

# 限量子記号消去アルゴリズムと その計算の現状について

佐藤 洋祐 (東京理科大学)\*

## 1. はじめに

限量子記号消去 (Quantifier Elimination、以下では QE と略記する) とは代数的な一階述語論理式から限量子記号  $\exists, \forall$  を取り除き、それと等価な自由変数のみの代数的な式を求めることである。数式処理で最もよく扱われるのは実数領域と複素数領域における QE である。本稿では、これらの QE をおこなうアルゴリズムに関する平易な解説を与える。また、現時点で利用できるソフトウェアについても紹介する。

## 2. 実数領域の QE

実数領域における最初の QE アルゴリズムは Tarski によって与えられた。(古い論文であるが、[12] に原論文がそのまま掲載されている。) 一変数実多項式の実根に関する情報を与える Sturm 列 (例えば [11] に詳しい解説が与えられている) を巧妙に利用したアルゴリズムであるが、計算量を考慮していないため実際にプログラムとして実装しても使い物にならない。その後 [5] によって部分終結式の計算による効率的な Sturm 列の計算を利用した CAD (Cylindrical Algebraic Decomposition) の計算に基づく QE アルゴリズムが提唱され、今日利用できる QE プログラムの多くがこの方法に基づいている。(CAD に基づく QE の平易な日本語の解説本 [1] が出版されているので、詳しく知りたい読者はそちらを参照されたい。) しかしながら、扱う論理式が多く、等式を含むような場合、CAD による QE は無駄な計算を多数おこなってしまうため効率が悪い。[4] では、多変数代数方程式の実根の個数に関する Hermite の理論を利用して、包括的グレブナー基底系 (Comprehensive Gröbner System) の計算に基づく QE アルゴリズムを導入している。このアルゴリズムは等式を多く含む論理式にたいして有効である。例えば、初等幾何学の問題は実数領域の QE によってコンピューターによる自動解法が可能であるが、国際数学オリンピックで出題されるような複雑な幾何問題の解法や、[2] で採用されている大学入試問題の解法のためには、一般に多数の等式を含む論理式に対する QE が必要になる。この種の論理式にたいしては、[4] の方法が他の方法よりも圧倒的に有効であることが報告されている。

## 3. 複素数領域の QE

複素数領域は代数的閉体なので、複素数領域の QE は実数領域の QE よりも遥かに容易である。複素数領域の QE アルゴリズムはパラメーター付きの一変数多項式の最大公約元の計算を繰り返すことで容易に構成できるが、パラメーター空間の分割が複雑になるため効率的ではない。実際、Mathematica の複素数領域の QE アルゴリズムはこの方法に基づいて実装されているが、性能はよくない。これに対し、多変数多項式環におけるイデアルの包括的グレブナー基底系の計算を利用した方法の方が一般には効率

---

キーワード: Quantifier Elimination, Comprehensive Gröbner System

\* 〒162-8601 東京都新宿区神楽坂1丁目3番地 東京理科大学 理学部第一部

e-mail: ysato@rs.kagu.tus.ac.jp

web: <http://mi.kagu.tus.ac.jp/~ysato/>

がよいことが[3]で報告されている。

#### 4. QEソフトウェア

実数領域のQEをおこなうソフトウェアについて紹介する。数式処理システムの組み込み関数として実装されているQEプログラムで最も洗練されているのは、商用の数式処理システム Mathematica の組み込み関数 **Resolve** と **Reduce** である ([8])。フリーの数式処理システム Reduce にも、デフォルトで利用できるパッケージ redlog([10]) の組み込み関数 **rlqe** と **rlhqe** が実装されているが、式の簡易化プログラムが洗練されておらず、出力される式が異常に複雑になる傾向がある。商用の数式処理システム Maple は組み込み関数として実装されたQEプログラムを有しないが、Maple 上で利用できるQEプログラムが2つオープンソースとして公開されている。富士通が公開している SyNRAC([6]) は、一般に高速であり、出力の簡易化プログラムも性能がよい。[7]で公開されている RegularChains の計算に基づいたCADを利用したプログラムは、redlogのQEプログラムほどではないが、出力される式が複雑になる傾向がある。もっとも歴史の古いQEソフトウェアは **QEPCAD**([9])である。CADのみに基づくQEプログラムなので計算速度は一般に上記のプログラムよりも劣るが、出力される式は非常にシンプルである。

#### 参考文献

- [1] 穴井、横山、QEの計算アルゴリズムとその応用数式処理による最適化、東京大学出版 2011.
- [2] Today Robot Project. [http://21robot.org/research\\_activities/math/](http://21robot.org/research_activities/math/)
- [3] Fukasaku, R., Inoue, S., Sato, Y.: On QE Algorithms over an Algebraically Closed Field Based on Comprehensive Gröbner Systems. Mathematics in Computer Science 9(3): pp. 267-281, 2015.
- [4] Fukasaku, R., Iwane, H. and Sato, Y.: Real Quantifier Elimination by Computation of Comprehensive Gröbner Systems. Proceedings of International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation, pp. 173-180, ACM, 2015.
- [5] Collins, G, E.: Quantifier elimination for real closed fields by cylindrical algebraic decomposition. Automata theory and formal languages (Second GI Conf., Kaiserslautern, 1975), Lecture Notes in Comput. Sci., Vol. 33, pp. 134-183, Springer, Berlin, 1975.
- [6] SyNRAC a software package for quantifier elimination (QE). <http://www.fujitsu.com/jp/group/labs/en/resources/tech/announced-tools/synrac/>
- [7] The RegularChains Library. <http://www.regularchains.org/index.html>
- [8] Mathematica Tutorial: [tutorial/ComplexPolynomialSystems](#)  
Mathematica Tutorial: [tutorial/RealPolynomialSystems](#)
- [9] QEPCAD-Quantifier Elimination by Partial Cylindrical Algebraic Decomposition. <http://www.usna.edu/CS/qepcadweb/B/QEPCAD.html>
- [10] Redlog: An integral part of the interactive computer algebra system Reduce. <http://www.redlog.eu/>
- [11] 高木貞治 (著), 代数学講義, 共立出版.
- [12] Tarski, A. A Decision Method for Elementary Algebra and Geometry. Quantifier Elimination and Cylindrical Algebraic Decomposition, Texts & Monographs in Symbolic Computation, pp. 24-84, Springer, 1998.