

アフィン W 代数をめぐって

表現論とヒッグス枝予想

荒川 知幸 (京大数理研)*

1. アフィン W 代数とは

W 代数はアフィンカツ・ムーディーリー環やヴィラソロ代数などの無限次元リー環のある種の一般化である. 或いは, スロードリーの横断片の量子化である有限 W 代数 ([Pre]) のアフィン化とも見なすことができる¹. 有限 W 代数と区別するために W 代数のことをアフィン W 代数と呼ぶこともある. W 代数は80年代に物理学における二次元の共型場理論の研究の中で登場したが, 可積分系やモジュラー表現論, 幾何学的ラングランズ対応, 4次元のゲージ理論などとも密接に対応する ([DSKV, Fre, AFO, AGT, SV, BFN] など).

歴史上, 最初に登場した W 代数はザモロジコフの W_3 代数である ([Zam])². W_3 代数は, 次の生成元と関係式によって定義される.

生成元: L_n ($n \in \mathbb{Z}$), W_n ($n \in \mathbb{Z}$), $\mathbf{c}$.

関係式:

$\mathbf{c}$ は中心元

$$[L_m, L_n] = (m - n)L_{m+n} + \frac{m^3 - m}{12}\delta_{m+n,0}\mathbf{c},$$

$$[L_m, W_n] = (2m - n)W_{m+n},$$

$$\begin{aligned} [W_m, W_n] = & (m - n) \left(\frac{1}{15}(m + n + 3)(m + n + 2) - \frac{1}{6}(m + 2)(n + 2) \right) L_{m+n} \\ & + \frac{16}{22 + 5\mathbf{c}}(m - n)\Lambda_{m+n} + \frac{1}{360}m(m^2 - 1)(m^2 - 4)\delta_{m+n,0}\mathbf{c}. \end{aligned}$$

ここで,

$$\Lambda_n = \sum_{k \geq 0} L_{n-k}L_k + \sum_{k < 0} L_kL_{n-k} - \frac{3}{10}(n + 2)(n + 3)L_n.$$

この例から分かるように W 代数は一般にはリー環ではなく, 頂点代数として定義される.

他の頂点代数と同様に, W_3 代数のベクトル空間 M 上の表現は $L_n m = W_n m = 0$ ($n \gg 0, \forall m \in M$) という条件を課すことで意味を成す. W_3 代数の最高ウェイト表現とは, $L_n v = W_n v = 0$ ($n > 0$), $L_0 v = a_1 v$, $W_0 v = a_2 v$, $\mathbf{c} v = c v$ ($(a_1, a_2, c) \in \mathbb{C}^3$) を満

本研究は科研費(課題番号:17H01086, 17K18724)の助成を受けたものである.

2010 Mathematics Subject Classification: 17B67, 17B69, 81R10

キーワード: W 代数, 頂点代数, アフィンカツ・ムーディーリー環

* 〒606-8502 京都市左京区北白川追分町 京都大学 数理解析研究所

e-mail: arakawa@kurims.kyoto-u.ac.jp

web: <http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~arakawa/>

¹有限 W 代数の歴史はコスタント [Kos] に遡る.

² W_3 代数については教科書 [BMP] がある.

たすベクトル v で生成される表現を言う. このような表現 M に対しては, その (正規化された) 指標

$$\text{ch}(M) = \text{tr}_M(q^{L_0 - \frac{c}{24}})$$

が意味を持つ.

基本問題.

- (i). 既約な最高ウェイト表現を分類し, その指標を決定せよ.
- (ii). 既約な最高ウェイト表現の中に, アフィンカツツ・ムーディ代数の可積分表現のような「良い」表現が存在するかどうか調べよ.

これらは, W_3 代数だけではなく, 一般の W 代数を含む全ての頂点代数に対する基本問題でもある.

2. 量子ドリinfeld・ソコロフ還元法

一般に, W 代数は単純リー環 $\mathfrak{g}$ とその冪零元 f に対して定義され, これを $\mathscr{W}^k(\mathfrak{g}, f)$ と書く³. $\mathscr{W}^k(\mathfrak{g}, f)$ はレベルと呼ばれるパラメータ $k \in \mathbb{C}$ を持つ頂点代数である. $\mathscr{W}^k(\mathfrak{g}, f)$ は量子ドリinfeldソコロフ還元法と呼ばれるハミルトニアン還元法の一つ⁴によって定義される ([FF, KRW]):

$$\mathscr{W}^k(\mathfrak{g}, f) := H_{DS,f}^0(V^k(\mathfrak{g})).$$

ここで, $H_{DS,f}^0(?)$ はペア $(\mathfrak{g}, f)$ に付随する量子ドリinfeldソコロフ還元法の BRST コホモロジー関手であり, $V^k(\mathfrak{g})$ はレベル k のアフィン頂点代数 (下記参照).

例 ($f = 0$)

$\mathscr{W}^k(\mathfrak{g}, 0) = V^k(\mathfrak{g}) := U(\widehat{\mathfrak{g}}) \otimes_{U(\mathfrak{g}[t] + \mathbb{C}K)} \mathbb{C}_k$. ここで, $\mathbb{C}_k$ は $\mathfrak{g}[t]$ が自明で作用し K が定数 k で作用する $\mathfrak{g}[t] + \mathbb{C}K$ の一次元表現. $V^k(\mathfrak{g})$ は自然に頂点代数の構造を持ち, $\mathfrak{g}$ に付随するレベル k の普遍アフィン頂点代数と呼ばれる. $V^k(\mathfrak{g})$ の表現とはアフィンカツツ・ムーディ代数 $\widehat{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g}[t, t^{-1}] \oplus \mathbb{C}K$ のレベル k の滑らかな表現に他ならない⁵. この意味で, W 代数はアフィンカツツ・ムーディ代数を含む.

