

Quantized Coulomb branches of Jordan quiver gauge theories and cyclotomic rational Cherednik algebras

小寺 諒介 (京都大学 大学院理学研究科)

概要

Jordan 簍に付随する量子 Coulomb 枝と, cyclotomic rational Cherednik 代数の spherical 部分代数とが同型であるという [KN] の結果について紹介する.

1. イントロダクション

中島 [N2] は, 理論物理学で研究されていた 3次元ゲージ理論の Coulomb 枝の数学的な定義を提唱した. その提唱に基づき, Braverman-Finkelberg-中島 [BFN1] は特別な場合 (cotangent type) に Coulomb 枝のアフィン代数多様体としての定義を与えた. 講演者は中島啓氏との共同研究 [KN] で, Jordan 簍に付随する場合に Coulomb 枝の量子化と cyclotomic rational Cherednik 代数の spherical 部分代数との間の代数の同型を構成した.

[BFN1] による Coulomb 枝とその量子化の構成は, 表現論でよく使われる convolution 代数の手法を用いる. そこで本稿では, 第2節で convolution 代数による Weyl 群の群環の構成についてまず思い出し, 第3節で Coulomb 枝の構成を説明する. [KN] の主結果については第4節で述べる. 最後の第5節では, 量子 Coulomb 枝とヤングアン $Y(\widehat{\mathfrak{gl}}_1)$ との関係について述べる.

2. Springer 表現

$G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ とし, $B = \{ \text{可逆な上三角行列} \}$ をその Borel 部分群とする. $\mathfrak{g}$ と $\mathfrak{b}$ でそれらの Lie 代数を表す. すなわち

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}) = \mathrm{End}(\mathbb{C}^n) \supset \mathfrak{b} = \{ \text{上三角行列} \}$$

とする. 旗多様体 G/B の余接束 $T^*(G/B)$ は, B 加群 $(\mathfrak{g}/\mathfrak{b})^*$ から誘導される G/B 上のベクトル束

$$G \times^B (\mathfrak{g}/\mathfrak{b})^* = G \times (\mathfrak{g}/\mathfrak{b})^* / (g, x) \sim (gb, b^{-1}x) \quad (b \in B)$$

と同一視される. trace 形式によって G 加群としての同型 $\mathfrak{g}^* \cong \mathfrak{g}$ を固定すると, この同型によって $(\mathfrak{g}/\mathfrak{b})^*$ は

$$\mathfrak{n} = [\mathfrak{b}, \mathfrak{b}] = \{ \text{冪零な上三角行列} \}$$

と同一視される. $T^*(G/B)$ への G 作用に関するモーメント写像と $\mathfrak{g}^* \xrightarrow{\cong} \mathfrak{g}$ との合成

$$T^*(G/B) \rightarrow \mathfrak{g}^* \xrightarrow{\cong} \mathfrak{g}$$

は

$$G \times^B \mathfrak{n} \rightarrow \mathfrak{g}, \quad [g, x] \mapsto gxg^{-1}$$

と同一視され, その像は冪零行列全体のなす代数多様体 $\mathcal{N}$ と一致する. 写像 $T^*(G/B) \cong G \times^B \mathfrak{n} \rightarrow \mathcal{N}$ は Springer resolution と呼ばれ, 表現論において重要な役割を果たす. 以

下では Springer resolution と Weyl 群（この場合は n 次対称群 $\mathfrak{S}_n$ ）の表現論との関係について述べる。

ファイバー積

$$Z = T^*(G/B) \times_{\mathcal{N}} T^*(G/B)$$

を Steinberg 多様体と呼ぶ。

定理 2.1 (Ginzburg). (1) $\mathbb{C}$ 係数 Borel-Moore ホモロジー群 $H_*(Z)$ には積が定義され、結合的 $\mathbb{C}$ 代数になる。

