

整数及び小数の digit 展開における 一様分布論の最近の展開

金子 元 (筑波大学)*

1. 本講演の目的

b を 2 以上の整数とする. 任意の非負整数は $0, 1, \dots, b-1$ の digit を有限回用いて b 進展開出来る. また, 任意の非負実数は $0, 1, \dots, b-1$ の digit を無限回用いて b 進展開出来る. これらの展開に関して, digit の一様性について様々な研究がされてきた.

本講演では, まず整数の b 進展開の研究対象として, smooth number と呼ばれる整数の b 進展開における digit の一様性を考察する. 次に, 実数の b 進展開の研究対象として, 代数的無理数の b 進展開における digit の一様性に関する問題を扱う. この際, 代数的数のベータ展開における digit の一様性も考察する. ベータ展開は, b 進展開の自然な一般化であり, 力学系などに応用がある. b 進展開やベータ展開の digit という数値実験可能な対象に関する予想について, 近年の進展を紹介することが本講演の目的である.

ここで本講演を通じて用いる記号を紹介する. 非負整数全体の集合, および正整数全体の集合をそれぞれ $\mathbb{N}, \mathbb{Z}^+$ と表す. 実数 x に対して, その整数部分, 小数部分をそれぞれ $[x], \{x\}$ と表す. 代数的数 ξ に対して, $P(\xi) = 0$ を満たす次数最小の多項式 $P(X) = A_D X^D + A_{D-1} X^{D-1} + \dots + A_0 \in \mathbb{Z}[X]$ で, 以下の 2 条件を満たすものを ξ の最小多項式と呼ぶ: $A_D > 0$ かつ $A_D, A_{D-1}, \dots, A_0$ の最大公約数は 1. さらに, ξ の最小多項式の次数を ξ の次数と呼ぶ. 例えば, $1/\sqrt{3}$ の最小多項式は $3X^2 - 1$ であり, 次数は 2 である. また, 体の拡大 L/K の拡大次数を $[L : K]$ で表す.

2. Smooth number の b 進展開に関する一様性

2.1. Smooth number の定義

正整数 n の最大素因子を $P[n]$ と書く. 便宜上 $P[1] = 1$ であるとする. $P[n]$ が “小さい” とき, n を smooth number と呼ぶ. $P[n]$ が “小さい” という箇所を具体的にした定義を以下に述べる: x を 2 以上の実数とする. このとき, 正整数 n が x -smooth であるとは, $P[n] \leq x$, すなわち, n の全ての素因子が x 以下となることである. 例えば, 2-smooth number は 2^i ($i \in \mathbb{N}$) の形の整数であり, 3-smooth number は $2^i 3^j$ ($i, j \in \mathbb{N}$) の形の整数である. また, 2 以上の整数 a および非負整数 m に対して a^m は $P[a]$ -smooth である.

以下, 本章では固定された整数 $b \geq 2$ に対して, smooth number の b 進展開における digit を考察する.

2.2. 整数のべき a^m の digit に関する予想

1979 年 Erdős は, 2 項係数 $\binom{2n}{n}$ が square-free であるかという問題を考察するために, 2 のべき 2^m の 3 進展開に関する以下の予想を提案した.

本研究は科研費 (課題番号:15K17505) の助成を受けたものである.

2010 Mathematics Subject Classification: 11K16 (primary), 11J25 (secondary)

キーワード: 一様分布論, smooth number, nonzero digit, 正規数, 代数的数

* 〒305-8571 茨城県つくば市天王台 1-1-1 筑波大学数理物質系数域, 〒305-8571 茨城県つくば市天王台 1-1-1 Center for Integrated Research in Fundamental Science and Engineering (CiRfSE)

e-mail: kanekoha@math.tsukuba.ac.jp

予想 1 (Erdős [12]) m を 9 以上の整数とする. このとき, 2^m の 3 進展開において, digit 2 が少なくとも 1 回現れる ($m = 8$ の場合, $2^8 = (100111)_3$).

T を正整数とする. 2^m の 3 進展開において digit 2 が現れないような非負整数 m で, T 以下のものの個数を $N(T)$ とする. Narkiewicz [19] は,

$$N(T) \leq 1.62T^{\log_3 2}$$

であることを示した (ただし, $\log_3 2 = (\log 2)/(\log 3) \approx 0.63092$). この評価式は, Erdős の予想の部分的な結果である. 特に, Erdős の予想を満たさない非負整数 m 全体の集合は, $\mathbb{N}$ において密度 0 である.