例 ($\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$)

$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$ はただ一つの非自明な冪零軌道 $\mathbb{O}_{\text{prin}}$ を持つ. $f = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{O}_{\text{prin}}$ かつ $k \neq -2$ のとき, $\mathscr{W}^k(\mathfrak{sl}_2, f)$ は中心電荷 $c = 1 - 6(k+1)^2/(k+2)$ のヴィラゾロ頂点代数 Vir_c に一致する. Vir_c の表現は中心電荷 c のヴィラゾロ代数の滑らかな表現と等価であり, この意味で W 代数はヴィラゾロ代数を含む.

³ f と f' が同じ共役類に属せば $\mathscr{W}^k(\mathfrak{g}, f)$ と $\mathscr{W}^k(\mathfrak{g}, f')$ は同型である.

⁴ コスタント・ステインバーグ [KS] により, ハミルトニアン還元法は BRST コホモロジーを用いて代数的に行うことができる. 量子ドリinfeldソコロフ還元法は, その自然なアフィン版 (カイラリゼーション) である. 詳しくは [FBZ, A8] を参照のこと.

⁵ K が定数倍 k で作用するとき, レベル k の表現と言う. また, $\widehat{\mathfrak{g}}$ の滑らかな表現 M とは任意の $m \in M$, $x \in \mathfrak{g}$ に対して N が存在し, $(xt^n)m = 0$ ($n \geq N$) を満たすことを言う.)

例 ($\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_3$)

$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_3$ には二つの非自明な冪零軌道 $\mathbb{O}_{prin}$ と $\mathbb{O}_{subreg}$ が存在する.

$f = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{O}_{prin}$ かつ $k \neq -3$ のとき, $\mathscr{W}^k(\mathfrak{sl}_3, f)$ は中心電荷 $c = 2 - 24(k + 2)^2/(k + 3)$ の W_3 代数に一致する.

$f = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{O}_{subreg}$ かつ $k \neq -3$ のとき, $\mathscr{W}^k(\mathfrak{sl}_3, f)$ は中心電荷 $c = -(2k + 3)(3k + 1)/(k + 3)$ のバーシャドスキー・ポリャコフ代数 [Pol] に一致する ([KRW]).

例 ($\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n$)

$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_n$ の主冪零軌道⁶を $\mathbb{O}_{prin}$ とする. $f \in \mathbb{O}_{prin}$ のとき, $\mathscr{W}^k(\mathfrak{sl}_n, f)$ は $n - 1$ の場 (field) で生成され, ファティーフ・ルキャノフ [FL] の導入した W_n 代数に一致する.

例 ($f = f_{min}$)

W 代数の定義は $\mathfrak{g}$ がスーパーリー環のときに自然に拡張されるが, 全ての「重要な」スーパーコンフォーマル代数数はあるスーパーリー環の $\mathfrak{g}$ とその極小冪零元⁷ f_{min} に付随した W 代数 $\mathscr{W}^k(\mathfrak{g}, f_{min})$ という形で実現される ([KRW]).

G を $\mathfrak{g}$ をリー環として持つ連結単純代数群とする. 一般に W 代数 $\mathscr{W}^k(\mathfrak{g}, f)$ の構造は軌道 $G.f$ の次元が高いほど複雑になる. $\mathscr{W}^k(\mathfrak{g}, f)$ の生成元と関係式による記述は一般には知られていない⁸. 従ってその表現論を「直接」取り扱うことは困難である.

一方, W 代数の定義から, 次の関手が存在することがわかる.

$$\begin{aligned} V^k(\mathfrak{g})\text{-Mod} &\rightarrow \mathscr{W}^k(\mathfrak{g}, f)\text{-Mod} \\ M &\mapsto H_{DS,f}^0(M). \end{aligned}$$

$\mathcal{O}_k$ を $\widehat{\mathfrak{g}}$ のレベル k の圏 $\mathcal{O}$ (最高ウエイト表現の圏) とすると, $\mathcal{O}_k$ は自然に $V^k(\mathfrak{g})\text{-Mod}$ の充満部分圏になる. $L(\lambda)$ を最高ウエイト λ の $\widehat{\mathfrak{g}}$ の既約最高ウエイト表現とする. 柏原・谷崎 [KT] により, $L(\lambda)$ の指標はカズダン・ルスティック多項式によって表されることが知られている⁹.

定理 1 (荒川 [A1]). f を極小冪零元とする.

(i). 任意の $M \in \mathcal{O}_k$ について $H_{DS,f}^{i \neq 0}(M) = 0$. 従って,

$$\mathcal{O}_k \rightarrow \mathscr{W}^k(\mathfrak{g}, f_{\theta})\text{-Mod}, \quad M \mapsto H_{DS,f_{\theta}}^0(M)$$

は完全関手.

(ii). 任意の λ について, $H_{DS,f_{\theta}}^0(L(\lambda))$ は零または既約 $\mathscr{W}^k(\mathfrak{g}, f_{\theta})$ 加群. さらに, 全ての既約最高ウエイト $\mathscr{W}^k(\mathfrak{g}, f_{\theta})$ 加群はこのようにして現れる.

