に後者の写像は重要で, 例えば V が $G_{\mathbb{Q}}$ の幾何的 p 進表現のとき, 自然な制限写像 $H^1(\mathbb{Q}, V) \xrightarrow{\text{loc}_p} H^1(\mathbb{Q}_p, V)$ との合成で写像

$$H^1(\mathbb{Q}, V) \xrightarrow{\text{loc}_p} H^1(\mathbb{Q}_p, V) \xrightarrow{\exp_V^*} D_{\text{dR}}^0(V)$$

が得られるが, 多くの重要な例で, この写像により $H^1(\mathbb{Q}, V)$ に入っているゼータ元が対応する L 関数の特殊値と結び付くことが知られている. 定義は述べないが, $\varepsilon_p^{\text{geom}}(V)$ はこれらの情報全てを用いて定義される.

$$\varepsilon_p^{\text{geom}}(V) = \{L_p(W_p(V)) + \varepsilon_p(W_p(V)) + \text{Hodge Tate 重み} + \exp_V + \exp_V^*\}$$

(ここで, 右辺の記号「+」は, 別に数を足しているわけではなく「これらの情報を合わせたもの」という雰囲気を表すために用いている)

知られている結果

局所イプシロン予想について従来知られていた代表的な結果を挙げる (下に行くほど一般的になっている).

- 階数 1 の p 進表現の族の場合 (加藤 [Ka93b])
- $\mathbf{Dfm}(V)$ (V はクリスタリン表現) の場合 (Benois-Berger [BB08], Loeffler-Venjakob-Zerbes [LVZ15])
- 三角表現 (trianguline 表現) の族の場合 ([Na17a])

三角表現の定義は述べないが, V が deRham 表現の場合は V が三角表現であることと $W_p(V)$ が三角表現 (つまり, 階数 1 の表現の拡大の繰り返しになっている) は同値になる. この場合, イプシロン定数 $\varepsilon_p(W_p(V))$ は Gauss 和を用いて具体的に記述できる. Gauss 和は p 進 Galois 表現を扱う中で自然に現れるので, 局所定数の族への拡張という局所イプシロン予想の本来の主題にとってはそこまで面白い結果ではないように思える. 局所イプシロン予想が本当に面白くなるのは $W_p(V)$ が三角表現でない場合 (例えば既約となる) 場合である. 次に紹介する主結果 1 ([Na17b]) は, この場合を包含する初めての結果である.

主結果 1 「全ての 2 次元 p 進表現の族に対して局所イプシロン予想は (ほとんどの場合) 正しい」

これをもう少しわかり易くするために, 例えば $\mathbb{F}$ を $\mathbb{F}_p$ の有限次拡大体とし, $G_{\mathbb{Q}_p}$ の $\mathbb{F}$ 係数の 2 次元表現 $\bar{T}$ を考える. R^{univ} を $\bar{T}$ の普遍変形環, T^{univ} を $\bar{V}$ の普遍変形とする (簡単のためこれらが存在する場合を考える). このとき, $\Delta(T^{\text{univ}})$ のある基底

$$\varepsilon_p(T^{\text{univ}}) \in \Delta(T^{\text{univ}})$$

を構成することができ, さらに, 任意の閉点 $x \in \text{Spec}(R^{\text{univ}}[1/p])$ で T^{univ} の x での特殊化 V_x が de Rham であるものに対して, $\varepsilon_p(T^{\text{univ}})$ の x での特殊化 $\varepsilon_p(V_x)$ は等式

$$\varepsilon_p(V_x) = \varepsilon_p^{\text{geom}}(V_x)$$

を満たすことが証明できた. さらにこの性質を満たす $\varepsilon_p(T^{\text{univ}})$ は一意であることも証明できる. ここで最も重要な点は, 等式 $\varepsilon_p(V_x) = \varepsilon_p^{\text{geom}}(V_x)$ を $W_p(V)$ が三角表現でない場合, つまり既約表現の場合にも示せていることである. この場合の等式 「 $\varepsilon_p(V_x) = \varepsilon_p^{\text{geom}}(V_x)$ 」 において, $\text{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ の p 進局所 Langlands 対応の最も深い部分の理論が用いられる. これらに関することを第 4 章で解説する.

2.2. 大域イプシロン予想

2.2.1. どんな予想か?