さらに, Dupuy と Weirich [11] は数値計算などの結果, 素数のべき乗の digit に関する予想を提案した. a は $b - 1$ 以下の非負整数とする. 正整数 n に対して, n の b 進展開に a が digit として現れる回数を $\tau_b(a; n)$ と書くことにする. 正整数 n の b 進展開において, 用いられる digit の個数は $1 + \lfloor \log_b n \rfloor \approx \log_b n$ であることに注意すると, 以下の予想は digit の一様性に関するものである.

予想 2 (Dupuy and Weirich [11]) p, q を相異なる素数とする. このとき, $0 \leq a \leq q - 1$ となる任意の整数 a に対して,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\tau_q(a; p^m)}{\log_q(p^m)} = \frac{1}{q}$$

が成り立つ.

$\tau_q(a; p^m)$ の大きさに関する評価式を与えることは非常に難しい. 例えば, 十分大きな任意の正整数 m に対して $\tau_3(2; 2^m)$ が正であることも証明されていない (Erdős 予想). 代わりに, 本講演では正整数 n の b 進展開における 0 ではない digit の個数 $\lambda_b(n)$, すなわち,

$$\lambda_b(n) = \tau_b(1; n) + \tau_b(2; n) + \cdots + \tau_b(b - 1; n)$$

の下からの評価式を与える. これは digit の一様性の予想に対する部分的な結果である. 定理 1 および系 1 において, 正整数 a, b が乗法的独立であるとは, 以下が成り立つことである: 任意の整数の組 (i, j) に対して, $a^i b^j = 1$ ならば, $i = j = 0$ である.

定理 1 (Stewart [22]) a, b を乗法的独立な 2 以上の整数とする. また, ε を任意の正の実数とする. このとき, a, b, ε のみに依存する計算可能な正定数 $C_1 = C_1(a, b, \varepsilon)$ が存在して, 以下が成り立つ: $n \geq C_1$ なる任意の整数 n に対して,

$$\lambda_a(n) + \lambda_b(n) \geq (1 - \varepsilon) \frac{\log \log n}{\log \log \log n}.$$

特に, 任意の非負整数 m に対して, $\lambda_a(a^m) = 1$ より, 以下を得る.

系 1 a, b を乗法的独立な 2 以上の整数とする. また, ε を任意の正の実数とする. このとき, a, b, ε のみに依存する計算可能な正定数 $C_2 = C_2(a, b, \varepsilon)$ が存在して, 以下が成り立つ: $m \geq C_2$ なる任意の整数 m に対して,

$$\lambda_b(a^m) \geq (1 - \varepsilon) \frac{\log m}{\log \log m}.$$

2.3. Smooth number における 0 ではない digit の個数

Bugeaud は smooth number の 0 ではない digit の個数に関して次の問題を提案した.

問題 1 (Bugeaud [8]) b で割ることが出来ない十分に大きな整数 n で, 以下の 2 条件を同時に満たすものは存在するか.

条件 1 n は “smooth number” ($P[n]$ が “小さい”).

条件 2 $\lambda_b(n)$ が “小さい”.

この問題に対して, Bugeaud は上記の条件を満たす整数 n は 存在しない であろうと予想した. なお, $P[b^m] = P[b]$, $\lambda_b(b^m) = 1$ ($m \in \mathbb{N}$) などの例があるため, b は n を割り切らないという条件は必要である. Bugeaud の予想において, 条件 1 と条件 2 を同時に満たす n はないという箇所を, 以下の表現に言い換えることが出来る: $P[n]$ が “小さい” ならば, $\lambda_b(n)$ は “小さくはない”. 例えば, n が $n = a^m$ ($m \in \mathbb{N}$) の形 (このとき, n は $P[a]$ -smooth number) ならば, 系 1 は $\lambda_b(n)$ の下からの評価式を与える. Bugeaud の予想は, 一般の smooth number に対して系 1 の類似が成立するかを問うものである.

本節では, 適切な増加関数 $g(n) : \mathbb{Z}^+ \rightarrow \mathbb{Z}^+$ を用いることにより, $P[n] \leq g(n)$ という条件から, $\lambda_b(n)$ の下からの評価式を導く. b で割り切ることが出来ない整数 n が $n \geq b+1$ を満たすならば, $\lambda_b(n) \geq 2$ であり, これは自明な評価式である. 先行結果として, 非自明な評価式 $\lambda_b(n) \geq 3, 4$ を導くための $g(n)$ を以下に述べる:

定理 2 n は b で割ることが出来ない正整数とする.