(2) 最高次の部分 $H_{\text{top}}(Z) = H_{2 \dim_{\mathbb{C}} Z}(Z)$ は $H_*(Z)$ の部分代数。

(3) $\mathbb{C}$ 代数として

$$H_{\text{top}}(Z) \cong \mathbb{C}\mathfrak{S}_n$$

である。

定理内の用語についていくつか説明をする。まず、Borel-Moore ホモロジー群とは、通常の特異ホモロジー群を定義する際のチェイン（特異単体の有限和）を局所有限なチェインに置き換えて定義されるもので、コンパクトでもスムーズでもない空間を扱う場合にしばしば使われる。次に、 $H_*(Z)$ の積について述べる。 $M = T^*(G/B)$ とし、

$$p_{ij}: M \times M \times M \rightarrow M \times M$$

を (i, j) 成分への射影とする。 $\alpha, \beta \in H_*(Z)$ に対して

$$\alpha * \beta = p_{13*}(p_{12}^* \alpha \cap p_{23}^* \beta)$$

と定義し、convolution 積と呼ぶ。この構成はもっと一般の状況にも適用できる。

こうして定義された convolution 積は、関数に対して定義されるいわゆる convolution 積の類似になっている。古典的には、群とその部分群のペアから定まる convolution 代数を Hecke 代数と呼ぶが、 $H_*(Z)$ はその類似物である。古典的な意味での convolution 代数の例を二つ挙げる。例 2.2 はこの節での構成と類似点があり、例 2.3 は次の節での構成と類似点がある。

例 2.2 (岩堀-Hecke 代数). $G = \text{GL}_n(\mathbb{F}_q) \supset B = \{\text{可逆な上三角行列}\}$ とすると、 G 上の両側 B 不変関数のなす $\mathbb{C}$ ベクトル空間 $\mathbb{C}(B \backslash G/B)$ は

$$(f * g)(x) = \sum_{y \in G} f(y)g(y^{-1}x)$$

によって代数になり、岩堀-Hecke 代数と同型。

例 2.3 (佐武同型). $G = \text{GL}_n(\mathbb{Q}_p) \supset K = \text{GL}_n(\mathbb{Z}_p)$ とすると、 G 上のコンパクト台を持つ両側 K 不変関数のなす $\mathbb{C}$ ベクトル空間 $\mathbb{C}_{\text{cpt}}(K \backslash G/K)$ は

$$(f * g)(x) = \int_G f(y)g(y^{-1}x)dy$$

によって代数になり、 $\mathbb{C}[X_1^{\pm 1}, \dots, X_n^{\pm 1}]^{\mathfrak{S}_n}$ と同型。

定理 2.1 によれば $H_{\text{top}}(Z)$ は対称群 $\mathfrak{S}_n$ の群環と同型である。では「 $H_*(Z)$ 全体は何か？」という疑問が自然に生じるが、これに答えるには同変ホモロジー群を考えると見通しがよい。

G が $\mathbb{C}$ 上の代数多様体 X に作用するとき、 G 同変 Borel-Moore ホモロジー群 $H_*^G(X)$ が定義される（定義や詳しい性質は [N1] を参照せよ）。

定理 2.4. $\mathbb{C}$ 代数として

$$H_*^G(Z) \cong \mathbb{C}\mathfrak{S}_n \ltimes \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$$

である。

左辺 $H_*^G(Z)$ は 1 点の同変コホモロジー環 $H_G^*(\text{pt})$ 上の代数である。一方、右辺 $\mathbb{C}\mathfrak{S}_n \ltimes \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ は対称多項式環 $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]^{\mathfrak{S}_n}$ を部分代数として自然に含んでおり、定理 2.4 の同型は $H_G^*(\text{pt}) \cong \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]^{\mathfrak{S}_n}$ という同一視と整合的になっている。特に、定理 2.4 の同型を特殊化することで

$$H_*(Z) \cong \mathbb{C}\mathfrak{S}_n \ltimes \left(\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n] / \langle \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]_+^{\mathfrak{S}_n} \rangle \right)$$