簡単のため $p \geq 3$ とする. $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}} := \hat{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ を $\mathbb{Q}$ のアデールとし, π を $\text{GL}_n(\mathbb{A}_{\mathbb{Q}})$ のカスプ保型表現とする. 保型表現の L 関数の理論より, π の L 関数 $L(\pi, s)$ および ∞ で完備化した完備 L 関数 $\Lambda(\pi, s) := L_{\infty}(\pi, s)L(\pi, s)$ を定義することができ, $\Lambda(\pi, s)$ は (解析接続と) 関数等式

$$\Lambda(\pi, s) = \varepsilon(\pi, s)\Lambda(\pi^{\vee}, 1-s)$$

を満たす (ここで, $\pi^{\vee}$ は π の反傾表現) ことが知られている. ここで, $\varepsilon(\pi, s)$ はイプシロン因子と呼ばれ, $\mathbb{Q}$ の各素点 $l \leq \infty$ での π の局所成分から定まる局所イプシロン因子 $\varepsilon(\pi_l, s)$ の積

$$\varepsilon(\pi, s) = \prod_{l \leq \infty} \varepsilon(\pi_l, s)$$

として定義されるものである (ここでは簡単のため、局所イプシロン因子を定義するときに必要な加法指標などの記号は省いた). これと類似の“関数等式”をゼータ同型 $z(T) \in \Delta(T)$ が満たすというのが大域イプシロン予想の内容である.

S を p を含む素数の有限集合とする. $\mathbb{Q}_S$ を任意の素数 $l \notin S$ が $\mathbb{Q}$ 上不分岐となる最大の Galois 拡大とし、その Galois 群を $G_{\mathbb{Q},S} := \text{Gal}(\mathbb{Q}_S/\mathbb{Q})$ と表す. T を (簡単のため) $\mathbb{Z}_p[[T_1, \dots, T_d]]$ 係数の $G_{\mathbb{Q},S}$ の表現とし、 $T^\vee$ をその双対、 $T^\vee(1) := T^\vee \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Z}_p(1)$ (T の Tate 双対) とおく. T の基本直線を $\Delta_S(T)$ ($G_{\mathbb{Q},S}$ の表現としての Galois コホモロジーで定義される) おき、 $l \in S$ に対して $T|_{G_{\mathbb{Q}_l}}$ の基本直線を $\Delta_l(T)$ とおく.

このとき、大域 Galois 表現の Galois コホモロジーに対する Poitou-Tate 双対性により、基本直線の間に標準的な同型

$$\Delta_S(T^\vee(1)) \xrightarrow{\sim} \otimes_{l \in S} \Delta_l(T) \otimes_R \Delta_S(T)$$

を定義することができる. 以下、この同型で両者を同一視する.

$T, T^\vee(1)$ に対して一般化岩澤主予想と局所イプシロン予想が成り立っていると仮定し、ゼータ同型や局所イプシロン同型を

$$z_S(T) \in \Delta_S(T), \quad \varepsilon_l(T) \in \Delta_l(T)$$

などと表す.

以上の設定で、上の同型による同一視の下で等式

$$z_S(T^\vee(1)) = \otimes_{l \in S} \varepsilon_l(T) \otimes z_S(T)$$

が成り立つことを主張するのが T に対する大域イプシロン予想の内容である ([Ka93b],[FK06]).

ここで、 $z_S(T)$ と $z_S(T^\vee(1))$ の現れる位置が保型表現の関数等式のときと逆になっているが、これは幾何的 p 進表現 V に対して $z^{\text{geom}}(V)$ は L 関数 $L(V^\vee(1), s)$ の $s = 0$ での特殊値と関連するという事情による. また、大域イプシロン予想においては保型表現のときに現れた無限素点での対象がない. この見た目には失われているように見える無限素点での情報は、実は $z(T)$ や $\varepsilon_p(T)$ の中に不思議な形で現れることが多い. 例えば、無限素点での L 関数 $L_\infty(\pi, s)$ に含まれている保型表現の重さ (Hodge 重み) に関する情報は $\varepsilon_p(V)$ の中にある Hodge-Tate 重みの情報として現れる.

