多様体の単体分割の持つ組合せ論的・代数的対称性

村井　聡　(阪大情報)*

概　要

球面と同相な単体的複体はDehn–Sommerville等式と呼ばれる面の個数に関する対称性を持つことが知られている．この対称性はスタンレー・ライスナー環のGorenstein性を用いて代数的に説明することができる．本稿では，この組合せ論的・代数的対称性が多様体と同相な単体的複体の場合に一般化できることを紹介する．

1. 球面の単体分割の面の個数の対称性

最初に単体的複体に関する基本的な事項について述べる．頂点集合を V とする **(有限抽象) 単体的複体** Δ とは，有限集合 V の部分集合の族であって次の (i),(ii) をみたすものである: (i) $F \in \Delta$, $G \subset F$ なら $G \in \Delta$, (ii) 任意の $v \in V$ に対し $\{v\} \in \Delta$. 単体的複体 Δ の元を Δ の**面**と呼び，面 $F \in \Delta$ の**次元**を $\dim F = |F| - 1$ で，Δ の次元を $\dim\Delta = \max\{\dim F : F \in \Delta\}$ で定める，但し $|X|$ で有限集合 X の要素の数を表す．$f_i(\Delta)$ で単体的複体 Δ の持つ i 次元面の個数を表すことにする，即ち，

$$f_i(\Delta) = |\{F \in \Delta : |F| = i - 1\}|$$

である．次元 d の単体的複体 Δ に対し，

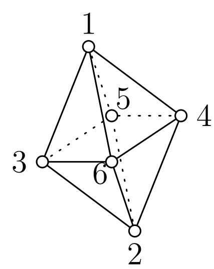
$$f(\Delta) = (f_{-1}(\Delta), f_0(\Delta), \ldots, f_d(\Delta))$$

を Δ の **f-列**と呼ぶ[1]．良く知られているように，位相を考える際には，抽象単体的複体と単体の集まりとして定義される幾何的単体的複体とを同一視して考えることができる．以下，位相型などの Δ の幾何的性質について述べる際は，Δ を幾何的単体的複体と同一視して考える．

例　Δ を右の八面体から定められる2次元単体的複体とすると，八面体は0次元面（頂点）を6個，1次元面（辺）を12個，2次元面（三角形面）を8個持つので，$f_0(\Delta) = 6$, $f_1(\Delta) = 12$, $f_2(\Delta) = 8$ となり

$$f(\Delta) = (1, 6, 12, 8)$$

である．



Δ が凸多面体の境界から作られるものであったり，より一般に，球面と同相になっている場合，Δ の f 列は**Dehn–Sommerville等式**と呼ばれる良い対称性を持つことが古くから知られている．先ずはDehn–Sommerville等式について感覚を掴んでもらうため，2次元・3次元の場合を具体的に考えてみることにする．以下，d 次元球面 $\mathbb{S}^d$ と同相な単体的複体を**単体的 d 球面**と呼ぶことにする．

本研究は科研費 (課題番号:25400043) の助成を受けたものである。
* 〒565-0871 大阪府吹田市山田丘1–5
[1] 空集合 $\emptyset$ を Δ の (-1) 次元面と思うことで $f_{-1}(\Delta) = 1$ とする．f_{-1} は省いて書くことも多い．

2次元球面の場合. **Δが単体的2球面なら$f(\Delta)=(f_{-1}(\Delta),f_0(\Delta),f_1(\Delta),f_2(\Delta))$は頂点の個数$f_0(\Delta)$のみから決まる.** 実際, Δが$\mathbb{S}^2$と同相なら

- $f_0(\Delta)-f_1(\Delta)+f_2(\Delta)=2$
- $2f_1(\Delta)=3f_2(\Delta)$

が成り立つ. 一つ目の等式はオイラー等式, 二つ目の等式は各1次元面(辺)が丁度二つの2次元面(三角形)に含まれ, 各2次元面が丁度3つの一次元面を持つという事実から従う. 上の二つの等式を連立させると

$$f_1(\Delta)=3f_0(\Delta)-6,\ \ f_2(\Delta)=2f_0(\Delta)-4$$

となることがわかり, 次を得る

$$f(\Delta)=(1,f_0(\Delta),3f_0(\Delta)-6,2f_0(\Delta)-4).$$

3次元球面の場合. **Δが単体的3球面なら$f(\Delta)=(f_{-1}(\Delta),f_0(\Delta),f_1(\Delta),f_2(\Delta),f_3(\Delta))$は頂点の個数$f_0(\Delta)$と辺の個数$f_1(\Delta)$から決まる.** 実際, Δが$\mathbb{S}^3$と同相なら

- $f_0(\Delta)-f_1(\Delta)+f_2(\Delta)-f_3(\Delta)=0$
- $2f_2(\Delta)=4f_3(\Delta)$