という $\mathbb{C}$ 代数の同型を得る。

次に、 $T^*(G/B)$ のファイバー方向への $\mathbb{C}^\times$ 作用を加えて convolution 代数 $H_*^{G \times \mathbb{C}^\times}(Z)$ を考える。これは $H_{\mathbb{C}^\times}^*(\text{pt})$ 上の代数である。新しい $\mathbb{C}^\times$ 作用に関する同変パラメータを $\hbar$ で表す。つまり、1 点の同変コホモロジー環を $H_{\mathbb{C}^\times}^*(\text{pt}) \cong \mathbb{C}[\hbar]$ と同一視する。

定理 2.5 (Lusztig). $\mathbb{C}[\hbar]$ 代数として

$$H_*^{G \times \mathbb{C}^\times}(Z) \cong \text{退化アフィン Hecke 代数}$$

である。

ここで、右辺の退化アフィン Hecke 代数は $\mathbb{C}\mathfrak{S}_n \ltimes \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ をパラメータ $\hbar$ を加えて変形した代数である。より詳しく述べると、変形する前の関係式

$$s_i x_i = x_{i+1} s_i$$

を

$$s_i x_i = x_{i+1} s_i - \hbar$$

と変形したものになっている（ s_i は i と $i+1$ の置換）。

ここまでで述べたことをまとめると次のようになる。

- Springer resolution から定まる convolution 代数によって、興味深い代数を構成することができる。
- $\mathbb{C}^\times$ 作用に関する同変ホモロジー群を考えると、代数の変形が得られる。

この節の最後に、表現論への応用について述べる。Springer resolution $\mu: T^*(G/B) \rightarrow \mathcal{N}$ の各点でのファイバー $\mu^{-1}(x)$ を Springer ファイバーと呼ぶ。convolution 積と同様の構成により、 $H_*^{\text{Stab}_{G \times \mathbb{C}^\times}(x)}(\mu^{-1}(x))$ は $H_*^{G \times \mathbb{C}^\times}(Z)$ 加群となり、 $H_{\text{top}}(\mu^{-1}(x))$ は $H_{\text{top}}(Z)$ 加群となる。

応用 2.6 (Springer 対応). $H_{\text{top}}(\mu^{-1}(x))$ は $\mathfrak{S}_n$ 表現として既約で,

$$x \mapsto H_{\text{top}}(\mu^{-1}(x))$$

は全単射

$$G \backslash \mathcal{N} \xrightarrow{\cong} \{\mathfrak{S}_n \text{ の既約表現の同型類} \}$$

を与える. この集合は n の分割と 1 対 1 に対応する.

応用 2.7. 退化アフィン Hecke 代数の既約表現の分類と次元公式が得られる.

3. Coulomb 枝

G を $\mathbb{C}$ 上の簡約代数群とし, $\mathbf{N}$ を G の $\mathbb{C}$ 上の有限次元表現とする. Braverman-Finkelberg-中島 [BFN1] に従い, $(G, \mathbf{N})$ のペアから可換 $\mathbb{C}$ 代数を構成する. なお, 本講演の主結果は $G = \text{GL}_n(\mathbb{C})$, $\mathbf{N} = \text{End}(\mathbb{C}^n) \oplus (\mathbb{C}^n)^{\oplus l}$ の場合に関するものである.

$\mathcal{K} = \mathbb{C}((z)) \supset \mathcal{O} = \mathbb{C}[[z]]$ とし,

$$\begin{aligned} G_{\mathcal{K}} &= G(\mathcal{K}) \supset G_{\mathcal{O}} = G(\mathcal{O}), \\ \mathbf{N}_{\mathcal{K}} &= \mathbf{N} \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{K} \supset \mathbf{N}_{\mathcal{O}} = \mathbf{N} \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O} \end{aligned}$$

とする. $\mathbf{Gr} = G_{\mathcal{K}}/G_{\mathcal{O}}$ は, アフィングラスマンと呼ばれる無限次元の旗多様体 (の一種) である. $G_{\mathcal{O}}$ 加群 $\mathbf{N}_{\mathcal{O}}$ から誘導される $\mathbf{Gr}$ 上の (無限階数の) ベクトル束を

$$\mathcal{T} = G_{\mathcal{K}} \times^{G_{\mathcal{O}}} \mathbf{N}_{\mathcal{O}}$$

とし, Springer resolution の類似として

$$\mathcal{T} = G_{\mathcal{K}} \times^{G_{\mathcal{O}}} \mathbf{N}_{\mathcal{O}} \rightarrow \mathbf{N}_{\mathcal{K}}, \quad [g, x] \mapsto gx$$

を考える. さらに

$$\mathcal{R} = \{[g, x] \in \mathcal{T} \mid gx \in \mathbf{N}_{\mathcal{O}}\}$$

とする.