⁶ 最も次元の高い冪零軌道を主冪零軌道, 主冪零軌道に属する元を主冪零元という.

⁷ 非自明かつその次元が最も小さい冪零軌道を極小冪零軌道, 極小冪零軌道に属する元を極小冪零元という.

⁸ 物理学者は遮蔽作用素による記述を用いることが多い. そのような記述は f が主冪零元のときは良く知られていたが, 一般の $\mathscr{W}^k(\mathfrak{g}, f)$ に対しては最近元良によって与えられた. ([Gen]).

⁹ ただし, k が臨界レベルの時は除く ([AF1, AF2, FG] 参照).

上の定理とオイラー・ポアンカレの原理より, $\text{ch } H_{DS, f_\theta}^0(L(\lambda))$ は $\text{ch } L(\lambda)$ を用いて現れされる. 従って, f が極小幂零元のときは臨界レベル以外全ての既約最高ウェイト $\mathscr{W}^k(\mathfrak{g}, f)$ 加群の指標が上の定理によって決定される.

注意 2. 定理 1 において, $\mathfrak{g}$ をスーパーリー環としても成立する¹⁰.

定理 3.

- (i). (荒川 [A2]) 定理 1 と同様の¹¹ 結果が f が主幂零元 f_{prin} の時にも成立する. 特に, 全ての $\mathscr{W}^k(\mathfrak{g}, f_{prin})$ の最高ウェイト表現の指標がカズダン・ルスティック多項式を用いて表される.
- (ii). (荒川 [A3]) 定理 1 と同様の¹² 結果が $\mathfrak{g}$ が A 型の場合, 全ての幂零元 f に対して成立する.

以上の結果から, 基本問題の (1) については少なくとも f が極小幂零元か主幂零元, あるいは $\mathfrak{g}$ が A 型の場合は解決されたと言える¹³.

3. 有理性と平滑性

頂点 (作用素) 代数について, 次の事実が知られている.

定理 4 ([Zhu]). 頂点 (作用素) 代数 V が「良い」ものであれば, 任意の有限生成 V 加群 M に対して $\text{ch } M$ が上半平面上の正則関数に収束し ($q = e^{2\pi\sqrt{-1}\tau}$), $\{\text{ch } M \mid M : \text{有限生成 } V \text{ 加群}\}$ は $SL_2(\mathbb{Z})$ 不変な有限次元ベクトル空間をなす.

ここで, 頂点 (作用素) 代数が「良い」とは, 次の二つの条件を満たすことを言う.

- V は平滑 (あるいは C_2 有限) である. すなわち¹⁴, $\dim \text{Spec}(\text{gr } V) = 0$.
- V は有理的である. すなわち, 任意の有限生成 V 加群は完全可約である.

定義から, 平滑な頂点代数は有限次元代数の自然な一般化とみなすことができる.

例

普遍アフィン頂点代数 $V^k(\mathfrak{g})$ は平滑ではない. 実際, PBW の定理により, $V^k(\mathfrak{g}) \cong U(\mathfrak{g}[t^{-1}]t^{-1})$. $V^k(\mathfrak{g})$ のフィルトレーションは $U(\mathfrak{g}[t^{-1}]t^{-1})$ の PBW フィルトレーションに一致し,

$$\text{gr } V_k(\mathfrak{g}) = S(\mathfrak{g}[t^{-1}]t^{-1}) = \mathbb{C}[J_\infty \mathfrak{g}^*].$$

従って $\text{Spec}(V_k(\mathfrak{g})) = J_\infty \mathfrak{g}^*$ であり, $\dim \text{Spec}(V_k(\mathfrak{g})) = \infty$. ここで, $J_\infty X$ は X のアーク空間であり, 次で定義される.

$$\text{Hom}(\text{Spec } R, J_\infty X) = \text{Hom}(\text{Spec } R[[t]], X).$$

$L_k(\mathfrak{g})$ を $V^k(\mathfrak{g})$ の $\widehat{\mathfrak{g}}$ 加群としての唯一の既約商とすると, $L_k(\mathfrak{g})$ には商頂点代数の構造が入る.

¹⁰ 但し, W 代数が定義できるために $\mathfrak{g}$ を基本古典型とする必要がある.

¹¹ 関手を少し修正する必要がある.

¹² やはり関手を少し修正する必要がある.

¹³ 最近, サム・ラスキン [Rask] により定理 3 (i) の別証明が与えられた.

¹⁴ 任意の頂点代数は自然なフィルター付けを持ち, 随伴次数空間 $\text{gr } V$ は可換な代数になる (正確にはポアソン頂点代数).

事実 1. $L_k(\mathfrak{g})$ が平滑であることと $\widehat{\mathfrak{g}}$ の表現として可積分であることは同値 ($\iff k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$). さらにこの場合,

$$L_k(\mathfrak{g})\text{-Mod} = \{ \text{レベル } k \text{ の } \widehat{\mathfrak{g}} \text{ の } (\mathcal{O} \text{ に属する}) \text{ 可積分表現} \}$$

が成立し, 従って $L_k(\mathfrak{g})$ は有理的.

我々にとって基本問題 (ii) は, 有理的かつ平滑な W 代数の存在問題に他ならない.

注意 5.