2.2.2. 階数 1 の場合

$S = \{p\}$ とし、 $G_{\mathbb{Q},S}$ の表現 $\mathbb{Z}_p(1)$ の変分変形 $\mathbf{Dfm}(\mathbb{Z}_p(1))$ を考える. 加藤氏は、自身が構成したゼータ同型と局所イプシロン同型

$$z_S^{\text{Iw}}(\mathbb{Z}_p(1)) \in \Delta_S^{\text{Iw}}(\mathbb{Z}_p(1)), \quad \varepsilon_p^{\text{Iw}}(\mathbb{Z}_p(1)) \in \Delta_p^{\text{Iw}}(\mathbb{Z}_p(1))$$

が上の形の関数等式を満たすことを証明した ([Ka93b]).

2.2.3. 加藤のオイラー系の関数等式 (主結果 2)

主結果 2 は、この定理の階数 2 の場合への一般化である. 2.1.2 の例にあるカスプ形式 f を考え、 $S := \{l|N\} \cup \{p\}$ とおく. このとき、2.1.2 で定めたゼータ同型の候補 $\tilde{z}_S^{\text{Iw}}(V_f) \in \Delta_S^{\text{Iw}}(V_f)$ が、主結果 1 から定まる $\mathbf{Dfm}(V_f)|_{G_{\mathbb{Q}_p}}$ に対する局所イプシロン同型 $\varepsilon_p^{\text{Iw}}(V_f) \in \Delta_p^{\text{Iw}}(V_f)$ を p での局所因子とする関数等式を満たすことを証明した ([Na17b]).

主結果 2 「保型形式 f に付随するゼータ同型 $\tilde{z}_S^{\text{Iw}}(V_f)$ の関数等式」

3. $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ の p 進局所 Langlands 対応

$\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ の p 進局所 Langlands 対応とは, $G_{\mathbb{Q}_p}$ の 2 次元 p 進表現と $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ の p 進 Banach 表現との対応に関する理論である. これは, (Frobenius 半単純な) Weil-Deligne 群の 2 次元表現と $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ の既約許容表現との対応である $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ の “古典的” 局所 Langlands 対応の p 進係数類似に関する理論である. これらの表現の定義は略するが, “古典的” な場合には両者の表現の係数は $\mathbb{C}$ で離散位相を考えていたのに対し, p 進局所 Langlands 対応では $G_{\mathbb{Q}_p}$ や $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ の位相と相性のよい p 進的な位相の入った係数の表現を考える. そのため, p 進局所 Langlands 対応で扱う表現の方がはるかに複雑な対象になる.

Breuil([Br03a],[Br03b],[Br04]) により全貌は定まっていなかった予想の形で提唱されたこの理論は, Colmez([Co10]) が (φ, Γ) 加群([Fo91]) を用いて Galois 表現から $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ の表現を系統的に構成する方法を発見したことで飛躍的に発展し, その後 Berger-Breuil([BB01]), Kisin([Ki10]), Pasukunas([Pa13]) らによるいくつかの重要な研究の後, 最終的に Colmez-Dospinescu-Paskunas([CDP14]) によって完全な形で証明された. この対応の最終形は, Colmez の構成法が

「 $G_{\mathbb{Q}_p}$ の絶対既約 2 次元 p 進表現」(の同型類)

から

「 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ の絶対既約非通常許容 p 進 Banach 表現」(の同型類)

(後者の定義は略) への一対一対応を与えるという形で述べられる. 係数が p 進的であるため, この対応の p 進族版が自然に考えられる点がここでは重要である. Emerton([Em11]) と Kisin([Ki09]) は, それぞれ独立な方法で p 進族版の対応を用いて, $G_{\mathbb{Q}}$ の 2 次元幾何的 p 進 Galois 表現 V の保型性に関する Fontaine-Mazur 予想をほとんどの場合に解決した (Wiles が証明した志村-谷山予想は, この定理の非常に限られた場合に含まれる).

$\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ の p 進局所 Langlands 対応をこれとは別方向に応用したのが主結果 1 である. Emerton と Kisin が Fontaine-Mazur 予想へ応用した際には, 両者の表現の族の間に対応関係があるということが本質的に重要であったが, 局所イプシロン予想への応用のためにはこれだけでは不十分で, (φ, Γ) 加群を用いた対応の構成そのもの (Colmez の理論の最も深い部分) を駆使する必要がある. もっと言うと, Colmez の理論を経由して局所イプシロン予想を考えると, $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ の p 進局所 Langlands 対応の様々な定理が局所イプシロン同型が満たすべき様々な性質の成立と同値であることまで示すことができる!