Braverman-Finkelberg-中島 [BFN1] は $G_{\mathcal{O}}$ 同変 Borel-Moore ホモロジー群 $H_*^{G_{\mathcal{O}}}(\mathcal{R})$ を構成し, convolution 積を定義した. これにより $H_*^{G_{\mathcal{O}}}(\mathcal{R})$ は結合的 $\mathbb{C}$ 代数になる. 以下 $\mathcal{A} = H_*^{G_{\mathcal{O}}}(\mathcal{R})$ とする. [BFN1] はさらに次を示した.

定理 3.1 ([BFN1]). $\mathcal{A} = H_*^{G_{\mathcal{O}}}(\mathcal{R})$ は可換.

アフィンスキーム

$$\mathcal{M}_C = \text{Spec } \mathcal{A}$$

を $(G, \mathbf{N})$ に付随する Coulomb 枝と呼ぶ. [BFN1] では, $\mathcal{M}_C$ は既約なアフィン代数多様体であることが示されている.

Coulomb 枝は, 理論物理学 (ゲージ理論) で 20 年以上前から研究されていたものだが, [N2], [BFN1] で扱われるまで数学的な定義が存在しなかった. 物理的な背景は [N2], [N3] (日本語の解説), [N4] を参照せよ.

例 3.2. $G = \mathbb{C}^\times \curvearrowright \mathbb{C}^{\oplus l}$ (自然表現の直和) の場合.

$$\mathcal{A} = \mathbb{C}[x, y, w]/(xy = w^l)$$

となる. これは $l = 0$ のとき $\mathbb{C}^\times \times \mathbb{C}$ の座標環を与え, $l \geq 1$ のとき $\mathbb{C}^2/(\mathbb{Z}/l\mathbb{Z})$ (A_{l-1} 型単純特異点) の座標環を与える.

注意 3.3. この節の構成と前節の構成の関係について述べる. 前節の Steinberg 多様体の直接的な類似は $\mathcal{T} \times_{\mathbf{N}_K} \mathcal{T}$ であり, 上で導入した $\mathcal{R}$ とは

$$\mathcal{T} \times_{\mathbf{N}_K} \mathcal{T} \cong G_K \times^{G \circ} \mathcal{R}$$

という関係がある. [BFN1] は無限次元の空間のホモロジー群を扱う困難を避けるため $\mathcal{R}$ を使って convolution 代数を構成した ($\mathcal{R}$ も無限次元だが, 有限次元の空間の極限として扱うことができる). もし $H_*^{G_K}(\mathcal{T} \times_{\mathbf{N}_K} \mathcal{T})$ が然るべく定義されて同変ホモロジー群の誘導定理が成り立てば

$$H_*^{G_K}(\mathcal{T} \times_{\mathbf{N}_K} \mathcal{T}) \cong H_*^{G \circ}(\mathcal{R})$$

となるため, $\mathcal{A} = H_*^{G \circ}(\mathcal{R})$ は前節の convolution 代数のループ群での類似と見なせる.

Varagnolo-Vasserot [VV] は, アフィングラスマンではなくアフィン旗多様体を用いて, $\mathbf{N}$ が G の随伴表現の場合に convolution 代数を構成した (正確には同変ホモロジー群ではなく同変 K 群を使う). 結果として得られる代数はダブルアフィン Hecke 代数とその退化版である. Varagnolo-Vasserot の結果は, 前節で述べた退化アフィン Hecke 代数の幾何学的実現の直接的な類似になっている.