- (i). 定理 4 よりもっと強く, 有理的かつ平滑な頂点作用素代数の指標はベクトル値モジュラー関数を成し, 合同部分群のレベルは既約表現のウェイトで記述されることが知られている ([DLN]).
- (ii). 有理的かつ平滑な頂点作用素代数の表現の圏はモジュラーテンソル圏をなす事が知られている ([Hua]).
- (iii). 宮本 ([Miy]) により, 定理 4 のある種の一般化が有理性条件を満たさない平滑な頂点作用素代数に対しても成立することが知られている.

4. 平滑性と随伴多様体

頂点代数 V に対し,

$$R_V = V/C_2(V), \quad C_2(V) = \{a_{(-2)}b \mid a, b \in V\}$$

とおく. R_V には自然にポアソン代数の構造が入り, ズーの C_2 代数と呼ばれる. V の随伴多様体とは

$$X_V := \text{Spec}(R_V)$$

で定義されるポアソン多様体である ([A4]). このとき, $\text{Specm}(\text{gr } V) \subset J_\infty X_V$ であることが分かり ([Li]), さらに次が成立する.

補題 6 (荒川 [A4]). V が平滑であることと $\dim X_V = 0$ であることは同値¹⁵.

例

- (i). $X_{V^k(\mathfrak{g})} = \mathfrak{g}^*$ である. 従って, $V^k(\mathfrak{g})$ の商である単純アフィン頂点代数 $L_k(\mathfrak{g})$ の随伴多様体 $X_{L_k(\mathfrak{g})}$ は $X_{V^k(\mathfrak{g})} = \mathfrak{g}^*$ の G 変な錘になる.
- (ii). $\{e, f, h\}$ を $\mathfrak{g}$ の $\mathfrak{sl}_2$ トリプルとし,

$$\mathcal{S}_f := f + \mathfrak{g}^e \subset \mathfrak{g} = \mathfrak{g}^*, \quad \mathfrak{g}^e = \{x \in \mathfrak{g} \mid [e, x] = 0\}$$

とおく. $\mathcal{S}_f$ はスロードリーの横断片と呼ばれ, ポアソン構造を持つことが知られている ([松, GG]) が, 次が成立する ([DSK]).

$$X_{\mathscr{W}^k(\mathfrak{g}, f)} \cong \mathcal{S}_f.$$

さらに

$$\text{Spec}(\text{gr } \mathscr{W}^k(\mathfrak{g}, f)) \cong J_\infty \mathcal{S}_f$$

も成立し ([A5]), 従って W 代数 $\mathscr{W}^k(\mathfrak{g}, f)$ はスロードリーの横断片のアーキ空間 $J_\infty \mathcal{S}_f$ の量子化と見なすこともできる.

¹⁵ 正確には V が強有限生成であること, つまり R_V が有限生成であることが必要である.

$\mathcal{W}_k(\mathfrak{g}, f)$ を $\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f)$ の唯一の単純商頂点代数とする. スロードリーの横断片 $\mathcal{S}_f$ には f に可縮な $\mathbb{C}^*$ 作用が存在するが, 単純 W 代数 $\mathcal{W}_k(\mathfrak{g}, f)$ の随伴多様体 $X_{\mathcal{W}_k(\mathfrak{g}, f)}$ は $X_{\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f)} = \mathcal{S}_f$ の $\mathbb{C}^*$ 不変な部分代数多様体である. 従って, $\mathcal{W}_k(\mathfrak{g}, f)$ が平滑であることと, $X_{\mathcal{W}_k(\mathfrak{g}, f)} = \{f\}$ であることは同値である.

定理 7 (荒川 [A5]). 任意の f, k に対して以下が成立する.

- (i). 全射 $V^k(\mathfrak{g}) \twoheadrightarrow L_k(\mathfrak{g})$ は全射 $\mathcal{W}^k(\mathfrak{g}, f) = H_{DS, f}^0(V^k(\mathfrak{g})) \twoheadrightarrow H_{DS, f}^0(L_k(\mathfrak{g}))$ を誘導する.
- (ii). $X_{H_{DS, f}^0(L_k(\mathfrak{g}))} \cong X_{L_k(\mathfrak{g})} \cap \mathcal{S}_f$.

従って, 特に以下が成立する.

- (i). $H_{DS, f}^0(L_k(\mathfrak{g}))$ が零でないことと $X_{L_k(\mathfrak{g})}$ が軌道 $\overline{G \cdot f}$ を含むことは同値,
- (ii). $X_{L_k(\mathfrak{g})} = \overline{G \cdot f}$ であるならば $X_{H_{DS, f}^0(L_k(\mathfrak{g}))} = \{f\}$. 従って $H_{DS, f}^0(L_k(\mathfrak{g}))$ は平滑であり, その商である $\mathcal{W}_k(\mathfrak{g}, f)$ もまた平滑である.

$L_k(\mathfrak{g})$ が可積分であることと $X_{L_k(\mathfrak{g})} = 0$ は同値であったので, このときは上の定理から $H_{DS, f}^0(L_k(\mathfrak{g})) = 0$ となってしまうことに注意する.

一方, アフィンリー環には完全可約性や指標のモジュラー不変性といった可積分表現と同様な性質を持つ, 可積分表現よりずっと広い許容表現と呼ばれる表現のクラスが存在する ([KW1]).

定理 8. $L_k(\mathfrak{g})$ を許容表現とすると, 次が成立する.