が成り立つ. 一つ目の等式はオイラー等式, 二つ目の等式は各2次元面(三角形)が丁度二つの3次元面(四面体)に含まれ, 各3次元面が4つの2次元面を持つという事実から従う. 上の二つの等式を連立させると

$$f_2(\Delta)=2f_1(\Delta)-2f_0(\Delta),\ \ f_3(\Delta)=f_1(\Delta)-f_0(\Delta)$$

となることがわかり, 次を得る

$$f(\Delta)=(1,f_0(\Delta),f_1(\Delta),2f_1(\Delta)-2f_0(\Delta),f_1(\Delta)-f_0(\Delta)).$$

Dehn–Sommerville等式. 一般にΔが単体的d球面で$d\geq 2$であれば2つの等式$\sum_{i=0}^{d}(-1)^i f_i(\Delta)=1-(-1)^{d+1}$および$2f_{d-1}(\Delta)=(d+1)f_d(\Delta)$が成り立つことは明らかであろう. 実は次元が高い場合にはより多くの等式を作ることができ, それがDehn–Sommerville等式と呼ばれるものである.

定理 (Dehn–Sommerville等式) Δが単体的$(d-1)$球面なら

$$(-1)^{d-1}f_k(\Delta)=\sum_{j=k}^{d-1}(-1)^j\binom{j+1}{k+1}f_j(\Delta)\quad(k=-1,0,1,\dots,d-1). \tag{1}$$

上の定理に関する歴史的な経緯などは[Gr]を参照して欲しい. Dehn–Sommerville等式から『**d次元球面$\mathbb{S}^d$と同相な単体的複体Δのf列$f(\Delta)=(f_{-1}(\Delta),f_0(\Delta),\dots,f_d(\Delta))$は$f_0(\Delta),\dots,f_{\lfloor\frac{d-1}{2}\rfloor}(\Delta)$から決定する**』ことが示せる[2] ($\lfloor x\rfloor$は$x$を超えない最大の整数を表す). このことは$f$列を変形して得られる$h$列と呼ばれる数列を用いてDehn–Sommerville等式を書き直すと分かりやすい. 次にh列について述べる.

[2] 尚, $f(\Delta)$の決定には$\lfloor\frac{d+1}{2}\rfloor$個の情報$f_0(\Delta),\dots,f_{\lfloor\frac{d-1}{2}\rfloor}(\Delta)$が実際に必要で, これ以上減らすことはできない. [Gr, §9.2]を参照.

単体的複体の h 列. $(d-1)$ 次元単体的複体 Δ に対し, $h_0(\Delta), h_1(\Delta), \dots, h_d(\Delta)$ を

$$h_i(\Delta) = \sum_{j=0}^{i} (-1)^{i-j} \binom{d-j}{i-j} f_{j-1}(\Delta)$$

で定義する. 数列

$$h(\Delta) = (h_0(\Delta), h_1(\Delta), \dots, h_d(\Delta))$$

を Δ の h 列と呼ぶ. f 列を知ることと h 列を知ることは同値である. 実際, $f(\Delta)$ と $h(\Delta)$ の間には, t を変数として,

$$\sum_{i=0}^{d} h_i(\Delta) t^i = \sum_{i=0}^{d} f_{i-1}(\Delta)(t-1)^{d-i}$$

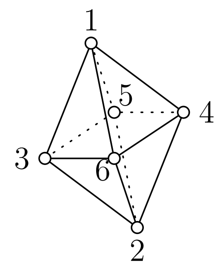
という関係式が成り立ち, t に $t+1$ を代入することで

$$f_{i-1}(\Delta) = \sum_{j=0}^{i} \binom{d-j}{i-j} h_j(\Delta)$$

となることがわかる.

例　先の例で見た八面体の場合

$$\begin{aligned} &f_{-1}(\Delta)t^3 + f_0(\Delta)t^2 + f_1(\Delta)t + f_2(\Delta) \\ &= t^3 + 6t^2 + 12t + 8 \\ &= (t+1)^3 + 3(t+1)^2 + 3(t+1) + 1 \end{aligned}$$



より

$$h(\Delta) = (1, 3, 3, 1).$$

h 列を用いると Dehn–Sommerville 等式を次の簡単な形に変形できる[3].

定理　(Dehn–Sommerville 等式 (h 列を用いた場合))　Δ が単体的 $(d-1)$ 球面なら

$$h_i(\Delta) = h_{d-i}(\Delta) \quad (i = 0, 1, \dots, d).$$

2. Dehn–Sommerville 等式と Goreinstein 性

この章では, Dehn–Sommerville 等式がスタンレー・ライスナー環の Gorenstein 性を用いて代数的に導くことができることを紹介する.

最初に Cohen–Macaulay 性や Gorenstein 性などに関する可換環の基本的な事項について述べる. 体 $\mathbb{K}$ 上の多項式環 $S = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ を考え, S に各変数の次数を 1 とする次数を入れる. $R = S/I$ を S を斉次イデアル $I \subset S$ で割ることで得られる商環とし, R の Krull 次元が d であるとする. d 個の定数でない斉次多項式の列 $\Theta = \theta_1, \dots, \theta_d \in S$ に対し, $\dim_{\mathbb{K}}(R/\Theta R)$ が有限次元ベクトル空間になるとき Θ を M の**斉次巴系 (homogeneous system of parameters)** と呼ぶ. 特に, 斉次巴系 Θ が一次式の列であるとき, Θ を線形

[3] (1) 式がそのまま $h_i = h_{d-i}$ の式になるわけではなく少し変形が必要である.