一般に $(G, \mathbf{N})$ が与えられたとき, 付随する Coulomb 枝 $\mathcal{M}_C$ を決定せよという問題はほとんどの場合が未解決である. しかし, 物理の研究によって $\mathcal{M}_C$ の候補がわかっているような重要な例については, 多くの場合にそれが正しいことがチェックされている.

特に, Jordan 箴に付随する場合, すなわち

$$G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}), \mathbf{N} = \mathrm{End}(\mathbb{C}^n) \oplus (\mathbb{C}^n)^{\oplus l} \quad (n \geq 1, l \geq 0)$$

の場合は次のように $\mathcal{M}_C$ が同定されている. $W = \mathfrak{S}_n \ltimes (\mathbb{Z}/l\mathbb{Z})^n$ を対称群 $\mathfrak{S}_n$ と巡回群 $\mathbb{Z}/l\mathbb{Z}$ の wreath 積とする. $\mathbb{Z}/l\mathbb{Z}$ は $\mathrm{SL}_2(\mathbb{C})$ の部分群と思うことで $\mathbb{C}^2$ に作用し, $\mathfrak{S}_n$ は $(\mathbb{C}^2)^n$ に成分の置換として作用する. これらの作用は W の $\mathbb{C}^{2n}$ への作用を定める.

定理 3.4 ([BFN2]). $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}), \mathbf{N} = \mathrm{End}(\mathbb{C}^n) \oplus (\mathbb{C}^n)^{\oplus l}$ のとき

$$\mathcal{M}_C \cong \begin{cases} (\mathbb{C}^\times \times \mathbb{C})^n / \mathfrak{S}_n & (l = 0 \text{ のとき}) \\ \mathbb{C}^{2n} / W & (l \geq 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

である.

定理 3.4 の設定で $n = 1$ とすると, $\mathrm{End}(\mathbb{C})$ の部分は自明表現となり寄与しない. 従ってそれは例 3.2 の状況となる.

ここで, Poisson 多様体の量子化について考える. M を $\mathbb{C}$ 上の Poisson アフィン代数多様体とする. つまり, M の座標環 $A = \mathbb{C}[M]$ が Poisson ブラケット $\{, \}_A$ を持つとする. このとき M の量子化とは $\mathbb{C}[\hbar]$ 上の非可換代数 $A_\hbar$ で次を満たすものである.

- $A_{\hbar}/\hbar A_{\hbar} \cong A$
- $\{, \}_A = \frac{1}{\hbar} [,]_{A_{\hbar}} \Big|_{\hbar=0}$

例 3.5. Weyl 代数 $\langle x, \hbar \frac{d}{dx} \rangle$ は $T^*\mathbb{C} \cong \mathbb{C}^2$ の量子化.

Coulomb 枝の話にもどる. $\mathcal{K} = \mathbb{C}((z))$ への $\mathbb{C}^\times$ 作用 $z \rightarrow tz$ ($t \in \mathbb{C}^\times$) を考えることで, $G_{\mathcal{O}}$ 同変で行った構成を $G_{\mathcal{O}} \rtimes \mathbb{C}^\times$ 同変に拡張することができる.

$$\mathcal{A}_{\hbar} = H_*^{G_{\mathcal{O}} \rtimes \mathbb{C}^\times}(\mathcal{R})$$

は convolution 積によって非可換な $\mathbb{C}[\hbar]$ 代数となる. $\mathcal{A} \cong \mathcal{A}_{\hbar}/\hbar \mathcal{A}_{\hbar}$ より, $\mathcal{A}$ には Poisson ブラケットが誘導され, 従って $\mathcal{A}_{\hbar}$ は Coulomb 枝 $\mathcal{M}_G = \text{Spec } \mathcal{A}$ の量子化を与える. $\mathcal{A}_{\hbar}$ を量子 Coulomb 枝と呼ぶ.