- (i). (荒川 [A7], アドモビッチ・ミラス予想 [AdMi]) 頂点代数 $L_k(\mathfrak{g})$ は圏 $\mathcal{O}$ の中では有理的である. すなわち, 圏 $\mathcal{O}$ に属する任意の $L_k(\mathfrak{g})$ 加群は既約な許容表現の直和である.
- (ii). (荒川 [A5])
 - (a) (フェイギン・フレンケル予想¹⁶) $L_k(\mathfrak{g})$ の随伴多様体 $X_{L_k(\mathfrak{g})}$ は $\mathfrak{g}$ の冪零錘 $\mathcal{N} = \{x \in \mathfrak{g} \mid (\text{ad } x)^r = 0 \ (r \gg 0)\}$ に含まれる.
 - (b) さらに, $X_{L_k(\mathfrak{g})}$ は既約である. つまり, $\mathfrak{g}$ の冪零軌道 $\mathbb{O}_k$ が存在し¹⁷, $X_{L_k(\mathfrak{g})} = \overline{\mathbb{O}_k}$.

注意 9. $L_k(\mathfrak{g})$ は可積分な時は WZW 模型と呼ばれる共型場理論に対応していた ([TUY]) が, 許容表現の場合はログ共型場理論¹⁸ と呼ばれるエグゾティックな共型場理論に対応している ([CR1, CR2]).

系 10 (荒川 [A5], カッツ・脇本予想¹⁹ [KW2]). $L_k(\mathfrak{g})$ を許容表現とし, $f \in \mathbb{O}_k$ とすると, $\mathcal{W}_k(\mathfrak{g}, f)$ は平滑である.

注意 11. 全ての平滑な W 代数は系 10 のように現れると予想されていたが, 最近川節 [Kaw] によって反例が与えられた.

¹⁶ 条件 $X_{L_k(\mathfrak{g})} \subset \mathcal{N}$ の重要性は次の点にある. この条件から, $L_k(\mathfrak{g})$ に対応するコンフォーマルブロックに関して, その台が大域冪零錘に含まれることがわかり, 従って $Bun_G(\Sigma)$ 上 (Σ は曲線) の D 加群としてホロノミックであることが従う.

¹⁷ [A5] には軌道 $\mathbb{O}_k$ の具体的記述も与えられている.

¹⁸ 平滑性条件を課さないログ共形場理論.

¹⁹ 本来のカッツ・脇本の原論文 [KW2] では条件は組合せ論的に記述されている.

5. 極小系列 W 代数

許容アフィン頂点代数 $L_k(\mathfrak{g})$ は

$$X_{L_k(\mathfrak{g})} = \mathcal{N} = \overline{G \cdot f_{prin}}$$

となるとき、非退化であると呼ばれる²⁰(f_{prin} は主冪零元). このとき、系 10 より、単純 W 代数 $\mathcal{W}_k(\mathfrak{g}, f_{prin})$ は平滑である.

次はフレンケル・カッツ・脇本 [FKW] によって予想され、以来物理学者には定理として扱われてきた結果である.

定理 12 (荒川 [A6]). $L_k(\mathfrak{g})$ を非退化な許容アフィン頂点代数とする. このとき、 $\mathcal{W}_k(\mathfrak{g}, f_{prin})$ は有理的である.

$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$ のとき、これらの有理的 W 代数は [BPZ] に登場した極小系列ヴィラゾロ頂点代数に他ならない. このため、定理 1 の W 代数は極小系列 (主) W 代数と呼ばれる.

次も数学的には未解決であったが物理学者には定理として扱われてきた結果である (ヴィラゾロ代数の GKO 構成法 ([GKO]) の一般化).

定理 13 (荒川・クルーチッグ・リンショール [ACL2]). $\mathfrak{g}$ を ADE 型、 $L_k(\mathfrak{g})$ を許容表現とした時、コセット頂点代数

$$(L_k(\mathfrak{g}) \otimes L_1(\mathfrak{g}))^{\mathfrak{g}[t]}$$

は極小系列 (主) W 代数に同型である. 逆に ADE 型の極小系列 (主) W 代数は全てこのようにして現れる.

W 代数とコセット頂点代数の関係については他にも様々な問題がある ([ACL1, ALY] など).

6. シューア指数とヒッグス枝予想

最近のホットな話題として、頂点代数と高次元の場の理論との関係が挙げられる.

四次元の $N = 2$ 対称性を持つスーパーコンフォーマルな場の理論 $\mathcal{T}$ はいくつかの重要な不変量 (オブザーバブル) を持つが、その一つにシューア指数 $\mathcal{I}_{\mathcal{T}}(q)$ と呼ばれるものがある. ラステリ等 [BLL⁺] は

$$\mathrm{ch} \Phi(\mathcal{T}) = \mathcal{I}_{\mathcal{T}}(q)$$

を満たす「関手」

$$\Phi : \{4d \ N = 2 \text{ SCFTs} \} \rightarrow \{ \text{頂点代数} \} \quad (1)$$

を構成した.

この対応によって現れる頂点代数は非常に興味深い、エキゾチックでもある. 例えばこれらの頂点代数は決してユニタリーにならず、従ってアフィンリー環の可積分表現などは現れない. また必ずしも有理的ではなく、平滑とも限らない.

²⁰ 「殆どの」許容アフィン頂点代数は非退化である.