巴系 **(linear system of parameters)** と呼ぶ．線形巴系は $\mathbb{K}$ が無限体なら必ず存在する．斉次多項式の列 $f_1, \dots, f_k$ で, 全ての $i = 1, 2, \dots, k$ に対して f_i が $R/(f_1, \dots, f_{i-1})R$ の零因子でないものを R **正則列**という．R の任意の斉次巴系 $\Theta = \theta_1, \dots, \theta_d$ が R 正則列であるとき, 環 $R = S/I$ は **Cohen–Macaulay** であるという．以下 R_i で R の次数 i の斉次成分を表す．$R = \bigoplus_{i=0}^{s} R_i$ の Krull 次元が 0(即ち $\dim_{\mathbb{K}} R < \infty$) で, $R_s \cong \mathbb{K}$, かつ掛け算写像

$$R_i \times R_{s-i} \to R_s \cong \mathbb{K}$$

が全ての $i = 0, 1, \dots, s$ に対して非退化[4]であるとき R を (次数 s の) **ポアンカレ双対代数 (Poincaré duality algebra)** と呼ぶ．R がポアンカレ双対代数なら $R_i \cong R_{s-i}$ が成り立つことは直ぐにわかる．$R = S/I$ が Cohen–Macaulay で, R の任意の巴系 Θ について $R/\Theta R$ がポアンカレ双対代数になるとき, R は **Gorenstein** であるという．

次にスタンレー・ライスナー環について説明する．Δ を頂点集合を $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$ とする単体的複体とする．この時, イデアル $I_\Delta \subset S$ を

$$I_\Delta = (x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_k} : \{i_1, \dots, i_k\} \subset [n],\ \{i_1, \dots, i_k\} \notin \Delta) \subset S$$

で定義する．環 $\mathbb{K}[\Delta] = S/I_\Delta$ を (体 $\mathbb{K}$ 上の)Δ の**スタンレー・ライスナー環**と呼ぶ．

スタンレー・ライスナー環 $\mathbb{K}[\Delta]$ の代数的な情報は単体的複体 Δ の情報から読み取ることができることが多い．例えば, Δ が $(d-1)$ 次元である時, 環 $\mathbb{K}[\Delta]$ の Krull 次元は d となる ([St, II §1] 参照)．また, 単体的複体の h 列の情報は, スタンレー・ライスナー環のヒルベルト級数の情報として現れる．有限生成な次数付 S-加群 N に対し, 形式的冪級数

$$H_N(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (\dim_{\mathbb{K}} N_k) t^k$$

を N の**ヒルベルト級数**と呼ぶ．次が良く知られている ([St] 参照).

<u>定理</u>　Δ が $(d-1)$ 次元単体的複体なら

$$H_{\mathbb{K}[\Delta]}(t) = \frac{\sum_{i=0}^{d} h_i(\Delta) t^i}{(1-t)^d}.$$

上の定理からスタンレー・ライスナー環 $\mathbb{K}[\Delta]$ のヒルベルト級数を知ることと単体的複体 Δ の h 列を知ることが同値となる．特に, $\mathbb{K}[\Delta]$ が Cohen–Macaulay であるとき, 次が成り立つ ([St] 参照).

<u>定理</u>　Δ を $(d-1)$ 次元単体的複体とする．$\mathbb{K}[\Delta]$ が Cohen–Macaulay で Θ が $\mathbb{K}[\Delta]$ の線形巴系なら $H_{\mathbb{K}[\Delta]/\Theta\mathbb{K}[\Delta]}(t) = \sum_{i=0}^{d} h_i(\Delta) t^i$. 特に

$$\dim_{\mathbb{K}} (\mathbb{K}[\Delta]/\Theta\mathbb{K}[\Delta])_i = h_i(\Delta) \quad (i = 0, 1, 2, \dots, d).$$

上の定理から $\mathbb{K}[\Delta]$ が Cohen–Macaulay の場合には $h(\Delta)$ を環のヒルベルト級数として扱えることがわかる．さらに, $\mathbb{K}[\Delta]$ が Gorenstein であれば $\mathbb{K}[\Delta]/\Theta\mathbb{K}[\Delta]$ はポアンカレ双対代数になるので h 列に対称性があることも言える．スタンレー・ライスナー環がいつ Cohen–Macaulay になるかはよく分かっており, 次の判定法が知られている．単

[4] 即ち, 任意の $f \in R_i$ に対し fR_{s-i} が非零で, かつ任意の $g \in R_{s-i}$ に対し gR_i が非零.