(1) b のみに依存する計算可能な正定数 $C_3 = C_3(b)$ が存在して, 以下を満たす:

$n \geq C_3$ かつ $P[n] \leq (\log n)^{1/2} \exp\left(\frac{\log \log n}{105 \log \log \log n}\right)$ なら, $\lambda_b(n) \geq 3$ (Stewart, [21]).

(2) ε を任意の正の実数とする. このとき, b, ε のみに依存する計算可能な正定数 $C_4 = C_4(b, \varepsilon)$ が存在して, 以下を満たす:

$n \geq C_4$ かつ $P[n] \leq (1 - \varepsilon)(\log \log n) \frac{\log \log \log n}{\log \log \log \log n}$ ならば, $\lambda_b(n) \geq 4$ (Bugeaud, [8]).

Bugeaud との共同研究により, $\lambda_b(n)$ の下からの評価式という観点から先行結果を以下のように改良できた.

定理 3 ([10]) n は b で割ることが出来ない正整数とする.

k を 3 以上の整数とし, ε を任意の正の実数とする. このとき, b, k, ε のみに依存する計算可能な正定数 $C_5 = C_5(b, k, \varepsilon)$ が存在して, 以下を満たす:

$n \geq C_5$ かつ $P[n] \leq \left(\frac{1}{k-2} - \varepsilon\right) (\log \log n) \frac{\log \log \log n}{\log \log \log \log n}$ ならば, $\lambda_b(n) \geq k+1$.

無限大に発散する関数 $h(n)$ を用いた評価式 $\lambda_b(n) \geq h(n)$ を証明することにより, さらに結果を精密化することが出来た. 精密化の一例を以下に述べる.

定理 4 ([10]) n は b で割ることが出来ない正整数とする.

b のみに依存する計算可能な正定数 $C_6 = C_6(b)$ が存在し, $n \geq C_6$ なら以下が成り立つ:

$P[n] \leq \sqrt{(\log \log n) \frac{\log \log \log n}{\log \log \log \log n}}$ なら, $\lambda_b(n) \geq \frac{1}{3} \sqrt{(\log \log n) \frac{\log \log \log n}{\log \log \log \log n}}$.

3. 実数のベータ展開に関する一様性

3.1. 実数のベータ展開について

$\beta > 1$ を実数とする. ベータ変換 $T_\beta : [0, 1) \rightarrow [0, 1)$ は, 実数の小数部分をとる関数 $\{\cdot\}$ を用いて, $T_\beta(x) = \{\beta x\}$ と定義される. さらに, $0 \leq x < 1$ を満たす実数 x をとる. x のベータ展開は, digit の列 $s_\beta(x; n) = \lfloor \beta T_\beta^{n-1}(x) \rfloor$ ($n = 1, 2, \dots$) を用いて,

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} s_\beta(x; n) \beta^{-n}, \quad (1)$$

によって定まる. ただし, T_β^{n-1} は T_β の $n-1$ 回反復合成であり, $n-1=0$ の時は恒等写像を表す. β が 2 以上の整数 b の場合, (1) は x の通常の b 進展開である. 以下, 本章では β は固定された実数とする. β が整数であることを強調する場合, β を b と書く.

ベータ展開において, Pisot 数, Salem 数と呼ばれる代数的整数が重要な役割を果たす. 任意の有理数 x のベータ展開が周期的ならば, β は Pisot 数または Salem 数であるためである. ここで, Pisot 数および Salem 数の定義を述べる. $\beta > 1$ を d 次の代数的整数とし, $\beta_1 = \beta, \beta_2, \dots, \beta_d$ をその共役とする. β が Pisot 数であるとは, $i \geq 2$ ならば, $|\beta_i| < 1$ となることである. 例えば, 2 以上の任意の整数 b および黄金比 $(1 + \sqrt{5})/2$ は Pisot 数である. また, β が Salem 数であるとは, $i \geq 2$ ならば, $|\beta_i| \leq 1$ となり, さらにある $j \geq 2$ が存在して, $|\beta_j| = 1$ を満たすことである. 例えば, 方程式 $X^4 - X^3 - X^2 - X + 1 = 0$ について, 1 より大きい唯一の実根 $\beta (\approx 1.7220)$ は次数 4 の Salem 数である.