さて、四次元の $N = 2$ 超対称性を持つスーパーコンフォーマルな場の理論 $\mathcal{T}$ には別のヒッグス枝と呼ばれる不変量 $\text{Higgs}(\mathcal{T})$ がある。ヒッグス枝は $\mathcal{T}$ のカイラル環のスペクトルとして定義されるハイパーケーラーな代数多様体である²¹。

ヒッグス枝と頂点代数の関係について、次の「物理的」予想が存在する。

予想 14 (ビーム・ラストリ [Rast, BR]).

$$\text{Higgs}(\mathcal{T}) = X_{\Phi(\mathcal{T})}.$$

上の予想により、(1) の対応によって得られる頂点代数の随伴多様体はハイパーケーラーであり、特にシンプレクティックであることが期待される。一方、頂点代数の随伴多様体は一般にはシンプレクティックではなく単にポアソン多様体である。

随伴多様体がハイパーケーラーである頂点代数の例

(i). 許容アフィン頂点代数 $L_k(\mathfrak{g})$: $X_{L_k(\mathfrak{g})} = \overline{\mathbb{O}}$,

許容アフィン頂点代数の全てではないが³、一部は四次元の超対称性 SCFT から現れる ([XY] など)。

(ii). (荒川・モロー [AMor]) $\mathfrak{g}$ はデリーヌ例外系列

$$A_1 \subset A_2 \subset G_2 \subset D_4 \subset F_4 \subset E_6 \subset E_7 \subset E_8$$

([Del]) に属する単純リー環, $k = -h^\vee/6 - 1$ ($h^\vee$ は $\mathfrak{g}$ の双対コクスター数):

$$X_{L_k(\mathfrak{g})} = \overline{\mathbb{O}_{\min}}.$$

A_1, A_2, G_2, F_4 型の場合は $L_k(\mathfrak{g})$ は許容表現であり、上の主張は (i) に含まれるが、 D_4, E_6, E_7, E_8 型の場合は許容表現ではなく、新しい例を与える。これらは、小平の分類によって対応する楕円ファイブレーションから F 理論を介して作られる四次元の SCFT から得られる頂点代数であり、[BLL⁺] で扱われた四次元の超対称性 SCFT から得られる頂点代数の主要例でもある。

(iii). $L_k(\mathfrak{g})$ を上に現れるアフィン頂点代数とし、 $f \in X_{L_k(\mathfrak{g})} = \overline{\mathbb{O}}$ としたときの W 代数 $H_{DS,f}^0(L_k(\mathfrak{g}))$:

$$X_{H_{DS,f}^0(L_k(\mathfrak{g}))} = \overline{\mathbb{O}} \cap \mathcal{S}_f \quad (\text{冪零スロードリー横断片}).$$

これらの全てではないが³、一部は四次元の超対称性 SCFT から現れる ([SXY, BR] など)。

さて、ポアソン代数多様体は滑らかな解析的ポアソン多様体によるストラティフィケーションを持ち、従って各点を通るシンプレクティック葉が意味を持つ。頂点代数は、その随伴多様体が有限個のシンプレクティック葉を持つとき、擬平滑であるという ([AK]).

²¹ $4d$ - $3d$ 双対性というものがあるが、例えば A 型のクラス $\mathcal{S}$ 理論と呼ばれる四次元の超対称性 SCFT のヒッグス枝は、最近ブレーバマン・フィンケルバーク・中島によって数学的な定義が与えられた (星形の籠に付随する) 3 次元のゲージ理論のクローン枝と一致する。

定理 15 (荒川・川節 [AK]). V を擬平滑な頂点 (作用素) 代数とすると, その指標 $\text{ch } V$ はモジュラー線形微分方程式を満たす.

モジュラー線形微分方程式の解のなすベクトル空間は $SL_2(\mathbb{Z})$ の作用で不変であり, 従って定理 15 は擬平滑な頂点 (作用素) 代数の指標がある種のモジュラー不変性を持つことを意味する.

例えば上で現れた, 楕円ファイブレーションから作られる頂点代数の指標は非自明なカズダン・ルスティック多項式で表されるため, このようなモジュラー不変性の存在は全く明らかではない²².

一方, 予想 14 と物理的考察から, 四次元の SCFT から来る頂点代数は擬平滑であると期待される. このことから, 四次元の SCFT のシュア指数がモジュラー不変性を持つことが分かるが, この結果は物理的にも新しいものである ([BR] 参照).

この他にも, 四次元の超対称性 SCFT と頂点代数の対応にはまだまだ興味深い内容がある ([Tac] など) が, 時間の関係でこれらについては別の機会があればお話したい.

参考文献

- [AFO] Mina Aganagic, Edward Frenkel and Andrei Okounkov. Quantum q-Langlands Correspondence. arXiv:1701.03146 [hep-th].
- [AdMi] Dražen Adamović and Antun Milas. Vertex operator algebras associated to modular invariant representations for $A_1^{(1)}$. *Math. Res. Lett.*, 2(5):563–575, 1995.
- [AGT] Luis F. Alday, Davide Gaiotto, and Yuji Tachikawa. Liouville correlation functions from four-dimensional gauge theories. *Lett. Math. Phys.*, 91(2):167–197, 2010.
- [A1] Tomoyuki Arakawa. Representation theory of superconformal algebras and the Kac-Roan-Wakimoto conjecture. *Duke Math. J.*, 130(3):435–478, 2005.
- [A2] Tomoyuki Arakawa. Representation theory of W -algebras. *Invent. Math.*, 169(2):219–320, 2007.
- [A3] Tomoyuki Arakawa. Representation theory of W -algebras, II. In *Exploring new structures and natural constructions in mathematical physics*, volume 61 of *Adv. Stud. Pure Math.*, pages 51–90. Math. Soc. Japan, Tokyo, 2011.
- [A4] Tomoyuki Arakawa. A remark on the C_2 cofiniteness condition on vertex algebras. *Math. Z.*, 270(1-2):559–575, 2012.
- [A5] Tomoyuki Arakawa. Associated varieties of modules over Kac-Moody algebras and C_2 -cofiniteness of W -algebras. *Int. Math. Res. Not.*, 2015:11605–11666, 2015.
- [A6] Tomoyuki Arakawa. Rationality of W -algebras: principal nilpotent cases. *Ann. Math.*, 182(2):565–694, 2015.
- [A7] Tomoyuki Arakawa. Rationality of admissible affine vertex algebras in the category $\mathcal{O}$. *Duke Math. J.*, 165(1):67–93, 2016.
- [A8] Tomoyuki Arakawa. Introduction to W -algebras and their representation theory. in *Perspectives in Lie Theory*, Springer INdAM Series 19, arXiv:1605.00138[math.RT].
- [ACL1] Tomoyuki Arakawa, Thomas Creutzig, and Andrew Linshaw. Cosets of Bershadsky-Polyakov algebras and rational W -algebras of type A. *Sel. Math. New Ser.*, published online.
- [ACL2] Tomoyuki Arakawa, Thomas Creutzig, and Andrew Linshaw. *in preparation*.