例 3.6. $G = \mathbb{C}^\times \curvearrowright \mathbb{C}^{\oplus l}$ (自然表現の直和) の場合.

$$\mathcal{A}_{\hbar} = \langle x, y, w \rangle$$

で関係式は

$$\begin{aligned} [x, w] &= \hbar x, \quad [y, w] = -\hbar y, \\ xy &= w^l, \quad yx = (w - \hbar)^l \end{aligned}$$

で与えられる.

4. rational Cherednik 代数

Etingof-Ginzburg [EG] に従い, $\mathbb{C}^{2n}/W$ の量子化を導入する. $l \geq 1$ とし, ζ を 1 の原始 l 乗根とする. $s_{ij} \in \mathfrak{S}_n$ を (i, j) の置換とし, $\zeta_i \in (\mathbb{Z}/l\mathbb{Z})^n$ を第 i 成分の生成元とする. $W = \mathfrak{S}_n \ltimes (\mathbb{Z}/l\mathbb{Z})^n$ の生成系として次に挙げるものがとれる.

$$\begin{aligned} s_{ij} \zeta_i^k \zeta_j^{-k} \quad & i, j = 1, 2, \dots, n \ (i \neq j), \ k = 0, 1, \dots, l-1, \\ \zeta_i^m \quad & i = 1, 2, \dots, n, \ m = 1, 2, \dots, l-1 \end{aligned}$$

W の $\mathbb{C}^n$ への作用を考えると, これらの元は複素鏡映, すなわち固定部分空間が余次元 1 の超平面を定めるような作用素である.

$$\mathbb{C}_{\text{reg}}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n \mid x_i \neq 0 \ (1 \leq i \leq n), \ x_i \neq \zeta^k x_j \ (i \neq j, \ 0 \leq k \leq l-1)\}$$

を各複素鏡映によって固定される超平面を除いた部分集合とし, $D(\mathbb{C}_{\text{reg}}^n)$ を $\mathbb{C}_{\text{reg}}^n$ 上の代数的な微分作用素のなす環とする. パラメータ $\hbar, c, c_1, \dots, c_{l-1}$ を導入し, Dunkl 作用素 $y_1, \dots, y_n \in D(\mathbb{C}_{\text{reg}}^n) \otimes \mathbb{C}[\hbar, c, c_1, \dots, c_{l-1}]$ を次で定義する.

$$y_i = -\hbar \frac{\partial}{\partial x_i} + c \sum_{j \neq i} \sum_{k=0}^{l-1} \frac{1}{x_i - \zeta^k x_j} (1 - s_{ij} \zeta_i^k \zeta_j^{-k}) + \sum_{m=1}^{l-1} \frac{c_m}{1 - \zeta^m} \frac{1}{x_i} (1 - \zeta_i^m)$$

$y_1, \dots, y_n$ は互いに可換であることが知られている.

定義 4.1 (cyclotomic rational Cherednik 代数). $l \geq 1$ とする.

$$W, x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$$

で生成される $\mathbb{C}W \ltimes D(\mathbb{C}_{\text{reg}}^n) \otimes \mathbb{C}[\hbar, c, c_1, \dots, c_{l-1}]$ の部分代数 $\mathbf{H}_{n,l}^{\text{cyc}}$ を cyclotomic rational Cherednik 代数と呼ぶ.

$e = \frac{1}{\#W} \sum_{g \in W} g \in \mathbb{C}W$ を W の自明表現に対応する冪等元とし, $\mathbf{SH}_{n,l}^{\text{cyc}} = e\mathbf{H}_{n,l}^{\text{cyc}}e$ を $\mathbf{H}_{n,l}^{\text{cyc}}$ の spherical 部分代数と呼ぶ.

注意 4.2. $l = 1$ のとき, $\mathbf{H}_{n,1}^{\text{cyc}}$ は Cherednik の導入したダブルアフィン Hecke 代数の rational な退化になっている. これが名前の由来である.

$l = 0$ の場合に対応するものとして, trigonometric Cherednik 代数 $\mathbf{H}_n^{\text{trig}}$ を導入する.

定義 4.3 (trigonometric Cherednik 代数). 次の生成元と関係式で定義される $\mathbb{C}[\hbar, c]$ 代数 $\mathbf{H}_n^{\text{trig}}$ を trigonometric Cherednik 代数と呼ぶ.