3.2. 正規数の定義と Borel 予想

実数 x の digit の列 $s_n(\beta; x)$ ($n = 1, 2, \dots$) が “一様” ならば, x はベータ展開に関して正規数と呼ばれる. 簡単のために β が整数 b である場合に, 正規数の厳密な定義を述べる. L は正整数であるとし, $w_1, w_2, \dots, w_L$ は各々 $0 \leq w_i \leq b-1$ を満たす整数とする (このような整数の組は b^L 通り). x の小数第 1 位から $N+L-1$ 位までに, 長さ L のワード $w = w_1 w_2 \cdots w_L$ が現れる回数を $\tau_b(w, \xi; N)$ とおく. すなわち, $\tau_b(w, \xi; N)$ は

$$\text{Card}\{1 \leq n \leq N \mid s_b(x; n) = w_1, s_b(x; n+1) = w_2, \dots, s_b(x; n+L-1) = w_L\}$$

である (Card は集合の濃度を表す). もしも digit が “一様” ならば, 各正整数 L に対して, 長さ L の任意のワードが等しく割合 b^{-L} で digit の列に現れることが期待される. このため, 任意のワード $w = w_1 w_2 \cdots w_L$ に対して

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\tau_b(w, \xi; N)}{N} = \frac{1}{b^L}$$

が成立するとき, ξ は b 進展開において正規数であると定義される.

具体的に与えられた実数が正規数であるかどうかを判定する事は一般に難しい. 例えば, Borel [4] は任意の代数的無理数は b 進展開において正規数であると予想した. ところが, 正規性の証明された (または非正規性が証明された) 代数的無理数および整数 b は存在しない. Borel の予想は大変難しい未解決問題だが, 代数的無理数の b 進展開は擬似乱数の観点から重要である. 代数的数 ξ が与えられたとき, $T_b(\xi)$ の最小多項式に関して, 整数のみを用いた計算が可能であるためである (例えば, Saito and Ito [20]). 本章では, 代数的無理数の正規性について, 有理近似の誤差限界 (ディオファントス不等式) より得

られる部分的結果をまず紹介する. 次に, Bailey, Borwein, Crandall, Pomerance によって 2004 年に開発された新しい手法を紹介する. なお, 現在知られている正規性の判定条件や正規数の構成方法などは, 例えば Bugeaud による文献 [5] に詳細が記されている.

3.3. 有理近似の誤差限界を用いた正規性の部分的な結果

ξ を代数的無理数とする. 前節に述べた Borel の予想が正しいと仮定すれば, ξ が b 進展開において正規数であり, 特に $\{0, 1, \dots, b-1\}$ の元を有限個並べた任意の word は ξ の digit の列に現れる. ところが, 例えば word 00 が任意の代数的無理数の 2 進展開に現れるかどうかすら未解決である. 正規性の部分的な結果を紹介するため, 正整数 L に対して, ξ の b 進展開に現れる長さ L のワードの種類個数を $p_b(\xi; L)$ と書く. すなわち,

$$p_b(\xi; L) := \text{Card}\{s_b(\xi; n)s_b(\xi; n+1)\cdots s_b(\xi; n+L-1) \mid n \in \mathbb{Z}^+\}$$

である. ξ が b 進展開に関して正規数ならば,

$$p_b(\xi; L) = b^L \quad (2)$$

である. $p_b(\xi; L)$ の下からの評価式に関して現在知られている結果を紹介する. この結果により, 具体的にどのような長さ L の word が与えられるかを記述することは出来ないが, 代数的無理数の b 進展開における digit の列の“複雑さ”を保証することは出来る.

定理 5 $\xi \in [0, 1)$ を代数的無理数とする.

(1)

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \frac{p_b(\xi; L)}{L} = \infty \quad (\text{Adamczewski and Bugeaud, [1]}).$$

(2) $\eta < 1/11$ を満たす任意の実数に対して,

$$\limsup_{L \rightarrow \infty} \frac{p_b(\xi; L)}{L(\log L)^\eta} = \infty \quad (\text{Bugeaud and Evertse, [9]}).$$

ワードの種類個数 $p_b(\xi; L)$ について, 定理 5 と予想される式 (2) の間にギャップが大きいため, よりよい評価式を得ることが今後の研究課題である.