Colmez の理論の詳細については述べることはできないが, 対応の構成において最も理論的に深い部分と思われる 2 点

- $w := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ 作用の定義,
- 局所代数的ベクトルの記述 (古典的局所 Langlands 対応との整合性),

についてコメントして本章を終えたい. これらの性質はそのまま主結果 1 の証明においても最も重要な 2 点になる!

w 作用の定義について. (φ, Γ) 加群の基礎的な理論を用いると, $G_{\mathbb{Q}_p}$ の 2 次元 p 進表現の族 T から, 上半三角行列全体のなす部分群 $B \subseteq \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ の表現 $\Pi(T)$ までなら構成

することは比較的容易である (実際, ここまでは任意階数の T に対して定義することが可能である). こうして定義された

「 $\Pi(T)$ に自然に w 作用が定義できる」

ことを示すのが $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ の p 進局所 Langlands 対応の根幹に関わる重要な問題になる.

局所代数的ベクトルの記述について. V を $G_{\mathbb{Q}_p}$ の既約 2 次元 p 進表現, $\Pi(V)$ を対応する $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ の Banach 表現とする. $\Pi(V)$ の連続線形双対を $\Pi(V)^\vee := \mathrm{Hom}_F^{\mathrm{cont}}(\Pi(V), F)$ (F は表現 $\Pi(V)$ の係数となる $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大体とする) とし, $x \in \Pi(V)^\vee, y \in \Pi(V)$ に対して $[x, y] := x(y) \in F$ と表す. $\Pi(V)$ の元 y が局所代数的であることを, 任意の $x \in \Pi(V)^\vee$ に対して $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ 上の関数 $g \mapsto [g \cdot x, y] \in F$ が局所代数的関数になることと定める. $\Pi(V)$ の局所代数的な元全体の集合を $\Pi(V)^{\mathrm{alg}}$ と書く. Colmez は次の同値性

$$\left[\Pi(V)^{\mathrm{alg}} \neq \{0\} \right] \iff \left[V \text{ が de Rham 表現かつ regular} \right]$$

を証明した (ここで, V の Hodge-Tate 重み (この場合, 重複度込みの 2 つの整数になる) が相異なる場合 $k_2 > k_1$ のことを regular という).

Colmez と Emerton ([Em11]) は, これらが満たされるときに, さらに $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ の (局所代数的な) 表現の同型

$$\Pi(V)^{\mathrm{alg}} \xrightarrow{\sim} \pi^{LL}(W_p(V)) \otimes_F \mathrm{Sym}^{k_2-k_1-1}(F^2) \otimes_F \det^{k_1}$$

(ここで, $\pi^{LL}(W_p(V))$ は古典的局所 Langlands 対応で $W_p(V)$ に対応する $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ の許容表現 (の F 上のモデル) とする) が存在することを証明した (古典的局所 Langlands 対応との整合性). これは, $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ の p 進局所局所 Langlands 対応において (おそらく) 最も証明の難しい定理であり, 特に Emerton が証明した $W_p(V)$ が既約 ($\iff \pi^{LL}(W_p(V))$) が supercuspidal 表現) の場合の証明は, 現在までに大域的な手法による (モジュラー曲線の完備コホモロジーというものをを用いる) 証明しか知られていない.

4. 階数 2 の場合の局所イプシロン予想の証明の方針

主結果 1 の証明について解説する.

証明は次の 2 段階 ($G_{\mathbb{Q}_p}$ の 2 次元 p 進表現の族 T に対する)

- 局所イプシロン同型 $\varepsilon_p(T)$ の構成,
- $\varepsilon_p^{\mathrm{geom}}(V)$ との比較,

に分かれる.

4.1. 局所イプシロン同型 $\varepsilon_p(T)$ の構成 (w 作用を用いる)

古典的な Kirillov モデルの理論 ($\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ の既約 smooth 許容表現を $\mathbb{Q}_p^\times$ 上の局所定数関数の空間の中に実現する理論) によれば, $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ の既約 smooth 許容表現 π のイプシロン定数 (これを $\varepsilon_p(\pi)$ とおく) は, $w \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ の π への作用を用いて記述することができる. この類似として, $G_{\mathbb{Q}_p}$ の 2 次元 p 進表現の族 T に対して, Banach 表現の族 $\Pi(T)$ への w 作用を用いて T の局所イプシロン同型 $\varepsilon_p(T) \in \Delta(T)$ を構成しようというのが基本的なアイデアである.