体的複体 Δ に対し, $\tilde{H}_i(\Delta;\mathbb{K})$ を体 $\mathbb{K}$ を係数とする時の Δ の i 番目の被約ホモロジー群, $\tilde{\beta}_i(\Delta;\mathbb{K}) = \dim_{\mathbb{K}} \tilde{H}_i(\Delta;\mathbb{K})$ を i 番目のベッチ数とする. 単体的複体 Δ とその面 $F \in \Delta$ に対し,

$$\mathrm{lk}_{\Delta}(F) = \{G \setminus F : F \subset G \in \Delta\}$$

を Δ における F の **link** と呼ぶ ($F = \emptyset$ の時, $\mathrm{lk}_{\Delta}(F) = \Delta$ と思う).

<u>定理</u> **(Reisner の判定法)** Δ を d 次元単体的複体とするとき次は同値.

(1) $\mathbb{K}[\Delta]$ は Cohen–Macaulay.

(2) 任意の $F \in \Delta$ ($F = \emptyset$ の場合も含む) に対し, $\tilde{\beta}_i(\mathrm{lk}_{\Delta}(F);\mathbb{K})$ が $i \neq d - |F|$ の時に零.

スタンレー・ライスナー環がいつ Gorenstein になるかも判定法がある (詳しくは [St, II §5] 参照). ここでは少し特別な場合だけを考える. スタンレー・ライスナー環 $\mathbb{K}[\Delta]$ が Cohen–Macaulay であるとき, Δ は $\mathbb{K}$ 上 Cohen–Macaulay であると言うことにする. d 次元単体的複体 Δ が $\mathbb{K}$ 上 Cohen–Macaulay で, 任意の $F \in \Delta$ ($F = \emptyset$ の場合も含む) に対して $\tilde{H}_{d-|F|}H(\mathrm{lk}_{\Delta}(F);\mathbb{K}) \cong \mathbb{K}$ であるとき, Δ は $\mathbb{K}$ 上 **Gorenstein***であると言う[5]. 次が良く知られている ([St, II §5] 参照).

<u>定理</u> Δ を $(d-1)$ 次元単体的複体とする. Δ が $\mathbb{K}$ 上 Gorenstein* なら $\mathbb{K}[\Delta]$ は Gorenstein で, $\mathbb{K}[\Delta]$ の任意の線型巴系 Θ に対し $\mathbb{K}[\Delta]/\Theta\mathbb{K}[\Delta]$ は次数 d のポアンカレ双対代数となる.

$R = \bigoplus_{i=0}^{d} R_i$ が次数 d のポアンカレ双対代数であれば $R_i \cong R_{d-i}$ であるので上の定理から次のことが直ちにわかる.

<u>系</u> $(d-1)$ 次元単体的複体 Δ が Gorenstein* なら全ての $i = 0, 1, \ldots, d$ に対し $h_i(\Delta) = h_{d-i}(\Delta)$.

トポロジーに関する基本的な事実から単体的球面が Gorenstein* になることが直ぐにわかる. よって Dehn–Sommerville 等式は, 『Δ が $(d-1)$ 次元球面と同相な時, スタンレー・ライスナー環をその線形巴系で割って得られる環 $\mathbb{K}[\Delta]/\Theta\mathbb{K}[\Delta]$ がポアンカレ双対代数になる』という代数的な主張から直ちに導かれることになる.

例　先の例で考えた八面体の場合, スタンレー・ライスナー環は

$$\mathbb{K}[\Delta] = \mathbb{K}[x_1, x_2, \ldots, x_6]/(x_1x_2, x_3x_4, x_5x_6).$$

である. このとき $\mathbb{K}[\Delta]$ は Gorenstein, $x_1 - x_2, x_3 - x_4, x_5 - x_6$ は $\mathbb{K}[\Delta]$ の線形巴系で,

$$\mathbb{K}[\Delta]/((x_1 - x_2, x_3 - x_4, x_5 - x_6)\mathbb{K}[\Delta]) \cong \mathbb{K}[x_1, x_3, x_5]/(x_1^2, x_3^2, x_5^2)$$

である. 上の式に現れる環を R とすると, $R = R_0 \oplus R_1 \oplus R_2 \oplus R_3$ で, $\dim_{\mathbb{K}} R_0 = 1, \dim_{\mathbb{K}} R_1 = 3, \dim_{\mathbb{K}} R_2 = 3, \dim_{\mathbb{K}} R_3 = 1$ となる.

[5] 組合せ論では Gorenstein* の代わりにホモロジー球面という言葉を使うことが多い. この条件は Δ が球面と同じホモロジー群を持つ多様体と同相という条件とは異なる.