正規性に関して, ワードの種類以外の結果を得るために, Bugeaud [6] は digit 変化数の研究を提案した. 正整数 N に対して, digit の有限列 $s_\beta(\xi; 1)s_\beta(\xi; 2)\cdots s_\beta(\xi; N+1)$ において隣接する digit が異なる箇所数を $\gamma_\beta(\xi; N)$ と書くことにする. すなわち,

$$\gamma_\beta(\xi; N) = \text{Card}\{n \in \mathbb{Z}^+ \mid n \leq N, s_\beta(\xi; n) \neq s_\beta(\xi; n+1)\}$$

である. β が整数 b であり, ξ が b 進展開に関する正規数ならば,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\gamma_b(\xi; N)}{N} = \frac{b^2 - b}{b^2} = \frac{b-1}{b} \quad (3)$$

が成立する. Bugeaud は digit 変化数に関する以下の評価式を得た.

定理 6 ([7]) β は Pisot 数または Salem 数とする. また, ξ は代数的数であるとする. ここで, 無限の多くの n に対して $s_\beta(\xi; n) \neq s_\beta(\xi; n+1)$ が成り立つと仮定する. すると, β, ξ のみに依存する計算可能な正の定数 $C_7 = C_7(\beta, \xi)$, $C_8 = C_8(\beta, \xi)$ が存在して, 以下を満たす: $N \geq C_8$ を満たす任意の整数 N に対して,

$$\gamma_\beta(\xi; N) \geq C_7 \frac{(\log N)^{3/2}}{(\log \log N)^{1/2}}. \quad (4)$$

下からの評価式 (4) と予想式 (3) の間のギャップもやはり大きい, ξ がある条件を満たす場合に評価式を飛躍的に改良出来るので, 次節で紹介する.

3.4. Bailey, Borwein, Crandall, Pomerance の手法による改良

Bailey, Borwein, Crandall, Pomerance [3] は代数的無理数の 2 進展開において, 0 ではない digit の個数を研究するための画期的な手法を開発した. $\xi \in [0, 1)$ を実数とし, N を正整数とする. ベータ展開の digit の有限列 $s_\beta(\xi; 1)s_\beta(\xi; 2) \cdots s_\beta(\xi; N)$ において, 0 ではない digit が現れる回数を $\lambda_\beta(\xi; N)$ とおく. すなわち,

$$\lambda_\beta(\xi; N) = \text{Card}\{n \in \mathbb{Z}^+ \mid n \leq N, s_\beta(\xi; n) \neq 0\}$$

である. 例えば, $\sqrt{2}$ の 2 進展開 $\sqrt{2} =: \sum_{n=0}^{\infty} s_n 2^{-n}$ ($s_n \in \{0, 1\}$) を考える. すると,

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} s_n 2^{-n} \right)^2 = 2 = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} = (1.11111 \dots)_2$$

となる. 実数の 2 進展開における和・積に関する繰り上がりの様子を観察することにより, 以下の評価式が示される: 任意の正の実数 ε に対して, N が十分に大きいならば,

$$\lambda_2(\sqrt{2}; N) > \frac{1-\varepsilon}{\sqrt{2}} \sqrt{N}.$$

同様の評価式が一般の代数的無理数の 2 進展開に対しても成立する.

定理 7 (Bailey, Borwein, Crandall, and Pomerance [3]) ξ を次数 D の代数的無理数とする. このとき, ξ にのみ依存する計算可能な正定数 $C_9 = C_9(\xi)$ が存在して, N が十分に大きいならば,

$$\lambda_2(\xi; N) > C_9 N^{1/D}.$$

定理 7 は, N に関する条件を計算可能な正定数で表せない. Adamczewski, Faverjon [2] と Bugeaud [5] は独立に, 一般的な b 進展開で N に関する計算可能な条件を求めた.

定理 8 (Adamczewski and Faverjon [2], Bugeaud [5]) ξ を次数 D の代数的無理数とする. このとき, b, ξ にのみ依存する計算可能な正定数 $C_{10} = C_{10}(b, \xi), C_{11} = C_{11}(b, \xi)$ が存在して, 以下が成り立つ: $N \geq C_{11}$ ならば,

$$\lambda_b(\xi; N) > C_{10} N^{1/D}.$$

β が Pisot 数または Salem 数の場合も類似の定理を証明することが出来る.