生成元: $s_1, \dots, s_{n-1}, X_1^{\pm 1}, \dots, X_n^{\pm 1}, w_1, \dots, w_n$

関係式:

$$\begin{aligned} X_i X_i^{-1} &= X_i^{-1} X_i = 1, [X_i, X_j] = 0, [w_i, w_j] = 0, \\ s_i^2 &= 1, s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1}, s_i s_j = s_j s_i \ (|i - j| > 1), \\ s_i X_i &= X_{i+1} s_i, s_i X_j = X_j s_i \ (j \neq i, i+1), \\ s_i w_i - w_{i+1} s_i &= -c, s_i w_j = w_j s_i \ (j \neq i, i+1), \\ [w_i, X_i] &= -\hbar X_i + c \left(\sum_{j < i} X_j s_{ji} + \sum_{i < j} X_i s_{ij} \right), [w_i, X_j] = \begin{cases} -c X_i s_{ij} & (i < j) \\ -c X_j s_{ji} & (j < i) \end{cases} \end{aligned}$$

$e = \frac{1}{\#\mathfrak{S}_n} \sum_{g \in \mathfrak{S}_n} g$ とし, $\mathbf{SH}_n^{\text{trig}} = e\mathbf{H}_n^{\text{trig}}e$ を $\mathbf{H}_n^{\text{trig}}$ の spherical 部分代数と呼ぶ.

$\mathbf{H}_{n,l}^{\text{cyc}}$ の場合と同様に, $\mathbf{H}_n^{\text{trig}}$ も Dunkl-Cherednik 作用素による定義が可能だが, ここでは割愛する. また, $\mathbb{C}[\hbar, c]$ 代数としての同型

$$\mathbf{H}_n^{\text{trig}} \cong \mathbf{H}_{n,1}^{\text{cyc}} \otimes_{\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]} \mathbb{C}[x_1^{\pm 1}, \dots, x_n^{\pm 1}]$$

が知られており, これを $\mathbf{H}_n^{\text{trig}}$ の定義と思ってもよい. $\mathbf{H}_n^{\text{trig}}$ はダブルアフィン Hecke 代数の trigonometric な退化になっている.

$\mathbf{SH}_n^{\text{trig}}$ および $\mathbf{SH}_{n,l}^{\text{cyc}}$ は, 定理 3.4 の右辺の量子化を与えることが知られている. すなわち

$$\begin{aligned} \mathbf{SH}_n^{\text{trig}}/(\hbar, c = 0) &\cong \mathbb{C}[(\mathbb{C}^\times \times \mathbb{C})^n]^{\mathfrak{S}_n} \\ \mathbf{SH}_{n,l}^{\text{cyc}}/(\hbar, c, c_1, \dots, c_{l-1} = 0) &\cong \mathbb{C}[\mathbb{C}^{2n}]^W \end{aligned}$$

が成り立つ. そこで, 次の問いを考えるのは自然である.

Jordan 簍に付随する量子 Coulomb 枝は $\mathbf{SH}_n^{\text{trig}}$, $\mathbf{SH}_{n,l}^{\text{cyc}}$ と同型か?

Jordan 箆に付随する場合には、以下のようにして量子クーロン枝にさらにパラメータを入れることができる。 $\mathbf{N} = \text{End}(\mathbb{C}^n) \oplus (\mathbb{C}^n)^{\oplus l}$ の各直和成分ごとに $\mathbb{C}^\times$ のスカラー作用を考えることで、 $\mathcal{R}$ には $(\mathbb{C}^\times)^{l+1}$ が作用する。この作用に関する同変パラメータを $c, z_1, \dots, z_l$ とする。この場合の量子 Coulomb 枝を、上で考えたトーラス作用まで加えて

$$\mathcal{A}_h = H_*^{Go \times \mathbb{C}^\times \times (\mathbb{C}^\times)^{l+1}}(\mathcal{R})$$