3. 多様体の三角形分割の面の個数の対称性

多様体 M と同相となる単体的複体を M の**三角形分割**と呼ぶ．実は Dehn–Sommerville 等式は閉多様体の三角形分割の場合に一般化できる．

例えば閉曲面の場合を考えてみよう．Δ が閉曲面 M の三角形分割であるなら, 球面の場合と同様に

- $f_0(\Delta) - f_1(\Delta) + f_2(\Delta) = \chi(M)$
- $3f_1(\Delta) = 2f_2(\Delta)$

が成り立つことがわかる．但し $\chi(M)$ は M のオイラー数を表すとする．上の 2 式から f_1, f_2 は f_0 のみを使って表せることがわかり, 結局

$$f(\Delta) = (1, f_0(\Delta), 3(f_0(\Delta) - \chi(M)), 2(f_0(\Delta) - \chi(M)))$$

となる．特に, **Δ が閉曲面 M の三角形分割の場合 $f(\Delta)$ は頂点数と M のオイラー数のみから決まる**ことがわかる．Dehn–Sommerville 等式は次の形で閉多様体の三角形分割の場合に一般化されることが Klee [Kl] により示されている．

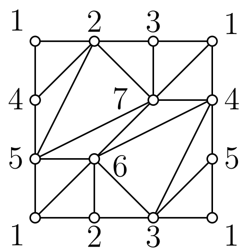
<u>定理</u>　**((閉多様体に対する)Dehn–Sommerville 等式 [Kl])** Δ が連結な $(d-1)$ 次元閉多様体 M の三角形分割なら

$$h_i(\Delta) = h_{d-i}(\Delta) + \binom{d}{i}(-1)^{d-i}(\chi(M) - \chi(\mathbb{S}^{d-1})) \quad (i = 0, 1, \ldots, d).$$

例　Δ を右ののトーラス $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ の 7 頂点三角形分割とすると

$$f(\Delta) = (1, 7, 21, 14),\ h(\Delta) = (1, 4, 10, -1)$$

である．$\chi(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1) - \chi(\mathbb{S}^2) = -2$ であり, $h_3(\Delta) = h_0(\Delta) - 2$, $h_2(\Delta) = h_1(\Delta) - 3 \times (-2)$ が成り立っていることがわかる．



Klee の Dehn–Sommerville 等式から, 球面の場合の事実の一般化として『**d 次元閉多様体と同相な単体的複体 Δ の f 列 $f(\Delta)$ は $f_0(\Delta), \ldots, f_{\lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor}(\Delta)$ と M の位相型から決定する**』ことがわかる．一方で, 補正項 $\chi(M) - \chi(\mathbb{S}^{d-1})$ の存在から, h 列は完全な左右対称にはならず, 多様体の場合の Dehn–Sommerville 等式が 2 章で見たようなポアンカレ双対性から帰結されるかは明快でない．この章と次の章で, 実際に多様体の場合の Dehn–Sommerville 等式が 2 章と同様の形で代数的に導けることを紹介する．

後々の為に, 多様体の三角形分割より少し広い単体的複体のクラスを考える．単体的複体 Δ のすべてのファセット (極大面) が同じ次元を持つとき, 単体的複体は**純**であるという．純な単体的複体 Δ で空集合でない任意の面 $F \in \Delta$ に対し $\mathrm{lk}_\Delta(F)$ が $\mathbb{K}$ 上 Gorenstein* となるものを**境界のない $\mathbb{K}$ ホモロジー多様体**と呼ぶ. Δ が境界のない連結な $\mathbb{K}$ ホモロジー多様体で, $\tilde{H}_{\dim \Delta}(\Delta; \mathbb{K}) \cong \mathbb{K}$ が成り立つとき, Δ は**向き付け可能**であるという[6]. 閉多様体の三角形分割は任意の体上で境界のないホモロジー多様体である[7].

---

[6] $\mathbb{K}$ の標数が 2 であればいつでも向き付け可能である.

[7] この場合向き付け可能性が考える体 $\mathbb{K}$ の標数に依存してしまうが, $\mathrm{char}(\mathbb{K}) \neq 2$ なら通常の向き付け可能性の概念と一致し $\mathrm{char}(\mathbb{K}) = 2$ ならいつでも向き付け可能になる.

先の例でみたように多様体の三角形分割のh列は完全な左右対称にはならないが, 次のh''列と呼ばれる数列を考えると状況を上手く改善できる. $(d-1)$次元単体的複体Δに対し, そのh''**-列**$h''(\Delta) = (h''_0(\Delta), h''_1(\Delta), \ldots, h''_d(\Delta))$を次で定義する[8] [9]

$$h''_i(\Delta) = \begin{cases} h_i(\Delta) - \binom{d}{i}\left(\sum_{j=1}^{i} \beta_{j-1}(\Delta;\mathbb{K})\right), & (i \neq d\text{の時}) \\ h_n(\Delta) - \binom{d}{i}\left(\sum_{j=1}^{d-1} \beta_{j-1}(\Delta;\mathbb{K})\right), & (i = d\text{の時}). \end{cases} \tag{2}$$

一見よくわからない定義だと思うが, h''列は先のDehn–Sommerville等式における補正項$\chi(\Delta) - \chi(\mathbb{S}^{d-1})$を上手く調整したものになっており, Dehn–Sommerville等式を次の形で書き直せることがNovik [No]により発見されている.