定理 9 ([17]) β は Pisot 数または Salem 数とする. また, ξ は代数的数とし, $D = [\mathbb{Q}(\beta, \xi) : \mathbb{Q}(\beta)]$ とおく. 無限に多くの n に対して, $s_\beta(\xi; n) \neq 0$ であると仮定する. すると, β, ξ のみに依存する正定数 $C_{12} = C_{12}(\beta, \xi), C_{13} = C_{13}(\beta, \xi)$ が存在して, $N \geq C_{13}$ ならば以下が成り立つ:

$$\lambda_\beta(\xi; N) > C_{12} \left(\frac{N}{\log N} \right)^{1/D}.$$

ξ がある条件を満たせば, 同様の手法が digit 変化数にも適用できる. まずは具体例を述べ, 後に ξ の条件を述べる. 例えば, $1/\sqrt{3}$ の 2 進展開 $1/\sqrt{3} =: \sum_{n=1}^{\infty} s'_n 2^{-n}$ ($s'_n \in \{0, 1\}$) は

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{s'_n}{2^n} \right)^2 = \frac{1}{3} = (0.01010101 \dots)_2$$

を満たす. 実数の2進展開における和・積に関する繰り上がりの様子を観察することで, 以下の評価式が示される: 任意の正の実数 ε に対して, N が十分に大きいならば,

$$\gamma_2\left(\frac{1}{\sqrt{3}}; N\right) > \frac{1-\varepsilon}{\sqrt{2}}\sqrt{N}.$$

この式は, 先行結果 (4) と比較すると予想式 (3) により近い. さて, ξ が満たすべき一般の条件を述べよう.

定理 10 ([16]) ξ を代数的無理数とし, $A_D X^D + \cdots + A_1 X + A_0$ をその最小多項式とする. 正の整数 u が存在し, 以下の3条件を満たすと仮定する.

1. u と b は互いに素.
2. u は $A_0(b-1)^D$ を割り切らない.
3. $1 \leq h \leq D$ を満たす各 h に対して, u は $A_h(b-1)^{D-h}$ を割り切る.

このとき, b, ξ にのみ依存する計算可能な正定数 $C_{14} = C_{14}(b, \xi)$, $C_{15} = C_{15}(b, \xi)$ が存在して, $N \geq C_{15}$ ならば以下が成り立つ:

$$\gamma_b(\xi; N) > C_{14} N^{1/D}.$$

定理 10 の仮定は技術的であるが, $b=2$ の場合は, 「 $A_D, \dots, A_1$ を割り切るが, A_0 を割り切らない奇素数 p が存在する」という比較的簡単な条件である ([15]). 例えば, $1/\sqrt{3}$ の最小多項式 $3X^2 - 1$ に対して, 奇素数 3 がこの条件を満たす.

4. まとめ及び digit に関するその他の話題

2 章では, smooth number の 0 ではない digit の個数を主に扱った. ところが, 特に整数のべき a^m に関する予想式と既知の評価式のギャップが大きく, 評価式の改良をすることが今後の課題である. 今回, 多項式 $P(X)$ に対する整数 $P(m)$ ($m = 1, 2, \dots$) の b 進展開は扱わなかったが, 簡単のために 2 進展開の一つの未解決問題を紹介する. $\lambda_2(m^2) = \lambda_2(m)$ という特殊な関係式が成り立つ正整数 m の個数を考察する. すなわち, 正整数 N に対し $\rho(N) = \text{Card}\{m \in \mathbb{Z}^+ \mid m \leq N, \lambda_2(m^2) = \lambda_2(m)\}$ とおく. Melfi [18] は $\rho(N)$ に対して $\rho(N) \approx N^\delta / (\log N)$ ($\delta \approx 0.75488$) であると予想した. 予想に対し, 現在の最良の結果は, Hare, Laishram, Stoll [13] による $\rho(N) \geq cN^{1/19}$ (c は正の定数) である.

3 章では, 代数的数のベータ展開における digit の一様性について考察した. 3 章 4 節の手法は, 先行結果を大幅に改良できるが, 適用できる問題は限られ, さらに扱える代数的数に制限がある. 定理の仮定を弱め, 一般化をすることが今後の課題である. また, 今回は扱わなかったが, ベータ展開において 1 の展開が周期的になるかを判定する事も, 未解決の課題である. 1 の展開は, 例えば 10 進展開において $1 = 0.999\dots$ の右辺を表し, ベータ展開の力学系において重要な展開である. 特に, β が Salem 数の場合, 1 の展開の周期性は未解決であり, 部分的な結果が例えば [14] で扱われている.

