Recent interactions between model theory and finite combinatorics

竹内　耕太　(筑波大学)*

モデル理論はShelahのclassification tehoryをその一つの原動力として発展してきた. Classification theoryとは大雑把に言って, 理論Tを固定したときにそのモデルの個数とモデルの濃度（非可算部分）をグラフにしたとき, どのような形のグラフが存在しうるか分類する理論である. その中で提唱された様々な理論の安定性の諸クラス(stablility, simplicity, NIPなど)はその後, 代数などへの応用の発見と共に広く研究され, 近年ではさらに一般化されたTP_1, TP_2, NIP_nといったクラスが提唱されているが, それらの研究手法の一つとして特に有限組合せ論の道具（ラムゼイクラス, Vapnik-Chervonenkis次元など）の有用性が注目されている[1][6][7]. 本講演ではShelahが2005年に導入したクラスであるNIP$_n$に関する講演者の研究成果を題材にしながら, モデル理論と有限組合せ論がどのように関連しあっているのか解説する.

以下では言語LならびにL-理論Tを固定し, Tのmonster model $\mathcal{M}$の中で議論する.

Definition 1 (Shelah[8]). 1. $(n \geq 1.)$ L-論理式$\varphi(x, y_1, ..., y_n)$が次の性質を持つとき, IP$_n$ (n-independent property)をもつという：$I_j = \{a_i^j \in \mathcal{M} : i < \omega\}$ $(1 \leq j \leq n)$が存在し, 任意の$A \subset \Pi_{j \leq n} I_j$に対しある$b_A \in \mathcal{M}$が存在し, $\models \varphi(b_A, a_1, ..., a_n) \Leftrightarrow (a_1, ..., a_n) \in A$を満たす.

2. すべてのL-論理式がIP$_n$を持たないとき, 理論TはNIP$_n$(no IP$_n$)であるという.

IP$_1$をもつがNIP$_2$であるような構造の例としては, ランダムグラフや無限次元内積空間([2],[3])などが挙げられる. しかしこの定義ではNIP$_n$と組合せ論の関連性は見えてこないだろう. まずstableとNIPについてよく知られていた特徴づけを述べる.

Fact 2. Tがstableであることと以下の各条件はそれぞれ同値.

1. $(A; \varphi(x, y)) \cong (\mathbb{Q}; <)$となるような$A \subset \mathcal{M}$, L-論理式φが存在しない.
2. 全ての一様列は一様集合である. （本質的に順序が存在しない）

Fact 3. m-点集合上の$\varphi(x, y)$-タイプの数を$\pi_\varphi(m)$で表すことにする. このとき, TがNIPであることと, 任意のφに対し, $\pi_\varphi(m)$は高々次数dの多項式で上から抑えられることは同値である. ここでdはφのVC次元である.

Fact 2はNIPについては順序をランダムグラフに置き換えたもの（L. Scow[5]）, NIP$_n$についてはハイパーランダムグラフに置き換えたもの（A. Chernikov, D. Palacin and T.[2]）が成立することが近年の研究で示された. 稠密全順序, （順序ハイパー)ランダムグラフに共通するのが, それら有限部分構造を全て集めるとラムゼイクラスになることである. 一方, ある有限構造のクラスKがラムゼイクラスであるかどうかは一般には判断が難しいが, クラスKがラムゼイクラスであることと, （任意の理論の）monster modelのなかでK-一様集合の存在が保証されることが同値になることがL. Scow[6]に

本研究は科研費(課題番号:26800077)の助成を受けたものである.
* 〒305-8571 つくば市天王台１－１－１ 筑波大学 数理物質系 数学域
e-mail: kota@math.tsukuba.ac.jp

よって示されている．この対応関係はモデル理論とラムゼイクラスの関連を強く示唆していると考えられる．実際, 講演者は逆に, このラムゼイクラスとモデル理論の対応関係に注目し, 新しくstable(NOP)の一般化としてNOP_2というクラスを導入し, NIP_nと平行した議論がラムゼイクラスの持つ性質だけを用いた証明によって可能なことを示した[9].

一方Fact 3のNIP_nへの一般化はShelahによって問題提起されていたが, 講演者らは以下の定理を示してShelahの問に答えた.

Theorem 4 (A. Chernikov, D. Palacin and T.[2])**.** m-点集合のn-直積上の$\varphi(x, y_1, ..., y_n)$-タイプの数を$\pi_\varphi(m)$で表す．このとき, TがNIP_nであることと次は同値：$\pi_\varphi(m) \leq \sum_{i<z} \binom{m^n}{i} \leq 2^{cm^{n-\epsilon}}$．ただし$z = z_n(m, d+1)$は$n$次のZarankiewicz数であり, dはφのVC_n次数, $\epsilon = (d+1)^{1-n}$.

ここでは詳述できないが, VC次元とはVapnikとChervonenkisによって提唱されたもので, 集合族の組み合わせ論的な複雑さを表す指標のひとつである．機械学習の一理論であるPAC-学習において, VC次元の有限性がPAC学習可能であることと同値[10]であることが知られている．このPAC学習のVC_n次元に対応する拡張も講演者らによって提案されている[4]．一方Zarankiewicz数はextremal graph theoryにおける研究対象であり, ($n = 2$のとき)以下のように定義される.

Definition 5. $z = z(m, d)$は, 頂点数$2m$の2部グラフがz本の辺を持ったとき必ず完全二部グラフ$K_{d,d}$を部分グラフに持ってしまうような最小の自然数zである.

Zarankiewicz数のtightなupper boundについてはdが一般の場合については$n = 2$のときさえ未解決である．一方講演者らの研究によって, 任意の$n, d, z = z_n(m, d)$について$\pi_\varphi(m) \geq 2^{z-1}$が成立するような$\mathrm{NIP}_n$な論理式$\varphi$が存在することも示された.

参考文献

[1] Aschenbrenner, Matthias, et al. "Vapnik-Chervonenkis density in some theories without the independence property, I." Transactions of the American Mathematical Society 368.8 (2016): 5889-5949.

[2] Chernikov, Artem., Daniel Palacin, and Kota Takeuchi. "On n-dependence." to appear in Notre Dom Journal of Formal Logic.

[3] Hempel, Nadja. "On n - dependent groups and fields." Mathematical Logic Quarterly 62.3 (2016): 215-224.

[4] Kobayashi, Munehiro., Takayuki Kuriyama and Kota Takeuchi, Higher dimensional PAC_n-learning, Congressus Numerantium, 223 (2015), 227-236.

[5] Scow, Lynn. "Characterization of NIP theories by ordered graph-indiscernibles." Annals of Pure and Applied Logic 163.11 (2012): 1624-1641.

[6] Scow, Lynn. "Indiscernibles, EM-types, and Ramsey classes of trees." Notre Dame Journal of Formal Logic 56.3 (2015): 429-447.

[7] Simon, Pierre. A guide to NIP theories. Cambridge University Press, 2015.

[8] Shelah, Saharon. "Strongly dependent theories." Israel Journal of Mathematics 204.1 (2014): 1-83.

[9] Takeuchi, Kota. "On 2-order property." submitted.

[10] Vapnik, Vladimir N., and A. Ya Chervonenkis. "On the uniform convergence of relative frequencies of events to their probabilities." Measures of complexity. Springer International Publishing, 2015. 11-30.