実際には, より一般に $\mathbf{Dfm}(T)$ の局所イプシロン同型 $\varepsilon_p^{\text{Iw}}(T) \in \Delta^{\text{Iw}}(T)$ を定義する (これができたら底変換で $\varepsilon_p(T) \in \Delta(T)$ も得られる). $\mathbf{Dfm}(T)$ の基本直線 $\Delta^{\text{Iw}}(T)$ の本質的な部分は $H_{\text{Iw}}^1(\mathbb{Q}_p, T)$ になるので, このアイデアを実現するためには $H_{\text{Iw}}^1(\mathbb{Q}_p, T)$ と $\Pi(T)$ を結び付けることが必要になる. 以下, 簡単のため, $V = T$ が既約2次元 p 進表現の場合の構成を説明する (一般の T の場合の構成も本質的には同様にできる). $g_p := \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

とおき, $\Pi(V)$ の中心指標の $\begin{pmatrix} 1/p & 0 \\ 0 & 1/p \end{pmatrix}$ での値を δ とおく. $\Pi(V)$ の連続双対 $\Pi(V)^\vee$ の g_p 作用で不変な元たちのなす部分空間を $(\Pi(V)^\vee)^{g_p=1}$ とおき, 同様に g_p が δ 倍で作用する部分空間を $(\Pi(V)^\vee)^{g_p=\delta}$ とおく. このとき w は同型

$$w : (\Pi(V)^\vee)^{g_p=1} \xrightarrow{\sim} (\Pi(T)^\vee)^{g_p=\delta}$$

を導くことに注意. $\gamma \in \Gamma$ の作用を $\begin{pmatrix} \chi(\gamma) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \text{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ の作用 ($\chi : \Gamma \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}_p^\times$ は p 進円分指標) として定めることで, $(\Pi(V)^\vee)^{g_p=1}$ や $(\Pi(V)^\vee)^{g_p=\delta}$ は $\Lambda[1/p]$ 加群になる (正確には $(\Pi(V)^\vee)^{g_p=\delta}$ への作用はこの作用を少し捻ったものになる). ここで, Colmez の理論を用いると, $\Lambda[1/p]$ 加群の同型

$$(\Pi(V)^\vee)^{g_p=1} \xrightarrow{\sim} H_{\text{Iw}}^1(\mathbb{Q}_p, V), \quad (\Pi(V)^\vee)^{g_p=\delta} \xrightarrow{\sim} H_{\text{Iw}}^1(\mathbb{Q}_p, V^\vee(1))$$

を定義することができる (ここが深い!). これらの同型で両者を同一視するとことで, 岩澤コホモロジーへの w 作用

$$w : H_{\text{Iw}}^1(\mathbb{Q}_p, V) \xrightarrow{\sim} H_{\text{Iw}}^1(\mathbb{Q}_p, V^\vee(1))$$

が定まる. このとき, $\varepsilon_p^{\text{Iw}}(V) \in \Delta^{\text{Iw}}(V)$ は, この同型と $\mathbf{Dfm}(V)$ に関する Tate 双対

$$\{, \}_{\text{Tate}} : H_{\text{Iw}}^1(\mathbb{Q}_p, V) \times H_{\text{Iw}}^1(\mathbb{Q}_p, V^\vee(1)) \rightarrow \Lambda[1/p]$$

との合成で得られる最高次外積 $\wedge^2 H_{\text{Iw}}^1(\mathbb{Q}_p, V)$ ($H_{\text{Iw}}^1(\mathbb{Q}_p, V)$ は階数2の自由 $\Lambda[1/p]$ 加群であることに注意) の自明化

$$\wedge^2 H_{\text{Iw}}^1(\mathbb{Q}_p, V) \xrightarrow{\sim} \Lambda[1/p] : x_1 \wedge x_2 \mapsto \{x_1, w \cdot x_2\}_{\text{Tate}}$$

から自然に誘導されるものとして定義される.