整数及び実数の digit に関して, 数値実験などにより予想されることを実際に証明することは一般にとっても難しい. 特に, digit が一様であることを示すことは難問である. 本講演では述べなかったが, b 進展開やベータ展開以外にも連分数展開など実数の近似と関連した種々の展開があり, これらの展開における digit の一様性も研究がされている. 特に, 代数的数など特殊な定数に関して digit の一様性を研究することが, 数論的な関心のみならず応用数学の観点からも必要とされている.

参考文献

- [1] B. Adamczewski and Y. Bugeaud, On the complexity of algebraic numbers. I. Expansions in integer bases, *Annals of Math.* **165** (2007), 547–565.
- [2] B. Adamczewski and C. Faverjon, Chiffres non nuls dans le développement en base entière des nombres algébriques irrationnels, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **350** (2012), 1–4.
- [3] D. H. Bailey, J. M. Borwein, R. E. Crandall and C. Pomerance, On the binary expansions of algebraic numbers, *J. Théor. Nombres Bordeaux* **16** (2004), 487–518.
- [4] É. Borel, Sur les chiffres décimaux de $\sqrt{2}$ et divers problèmes de probabilités en chaîne, *C. R. Acad. Sci. Paris* **230** (1950), 591–593.
- [5] Y. Bugeaud, Distribution modulo one and diophantine approximation, *Cambridge Tracts in Math.* **193**, Cambridge, (2012).
- [6] Y. Bugeaud, On the b -ary expansion of an algebraic number, *Rend. Sem. Math. Univ. Padova* **118** (2007), 217–233.
- [7] Y. Bugeaud, On the β -expansion of an algebraic number in an algebraic base β , *Integers* **9** (2009), 215–226.
- [8] Y. Bugeaud, On the digital representation of integers with bounded prime factors, preprint arXiv:1609.07926, to appear in *Osaka J. Math.*
- [9] Y. Bugeaud and J.-H. Evertse, On two notions of complexity of algebraic numbers, *Acta Arith.* **133** (2008), 221–250.
- [10] Y. Bugeaud and H. Kaneko, On the digital representation of smooth numbers, preprint arXiv:1704.00432, to appear in *Math. Proc. Cambridge Phil. Soc.*
- [11] T. Dupuy and D. E. Weirich, Bits of 3^n in binary, Wieferich primes and a conjecture of Erdős, *J. Number Theor.* **158** (2016), 268–280.
- [12] P. Erdős, ‘Some unconventional problems in number theory’, *Math. Mag.* **52** (1979), 67–70.
- [13] K. G. Hare, S. Laishram, and T. Stoll, The sum of digits of n and n^2 , *Int. J. Number Theory*, **7** (2011), 1737–1752.
- [14] H. Kaneko, On the beta-expansions of 1 and algebraic numbers for a Salem number beta, *Ergod. Theory and Dynamical Syst.* **35** (2015), 1243–1262.
- [15] H. Kaneko, On the binary digits of algebraic numbers, *J. Aust. Math. Soc.* **89** (2010), 233–244.
- [16] H. Kaneko, On the number of digit changes in base- b expansions of algebraic numbers, *Unif. Distrib. Theory*, **7** (2012), 141–168.
- [17] H. Kaneko, On the number of nonzero digits in the beta-expansions of algebraic numbers, *Rend. Sem. Math. Univ. Padova* **136** (2016), 205–223.
- [18] G. Melfi, On simultaneous binary expansions of n and n^2 , *J. Number Theory* **111** (2005), 248–256.
- [19] W. Narkiewicz, ‘A note on a paper of H. Gupta concerning powers of 2 and 3’, *Univ. Beograd Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz.* 678–715 (1980) 173–174.
- [20] A. Saito and S. Ito, Computation of true chaotic orbits using cubic irrationals, *Physica D*, **268** (2014), 100–105.
- [21] C. L. Stewart, On prime factors of terms of linear recurrence sequences. In *Number theory and related fields*, 341–359, Springer Proc. Math. Stat., 43, Springer, New York, 2013.
- [22] C. L. Stewart, On the representation of an integer in two different bases, *J. Reine Angew. Math.* **319** (1980), 63–72.