<u>定理</u>　**(Dehn–Sommerville等式(h''列を用いた場合))**　Δを境界のない$(d-1)$次元$\mathbb{K}$ホモロジー多様体とする. Δが連結で向き付け可能なら

$$h''_i(\Delta) = h''_{d-i}(\Delta) \quad (i = 0, 1, \ldots, d).$$

上の定理はこの章の最初に紹介した閉多様体に対するDehn–Sommerville等式を書き直したものになっている. 尚, 定理に向き付け可能の仮定がついているが, 多様体の三角形分割は向き付け可能な$(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ホモロジー多様体であるので, 向き付け不可能な多様体に対しては$\mathbb{K}$の標数を2にして考えればよい.

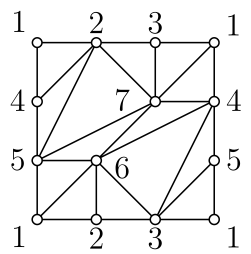
例　先のトーラス$\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$の7頂点三角形分割の場合

$$h(\Delta) = (1, 4, 10, -1)$$

であった. $\beta_1(\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1) = 2$であるから

$$h''(\Delta) = h(\Delta) - 2(0, 0, 3, -1) = (1, 4, 4, 1)$$

となり, 実際に左右対称な数列が出て来ることがわかる.



4. 多様体の三角形分割の代数的な対称性

単体的複体ΔがCohen–MacaulayになるとReisnerの判定法より全ての$i < \dim\Delta$に対し$\beta_i(\Delta) = 0$となるから, ホモロジー球面でない閉多様体の三角形分割はCohen–Macaulayでなく, 多様体の三角形分割を調べる際に2章で紹介したCohen–Macaulay環の理論を用いることはできない. しかし, 多様体の三角形分割のスタンレー・ライスナー環はBuchsbaum性と呼ばれる良い性質を持つ.

Iを斉次イデアル, $R = S/I$のKrull次元がdであるとする. $\mathfrak{m} = (x_1, \ldots, x_n)$を$S$の極大イデアルとする. Rの任意の斉次巴系$\Theta = \theta_1, \ldots, \theta_d$が全ての$i = 1, 2, \ldots, d$に対し

$$(\theta_1, \ldots, \theta_{i-1})R :_R (\theta_i) = (\theta_1, \ldots, \theta_{i-1})\, R :_R \mathfrak{m}$$

を満たすとき, Rは**Buchsbaum**であるという. 但し, S加群$N' \subset N$とイデアルIに対し$N' :_N I = \{g \in N : \text{任意の}f \in I\text{に対し}fg \in N'\}$である. $\mathbb{K}[\Delta]$がBuchsbaumである時, Δは$\mathbb{K}$上Buchsbaumであるということにする. 次の定理が知られており, Buchsbaumな単体的複体はlinkが全てCohen-Macaulayとなる純な単体的複体である[10].

---

[8] h'列と呼ばれるものもある. $h'_i = h''_i + \binom{d}{i}\beta_{i-1}$ $(i \neq d)$, $h'_d = h''_d$で定義される.
[9] 厳密にいうと$h''(\Delta)$は考える体の標数に依存するが, ここでは体の情報は省略することとする.
[10] 実際には頂点に関するlinkだけ考えればよい.

定理 **([Sc, Mi])** 次は同値

(1) $\mathbb{K}[\Delta]$ は Buchsbaum.

(2) Δ が純で, 空集合でない任意の面 $F \in \Delta$ に対し $\mathrm{lk}_\Delta(F)$ が $\mathbb{K}$ 上 Cohen–Macaulay.

境界のない $\mathbb{K}$ ホモロジー多様体の場合, その link は Cohen–Macaulay どころか Gorenstein*になるので, $\mathbb{K}$ ホモロジー多様体は $\mathbb{K}$ 上 Buchsbaum である.
ブックスバウム環に対して次のようなイデアルが 1980 年代に後藤 [Go] により考案されている. $I \subset S$ を斉次イデアルとし, $R = S/I$ の Krull 次元が d であるとする. R の線形巴系 $\Theta = \theta_1, \dots, \theta_d$ に対し, R のイデアル $\Sigma(\Theta; R)$ を次で定義する[11]

$$\Sigma(\Theta; R) = \Theta R + \sum_{i=1}^{d} (\theta_1, \dots, \hat{\theta}_i, \dots, \theta_d) R :_R \theta_i.$$

よくわからない定義だと思うが, 実は Cohen–Macaulay の場合に $\mathbb{K}[\Delta]/(\Theta\mathbb{K}[\Delta])$ を考えていた所を, $\mathbb{K}[\Delta]/\Sigma(\Theta; \mathbb{K}[\Delta])$ に変えれば話が上手くいく, というのが最近分かったことである.