4.2. $\varepsilon_p^{\text{geom}}(V)$ との比較 (古典的局所 Langlands 対応との整合性を用いる)

V を regular な既約2次元 de Rham 表現とする. 2.1.4. で解説した $\varepsilon_p^{\text{geom}}(V) \in \Delta(V)$ と 4.1 で定めた $\varepsilon_p(V) \in \Delta(V)$ が同じものであることを示すのがここでの目標になる. V に対応する Weil-Deligne 群の表現 $W_p(V)$ が既約の場合 ($\iff \pi^{LL}(W_p(V))$ が $\mathfrak{s}$ supercuspidal 表現) が最も重要なので, この場合のみについて解説する. この場合, $\varepsilon_p^{\text{geom}}(V)$ の本質的な部分は, 任意の $x \in H_{\text{Iw}}(\mathbb{Q}_p, V)$ を写像

$$\alpha : H_{\text{Iw}}^1(\mathbb{Q}_p, V) \xrightarrow{\text{sp}} H^1(\mathbb{Q}_p, V) \xrightarrow{\exp_V^*} D_{\text{dR}}^0(V)$$

写したものの $\alpha(x)$ と $\varepsilon_p(W_p(V))$ の2つの部分で,

$$\varepsilon_p^{\text{geom}}(V) \iff \lceil \varepsilon_p(W_p(V)) + \alpha(x) \rceil$$

$\varepsilon_p(V)$ の本質的な部分は任意の $x \in H_{\text{Iw}}(\mathbb{Q}_p, V)$ を同型 $w : H_{\text{Iw}}^1(\mathbb{Q}_p, V) \xrightarrow{\sim} H_{\text{Iw}}^1(\mathbb{Q}_p, V^\vee(1))$ と

$$\beta : H_{\text{Iw}}^1(\mathbb{Q}_p, V^\vee(1)) \xrightarrow{\text{sp}} H^1(\mathbb{Q}_p, V^\vee(1)) \xrightarrow{\exp_{V^\vee(1)}^*} D_{\text{dR}}^0(V^\vee(1))$$

との合成で写したものの $\beta(w \cdot x)$ になる (正確には Hodge-Tate 重みに関してある仮定が必要なのであるが, 簡単のためこれらの事情は無視することにする).

$$\varepsilon_p(V) \iff \beta(w \cdot x)$$

よって, $\varepsilon_p(V) = \varepsilon_p^{\text{geom}}(V)$ を示すためには, 次の関係

$$\lceil \varepsilon_p(W_p(V)) + \alpha(x) \rceil \stackrel{?}{\iff} \beta(w \cdot x)$$

を調べればよい. 4.1.1 で紹介した同一視を用いて

$$x \in (\Pi(V)^\vee)^{g_p=1}, \quad w \cdot x \in (\Pi(V)^\vee)^{g_p=\delta}$$

とみなして $\Pi(V)$ 側で比べるというのが基本的なアイデアである. Colmez の局所代数的 Kirillov モデルの定理 (B の表現としての $\Pi(V)^{\text{alg}}$ を $\mathbb{Q}_p^\times$ 上の局所代数的関数の空間に実現する定理) というものを用いると, $\mathbb{Q}_p^\times$ 上の関数として具体的に記述できる元

$$y_\alpha, y_\beta \in \Pi(V)^{\text{alg}}$$

で, 任意の $x \in (\Pi(V)^\vee)^{g_p=1}, x' \in (\Pi(V)^\vee)^{g_p=\delta}$ に対してそれぞれ (ほぼ) 等式

$$\alpha(x) \doteq [x, y_\alpha], \quad \beta(x') \doteq [x', y_\beta]$$

を満たすものを構成することができる. y_α, y_β の定義はしないが, ここで最も重要なのは, 古典的局所 Langlands 対応との整合性によって得られた同型

$$\Pi(V)^{\text{alg}} \xrightarrow{\sim} \pi^{LL}(W_p(V)) \otimes_F \text{Sym}^{k_2-k_1-1}(F^2) \otimes \det^{k_1}$$

と $\pi^{LL}(W_p(V))$ に対する古典的 Kirillov モデルの理論を用いると $w \cdot y_\beta$ が y_α と $\varepsilon_p(\pi^{LL}(W_p(V)))$ を用いて記述できることである.

$$w \cdot y_\beta \iff \lceil \varepsilon_p(\pi^{LL}(W_p(V))) + y_\alpha \rceil$$