²² ごく最近, カッツ・脇本によりこれらの指標が擬テータ関数で表されるであろうという予想が提出された ([KW3]). またコチェビッチ・ソイブルマンの壁越え公式との関係も物理学者によって予想されている ([CS] など).

- [AF1] Tomoyuki Arakawa and Peter Fiebig. On the restricted Verma modules at the critical level. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 364(9):4683–4712, 2012.
- [AF2] Tomoyuki Arakawa and Peter Fiebig. The linkage principle for restricted critical level representations of affine Kac-Moody algebras. *Compos. Math.*, 148:1787–1810, 2012.
- [AK] Tomoyuki Arakawa and Kazuya Kawasetsu. Quasi-lisse vertex algebras and modular linear differential equations, to appear in *Kostant Memorial Volume*. Birkhauser.
- [ALY] Tomoyuki Arakawa, Ching Hung Lam, and Hiromichi Yamada. Parafermion vertex operator algebras and W -algebras. arXiv:1701.06229[math.RT].
- [AMor] Tomoyuki Arakawa and Anne Moreau. Joseph ideals and lisse minimal W -algebras. *J. Inst. Math. Jussieu*, published online., 2016.
- [BFN] Alexander Braverman, Michael Finkelberg, and Hiraku Nakajima. Instanton moduli spaces and W -algebras. *Astérisque*, (385):vii+128, 2016.
- [BLL⁺] Christopher Beem, Madalena Lemos, Pedro Liendo, Wolfger Peelaers, Leonardo Rastelli, and Balt C. van Rees. Infinite chiral symmetry in four dimensions. *Comm. Math. Phys.*, 336(3):1359–1433, 2015.
- [BMP] Peter Bouwknegt, Jim McCarthy, and Krzysztof Pilch. *The W_3 algebra*, volume 42 of *Lecture Notes in Physics. New Series m: Monographs*. Springer-Verlag, Berlin, 1996. Modules, semi-infinite cohomology and BV algebras.
- [BPZ] Alexander A. Belavin, Alexander M. Polyakov, and Alexander B. Zamolodchikov. Infinite conformal symmetry in two-dimensional quantum field theory. *Nuclear Phys. B*, 241(2):333–380, 1984.
- [BR] Christopher Beem and Leonardo Rastelli. Vertex operator algebras, Higgs branches, and modular differential equations. arXiv:1707.07679 [hep-th].
- [CS] Clay Córdova and Shu-Heng Shao. Schur indices, BPS particles, and Argyres-Douglas theories. *J. High Energy Phys.*, (1):040, front matter+37, 2016.
- [CR1] Thomas Creutzig and David Ridout. Modular data and Verlinde formulae for fractional level WZW models I. *Nuclear Phys. B*, 865(1):83–114, 2012.
- [CR2] Thomas Creutzig and David Ridout. Modular data and Verlinde formulae for fractional level WZW models II. *Nuclear Phys. B*, 875(2):423–458, 2013.
- [Del] Pierre Deligne. La série exceptionnelle de groupes de Lie. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 322(4):321–326, 1996.
- [DSK] Alberto De Sole and Victor G. Kac. Finite vs affine W -algebras. *Japan. J. Math.*, 1(1):137–261, 2006.
- [DSKV] Alberto De Sole, Victor G. Kac, and Daniele Valeri. Classical $\mathscr{W}$ -algebras and generalized Drinfeld-Sokolov bi-Hamiltonian systems within the theory of Poisson vertex algebras. *Comm. Math. Phys.*, 323(2):663–711, 2013.
- [DLN] Chongying Dong, Xingjun Lin, and Siu-Hung Ng. Congruence property in conformal field theory. *Algebra Number Theory*, 9(9):2121–2166, 2015.
- [FF] Boris Feigin and Edward Frenkel. Quantization of the Drinfel’d-Sokolov reduction. *Phys. Lett. B*, 246(1-2):75–81, 1990.
- [FL] Vladimir A. Fateev and Sergei L. Lykhanov. The models of two-dimensional conformal quantum field theory with Z_n symmetry. *Internat. J. Modern Phys. A*, 3(2):507–520, 1988.
- [Fre] Edward Frenkel. *Langlands correspondence for loop groups*, volume 103 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2007.
- [FBZ] Edward Frenkel and David Ben-Zvi. *Vertex algebras and algebraic curves*, volume 88 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, 2007.

dence, RI, second edition, 2004.