定理 **([Go, NS1, MNY])** Δ を $(d-1)$ 次元単体的複体, $\Theta = \theta_1, \dots, \theta_d$ を $\mathbb{K}[\Delta]$ の線形巴系とする. $\mathbb{K}[\Delta]$ が Buchsbaum なら

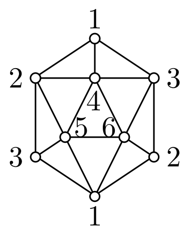
$$H_{\mathbb{K}[\Delta]/\Sigma(\Theta;\mathbb{K}[\Delta])}(t) = \sum_{i=0}^{d} h''_i(\Delta) t^i$$

であり, 特に, 任意の $i = 0, 1, 2, \dots, d$ に対し $\dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}[\Delta]/\Sigma(\Theta; \mathbb{K}[\Delta]))_i = h''_i(\Delta)$.

定理 **(閉多様体のスタンレー・ライスナー環のポアンカレ双対性 [NS2, MNY])** Δ を $(d-1)$ 次元 $\mathbb{K}$ ホモロジー多様体とする. Δ が連結で向き付け可能なら $\mathbb{K}[\Delta]/\Sigma(\Theta; \mathbb{K}[\Delta])$ は次数 d のポアンカレ双対代数.

上の二つの定理から, 球面の場合と同様, 閉多様体に対する Dehn–Sommerville 等式は環 $\mathbb{K}[\Delta]/\Sigma(\Theta; \mathbb{K}[\Delta])$ のポアンカレ双対性という代数的な性質から導かれることがわかるのである.

例　最後に具体例を一つ挙げておく. $\mathbb{K} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ とし, Δ を右の射影平面 $\mathbb{R}P^2$ の 6 頂点三角形分割とする. この時



$$I_\Delta = \begin{pmatrix} x_1x_2x_3, x_1x_2x_5, x_1x_3x_6, x_1x_4x_5, x_1x_4x_6 \\ x_2x_3x_4, x_2x_4x_6, x_2x_5x_6, x_3x_4x_5, x_3x_5x_6 \end{pmatrix}$$

であり,

$$\Theta = (x_1 + x_3 + x_5, x_2 + x_3 + x_5, x_4 + x_5 + x_6)$$

は $\mathbb{K}[\Delta]$ の線形巴系. $\Sigma(\Theta, R)$ は I_Δ と Θ に加え, 次の三つの元を生成元に持つ

$$X = \left\{ \begin{array}{l} x_1x_3 + x_2x_5 + x_3x_5 + x_1x_6 + x_3x_6 + x_5x_6, \\ x_1x_4 + x_3x_5 + x_1x_6 + x_3x_6 + x_5x_6, \\ x_2x_4 + x_2x_5 + x_3x_5 + x_2x_6 + x_3x_6 + x_4x_6 + x_5x_6 \end{array} \right\}.$$

[11] “$\Theta R+$” の所は $d \geq 2$ の時は不要.

$\mathbb{K}[\Delta]/(\Sigma(\Theta;\mathbb{K}[\Delta])$ は不要な変数を消すと

$$\mathbb{K}[x_1,\ldots,x_6]/(I_\Delta+(\Theta)+(X)) \cong \mathbb{K}[x,y,z]/(x^2+xy+yz, y^2+xz+yz, z^2+xy+xz)$$

という代数になる.

<u>補足</u>　最後に紹介した二つの定理は, ここで書いた形で書けることを発見したのは[MNY]においてであるが, 本質的には[Go, NS1, NS2]で証明されていたことである. 一つ目の定理は（次数のついていない局所環の場合に) 本質的に [Go] で証明されている. また, [NS1] ではイデアル $\Sigma(\Theta;\mathbb{K}[\Delta])$ の形を特定せずに h'' 列が $\mathbb{K}[\Delta]$ を割った環のヒルベルト級数になることが示されており, その環がポアンカレ双対代数になることが[NS2]で示されている.

境界を持つ多様体の場合

本稿の最後に上で述べたことは境界を持つ多様体の場合にも拡張できることをごく簡単に紹介しておく. d 次元単体的複体 Δ が次の三条件 (i),(ii),(iii) を満たすとき, Δ を**(空でない) 境界を持つ $\mathbb{K}$ ホモロジー多様体**という: (i) Δ は $\mathbb{K}$ 上 Buchsbaum, (ii) 空集合でない全ての $F\in\Delta$ に対して $\tilde{\beta}_{d-|F|}(\mathrm{lk}_\Delta(F);\mathbb{K})$ が 0 または 1, (iii) $\partial\Delta=\{F\in\Delta : \tilde{\beta}_{d-|F|}(\mathrm{lk}_\Delta(F);\mathbb{K})=0\}$ が境界のない $(d-1)$ 次元 $\mathbb{K}$ ホモロジー多様体. Δ が空でない境界を持つ多様体 M の三角形分割なら Δ は境界を持つ $\mathbb{K}$ ホモロジー多様体で, $\partial\Delta$ は ∂M の三角形分割になる. Δ が境界を持つ連結な $\mathbb{K}$ ホモロジー多様体で, $H_{\dim\Delta}(\Delta,\partial\Delta)\cong\mathbb{K}$ が成り立つとき, Δ は向き付け可能であるという. 単体的複体のペア $\Gamma\subseteq\Delta$ に対し, $f_i(\Delta,\Gamma)$ を Δ に属するが Γ に属さない i 次元面の個数とし, $\beta_i(\Delta,\Gamma;\mathbb{K})=\dim_{\mathbb{K}}\tilde{H}_i(\Delta,\Gamma;\mathbb{K})$ とする. また, $h(\Delta,\Gamma), h''(\Delta,\Gamma)$ を通常の単体的複体の場合と同様に定義する. Dehn–Sommerville 等式は境界のある多様体の場合にも拡張できることが知られており, h'' 列を用いると次の形で書けることが [MN] で発見されている（詳しくは [MN] とそこにある参考文献を参照).