これと $\text{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ の局所 Langlands 対応により得られる等式 $\varepsilon_p(\pi^{LL}(W_p(V))) = \varepsilon_p(W_p(V))$ から, 結局

$$w \cdot y_\beta \iff \lceil \varepsilon_p(W_p(V)) + y_\alpha \rceil$$

を得ることができる. 以上を総合することで

$$\begin{aligned} \varepsilon_p(V) &\iff \beta(w \cdot x) \iff [w \cdot x, y_\beta] \iff [x, w \cdot y_\beta] \\ &\iff \varepsilon_p(W_p(V)) + [x, y_\alpha] \iff \varepsilon_p(W_p(V)) + \alpha(x) \iff \varepsilon_p^{\text{geom}}(V) \end{aligned}$$

と $\varepsilon_p(V)$ と $\varepsilon_p^{\text{geom}}(V)$ の比較ができるようになる. ここでは古典的局所 Langlands 対応との整合性を用いて等式 $\varepsilon_p(V) = \varepsilon_p^{\text{geom}}(V)$ を示したが, 実は等式 $\varepsilon_p(V) = \varepsilon_p^{\text{geom}}(V)$ (正確には V の様々な捻りに対するこの等式も必要) から出発して, 上の議論を逆にたどることで, $\Pi(V)^{\text{alg}}$ への w 作用の具体的な記述がわかり, 結果として $\Pi(V)^{\text{alg}}$ に現れる smooth 表現が $\pi^{LL}(W_p(V))$ であることを示すことができる. この意味で, 等式 $\varepsilon_p(V) = \varepsilon_p^{\text{geom}}(V)$ は古典的局所 Langlands 対応の整合性と同値である!

$$\left[\varepsilon_p(V) = \varepsilon_p^{\text{geom}}(V) \right] \iff \left[\text{「古典的局所 Langlands 対応との整合性」} \right]$$

5. 今後の展望

主結果 1 は

「 $\text{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ の p 進局所 Langlands 対応」= 「 $G_{\mathbb{Q}_p}$ の 2 次元表現の族に関する局所イプシロン予想」

ともいえる結果であった. ここで右辺の予想の大域体版は $G_{\mathbb{Q}}$ の 2 次元表現の族に関する一般化岩澤主予想となるが, 左辺の大域体類似の一つの候補と考えられてるのが Emerton により研究され始めたモジュラー曲線の完備コホモロジーの理論 ([Em11]) である. 最近の研究 ([CEGGPS16a], [CEGGPS16b], [GN17] など) で, 完備コホモロジーの p 進局所 Langlands 対応と関連した数論的な性質の解明が進みつつあるが, これらの研究とも関連させながら

「モジュラー曲線の完備コホモロジー」= 「 $G_{\mathbb{Q}}$ の 2 次元表現の族に関する一般化岩澤主予想」

という方向性の研究を行っていきたい.

参考文献

- [BB08] D. Benois, L. Berger, Théorie d'Iwasawa des représentations cristallines. II, Comment. Math. Helv. 83 (2008), no. 3, 603-677.
- [BBr10] L. Berger, C. Breuil, Sur quelques représentations potentiellement cristallines de $\text{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, Astérisque 330, 2010, 155-211.
- [Be02] L. Berger, Représentations p -adiques et équations différentielles, Invent. Math. 148 (2002), 219-284.
- [BK90] S. Bloch, K. Kato, L -functions and Tamagawa numbers of motives. The Grothendieck Festschrift, Vol. I, 333-400, Progr. Math. 86, Birkhäuser Boston, Boston, MA 1990.
- [Br03a] C. Breuil, Sur quelques représentations modulaires et p -adiques de $\text{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$. I, Compositio Math. 138 (2003), 165-188.
- [Br03b] C. Breuil, Sur quelques représentations modulaires et p -adiques de $\text{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$. II, J. Inst. Math. Jussieu 2 (2003), 1-36.
- [Br04] C. Breuil, Invariant L et série spéciale p -adique, Ann. Scient. de l' E.N.S. 37 (2004), 559-610.
- [CEGGPS16a] A. Caraiani, M. Emerton, T. Gee, D. Geraghty, V. Paskunas, S. Shin, Patching and the p -adic local Langlands correspondence, Cambridge Journal of Mathematics 4 (2016), no. 2, 197-287.
- [CEGGPS16b] A. Caraiani, M. Emerton, T. Gee, D. Geraghty, V. Paskunas, S. Shin, Patching and the p -adic Langlands program for $\text{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, preprint.
- [Co10] P. Colmez, Représentations de $\text{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ et (φ, Γ) -modules, Astérisque 330 (2010), 281-509.