- [FG] Edward Frenkel and Dennis Gaitsgory. Localization of $\mathfrak{g}$ -modules on the affine Grassmannian. *Ann. of Math. (2)*, 170(3):1339–1381, 2009.
- [FKW] Edward Frenkel, Victor Kac, and Minoru Wakimoto. Characters and fusion rules for W -algebras via quantized Drinfel’d-Sokolov reduction. *Comm. Math. Phys.*, 147(2):295–328, 1992.
- [Gen] Naoki Genra. Screening operators for W -algebras. *Sel. Math. New Ser.*, 23(3):2157–2202, 2017.
- [GG] Wee Liang Gan and Victor Ginzburg. Quantization of Slodowy slices. *Int. Math. Res. Not.*, (5):243–255, 2002.
- [GKO] P. Goddard, A. Kent, and D. Olive. Unitary representations of the Virasoro and super-Virasoro algebras. *Comm. Math. Phys.*, 103(1):105–119, 1986.
- [Hua] Yi-Zhi Huang. Rigidity and modularity of vertex tensor categories. *Commun. Contemp. Math.*, 10(suppl. 1):871–911, 2008.
- [KW1] Victor Kac and Minoru Wakimoto. Classification of modular invariant representations of affine algebras. In *Infinite-dimensional Lie algebras and groups (Luminy-Marseille, 1988)*, volume 7 of *Adv. Ser. Math. Phys.*, pages 138–177. World Sci. Publ., Teaneck, NJ, 1989.
- [KW2] Victor G. Kac and Minoru Wakimoto. On rationality of W -algebras. *Transform. Groups*, 13(3-4):671–713, 2008.
- [KW3] Victor Kac and Minoru Wakimoto. On characters of irreducible highest weight modules of negative integer level over affine Lie algebras. arXiv:1706.08387 [math.RT].
- [KRW] Victor Kac, Shi-Shyr Roan, and Minoru Wakimoto. Quantum reduction for affine superalgebras. *Comm. Math. Phys.*, 241(2-3):307–342, 2003.
- [KT] Masaki Kashiwara and Toshiyuki Tanisaki. Characters of irreducible modules with non-critical highest weights over affine Lie algebras. In *Representations and quantizations (Shanghai, 1998)*, pages 275–296. China High. Educ. Press, Beijing, 2000.
- [Kaw] Kazuya Kawasetsu. W -algebras with non-admissible levels and the Deligne exceptional series. *Int. Math. Res. Not.*, published online.
- [Kos] Bertram Kostant. On Whittaker vectors and representation theory. *Invent. Math.*, 48(2):101–184, 1978.
- [KS] Bertram Kostant and Shlomo Sternberg. Symplectic reduction, BRS cohomology, and infinite-dimensional Clifford algebras. *Ann. Physics*, 176(1):49–113, 1987.
- [Li] Haisheng Li. Abelianizing vertex algebras. *Comm. Math. Phys.*, 259(2):391–411, 2005.
- [Miy] Masahiko Miyamoto. Modular invariance of vertex operator algebras satisfying C_2 -cofiniteness. *Duke Math. J.*, 122(1):51–91, 2004.
- [Pol] Alexander M. Polyakov. Gauge transformations and diffeomorphisms. *Internat. J. Modern Phys. A*, 5(5):833–842, 1990.
- [Pre] Alexander Premet. Special transverse slices and their enveloping algebras. *Adv. Math.*, 170(1):1–55, 2002. With an appendix by Serge Skryabin.
- [Rask] Sam Raskin. W -algebras and Whittaker categories arXiv:1611.04937 [math.RT].
- [Rast] Leonardo Rastelli. Vertex operator algebras, Higgs branches and modular differential equations. In *String Math, Paris, June 28, 2016*.
- [SV] Olivierivier Schiffmann and Eric Vasserot. Cherednik algebras, W -algebras and the equivariant cohomology of the moduli space of instantons on $\mathbf{A}^2$. *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.*, 118:213–342, 2013.
- [SXY] Jaewon Song, Dan Xie, and Wenbin Yan. Vertex operator algebras of Argyres-

- Douglas theories from M5-branes. arXiv:1706.01607[hep-th].
- [Tac] Yuji Tachikawa. On some conjectures on VOAs. <http://member.ipmu.jp/yuji.tachikawa/transp/voaconj2.pdf>.
- [TUY] Akihiro Tsuchiya, Kenji Ueno, and Yasuhiko Yamada. Conformal field theory on universal family of stable curves with gauge symmetries. In *Integrable systems in quantum field theory and statistical mechanics*, volume 19 of *Adv. Stud. Pure Math.*, pages 459–566. Academic Press, Boston, MA, 1989.
- [XYX] Dan Xie, Wenbin Yan, and Shing-Tung Yau. Chiral algebra of Argyres-Douglas theory from M5 brane. arXiv:1604.02155[hep-th].
- [Zam] Alexander B. Zamolodchikov. Infinite extra symmetries in two-dimensional conformal quantum field theory. *Teoret. Mat. Fiz.*, 65(3):347–359, 1985.
- [Zhu] Yongchang Zhu. Modular invariance of characters of vertex operator algebras. *J. Amer. Math. Soc.*, 9(1):237–302, 1996.
- [松] 松澤淳一. 特異点とルート系. 朝倉書店, 2003.