<u>定理</u>　**((境界を持つ多様体に対する)Dehn–Sommerville 等式)** Δ を境界を持つ $(d-1)$ 次元 $\mathbb{K}$ ホモロジー多様体とする. Δ が連結で向き付け可能なら

$$h''_i(\Delta)=h''_{d-i}(\Delta,\partial\Delta)\quad(i=0,1,\ldots,d).$$

　また, ペア $\Gamma\subseteq\Delta$ の**スタンレー・ライスナー加群** $\mathbb{K}[\Delta,\Gamma]$ を

$$\mathbb{K}[\Delta,\Gamma]=I_\Gamma/I_\Delta$$

で定義すると次が成り立つ.

<u>定理</u>　**([MNY])** Δ を境界を持つ $(d-1)$ 次元 $\mathbb{K}$ ホモロジー多様体, $R=\mathbb{K}[\Delta]$, $C=\mathbb{K}[\Delta,\partial\Delta]$, $\Theta=\theta_1,\ldots,\theta_n$ を R の線形な巴系とする. 次が成り立つ [12].

(1) $S_{(R/\Sigma(\Theta;R))}(t)=\sum_{k=0}^{d}h''_k(\Delta)t^k$.

(2) $S_{(C/\Sigma(\Theta;C))}(t)=\sum_{k=0}^{d}h''_k(\Delta,\partial\Delta)t^k$.

[12] $\Sigma(\Theta;C)$ は $\Sigma(\Theta;C)=\Theta C+\sum_{i=1}^{d}(\theta_1,\ldots,\hat{\theta}_i,\ldots,\theta_d)C:_C\theta_i$ で定義.

(3) Δ が連結で向き付可能なら, $(C/\Sigma(\Theta;C))_d \cong \mathbb{K}$ であり, 積写像[13]

$$(R/\Sigma(\Theta;R))_i \times (C/\Sigma(\Theta;C))_{d-i} \to (C/\Sigma(\Theta;C))_d$$

$(a,b) \to ab$, は非退化.

補足　最後の定理において C は R の canonical module であり, 定理の主張は Buchsbaum な次数付き $\mathbb{K}$ 代数 R とその canonical module C, R の線形巴系 Θ に対し, $R/\Sigma(\Theta;R)$ が $C/\Sigma(\Theta;C)$ の Matlis dual に同型になるという事実の特別な場合である.

参考文献

[Go] S. Goto, On the associated graded rings of parameter ideals in Buchsbaum rings, *J. Alg.* **85** (1983), 490–534.

[Gr] B. Grünbaum, Convex Polytopes, 2nd edn, Springer, New York, 2003.

[Kl] V. Klee, A combinatorial analogue of Poincaré's duality theorem, *Canad. J. Math.* **16** (1964), 517–531

[Mi] M. Miyazaki, Characterizations of Buchsbaum complexes, *Manuscr. Math.* **63** (1989), 245–254.

[MN] S. Murai and I. Novik, Face numbers of manifolds with boundary, *Int. Math. Res. Not.*, to appear, arXiv:1509.05115.

[MNY] S. Murai, I. Novik and K. Yoshida, A duality in Buchsbaum rings and triangulated manifolds, *Algebra and Number Theory* **11** (2017), 635–656.

[No] I. Novik, Upper bound theorems for homology manifolds, *Israel J. Math.* **108** (1998), 45–82.

[NS1] I. Novik and E. Swartz, Socles of Buchsbaum modules, complexes and posets, *Adv. Math.* **222** (2009), 2059–2084.

[NS2] I. Novik and E. Swartz, Gorenstein rings through face rings of manifolds, *Compos. Math.* **145** (2009), 993–1000.

[Sc] P. Schenzel, On the number of faces of simplicial complexes and the purity of Frobenius, *Math. Z.* **178** (1981), 125–142.

[St] R.P. Stanley, Combinatorics and commutative algebra, Second edition, Progr. Math., vol. 41, Birkhäuser, Boston, 1996.

[13] $(C/\Sigma(\Theta;C))$ は $R/\Sigma(\Theta;R)$-加群になり積写像は自然に定義される.