- [CDP14] P. Colmez, G. Dospinescu, V. Paskunas, The p -adic local Langlands correspondence for $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$, *Cambridge Journal of Mathematics*, Volume 2, Number 1 (2014), 1-47.
- [De73] P. Deligne, Les constantes des équations fonctionnelles des fonctions L , *Modular functions of one variable, II* (Proc. Internat. Summer School, Univ. Antwerp, Antwerp, 1972), pp. 501-597. *Lecture Notes in Math.*, Vol. 349, Springer, Berlin, 1973.
- [Em11] M. Emerton, Local-global compatibility in the p -adic Langlands programme for $\mathrm{GL}/\mathbb{Q}$, preprint, available at <http://www.math.uchicago.edu/emerton/preprints.html>.
- [Fo82] J.-M. Fontaine, Sur certains types de représentations p -adiques du groupe de Galois d'un corps local; construction d'un anneau de Barsotti-Tate, *Ann. of Math. (2)* 115 (1982), 529-577.
- [Fo91] J.-M. Fontaine, Représentations p -adiques des corps locaux, *The Grothendieck Festschrift*, vol 2, *Prog. in Math.* 87, Birkhäuser (1991), 249-309.
- [Fo94] J.-M. Fontaine, Le corps des périodes p -adiques, *Astérisque* 223 (1994), 59-111.
- [FK06] T. Fukaya, K. Kato, A formulation of conjectures on p -adic zeta functions in non commutative Iwasawa theory, *Proceedings of the St. Petersburg Mathematical Society. Vol. XII* (Providence, RI), *Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2*, vol. 219, Amer. Math. Soc., 2006, pp. 1-85.
- [FK12] T. Fukaya, K. Kato, On conjectures of Sharifi, preprint,
- [GN17] T. Gee, J. Newton, Patching and the completed homology of locally symmetric spaces, preprint.
- [Ka93a] K. Kato, Lectures on the approach to Iwasawa theory for Hasse-Weil L -functions via B_{dR} . *Arithmetic algebraic geometry*, *Lecture Notes in Mathematics* 1553, Springer-Verlag, Berlin, 1993, 50-63.
- [Ka93b] K. Kato, Lectures on the approach to Iwasawa theory for Hasse-Weil L -functions via B_{dR} . Part II. Local main conjecture, unpublished preprint.
- [Ka04] K. Kato, p -adic Hodge theory and values of zeta functions of modular forms, *Astérisque* (2004), no. 295, ix, 117-290, *Cohomologies p -adiques et applications arithmétiques. III*.
- [Ki09] M. Kisin, The Fontaine-Mazur conjecture for GL_2 , *J. Amer. Math. Soc.* 22 (2009), no. 3, 641-690.
- [Ki10] M. Kisin, Deformations of $G_{\mathbb{Q}_p}$ and $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Q}_p)$ -representations, *Astérisque* 330 (2010), 511-528.
- [LVZ15] D. Loeffler, O. Venjakob, S. L. Zerbes, Local ε -isomorphism, *Kyoto J. Math.* 55 (2015), no.1, 63-127.
- [Na17a] K. Nakamura, A generalization of Kato's local ε -conjecture for (φ, Γ) -modules over the Robba ring, *Algebra and Number Theory* 11-2 (2017), 319-404.
- [Na17b] K. Nakamura, Local epsilon isomorphisms for rank two p -adic representations of $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}_p}/\mathbb{Q}_p)$ and a functional equation of Kato's Euler system, to appear in *Cambridge Journal of Mathematics*.
- [Oc06] T. Ochiai, On the two-variable Iwasawa Main conjecture for Hida deformations, *Compositio Mathematica*, vol 142, 1157-1200 2006.
- [Pa13] V. Paskunas, The image of Colmez's Montreal functor, *Publications Mathématiques de l'IHÉS* 118, Issue 1 (2013), 1-191.
- [Pe95] B. Perrin-Riou, Fonctions L p -adiques des représentations p -adiques. *Astérisque* No. 229 (1995), 198 pp.
- [Ya09] S. Yasuda, Local constants in torsion rings, *J. Math. Sci. Univ. Tokyo* 16 (2009), no. 2, 125-197.