と改めて定義する。これは $\mathbb{C}[\hbar, c, z_1, \dots, z_l]$ 上の非可換代数である。次が本講演の主結果である。

定理 4.4 (小寺-中島 [KN]). $G = \text{GL}_n(\mathbb{C})$, $\mathbf{N} = \text{End}(\mathbb{C}^n) \oplus (\mathbb{C}^n)^{\oplus l}$ のとき

$$\mathcal{A}_h \cong \begin{cases} \mathbf{SH}_n^{\text{trig}} & (l = 0 \text{ のとき}) \\ \mathbf{SH}_{n,l}^{\text{cyc}} & (l \geq 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

であり、パラメータの対応は

$$z_k = -\frac{1}{l} \left((l-k)\hbar + \sum_{m=1}^{l-1} \frac{1-\zeta^{mk}}{1-\zeta^m} c_m \right)$$

で与えられる。

証明について述べる。[BFN1] では、同変ホモロジー群の局所化定理によって、 $\mathcal{A}_h$ を $\hbar$ 差分作用素のなす代数の部分代数として実現していた。さらに [BFN2] の Appendix において、この埋め込みでの $\mathcal{A}_h$ の像の生成元が計算されていた。そこで、[KN] では Cherednik 代数に対して同様の埋め込みを構成し、具体的な Poisson 生成元の像が [BFN2] で計算されていたものと一致することを示した。我々が構成した、差分作用素による $\mathbf{SH}_{n,l}^{\text{cyc}}$ の多項式表現は、これまでの文献にはなかったようである。また、代数のサイズを比較するのに定理 3.4 の可換な場合の同型を用いることを注意しておく。

5. 量子群との関係

[KN] では、Jordan 箆に付随する量子 Coulomb 枝 ($\cong$ spherical Cherednik 代数) と量子群との関係についても考察した。ここで現れる量子群は $\widehat{\mathfrak{gl}}_1$ に付随するヤンギアン $Y(\widehat{\mathfrak{gl}}_1)$ である。

ヤンギアン $Y(\widehat{\mathfrak{gl}}_1)$ は、Schiffmann-Vasserot [SV] によって $\mathbf{SH}_n^{\text{trig}}$ の $n \rightarrow \infty$ での極限として導入された。その後、Arbesfeld-Schiffmann [AS] によって生成元と関係式による表示が得られた。[KN] における定義では、 $Y(\widehat{\mathfrak{gl}}_1)$ は生成元 e_r, f_r ($r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$), $D_{0,m}$ ($m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$) を持つ $\mathbb{C}[\hbar, c, \omega]$ 上の代数である (定義関係式は省略する。[SV], [AS] のヤンギアンとの関係については注意 5.2 を見よ)。[KN] では、各 l ごとに e_r, f_{r+l} ($r \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$), $D_{0,m}$ ($m \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$) で生成される $Y(\widehat{\mathfrak{gl}}_1)$ の部分代数 Y_l を考え、さらにパラメータ $z_1, \dots, z_l$ を加えて変形した代数 $Y_l(z_1, \dots, z_l)$ を導入した。量子 Coulomb 枝との関係は次の通りである。

定理 5.1 ([KN]). パラメータ ω を $\omega = n$ とすると、代数の全射

$$Y_l(z_1, \dots, z_l) \rightarrow \mathcal{A}_h$$

が存在する。

ヤンギアンとは、元々は有限次元単純 Lie 代数に付随して定義される量子群である。可積分系の Yang-Baxter 方程式の Yang が名前の由来である（定義したのは Drinfeld）。近年になって、 $\widehat{\mathfrak{gl}}_1$ のようなアフィン Lie 代数に付随するヤンギアンが注目されており、有限型のヤンギアンと区別するためアフィンヤンギアンとも呼ばれる。

注意 5.2. 正確には、我々の $Y(\widehat{\mathfrak{gl}}_1)$ において $\hbar = -1$ とし、 $c = \kappa$, $e_r = D_{1,r}$, $f_r = D_{-1,r}$ と記号を変えることで、[SV], [AS] のヤンギアン $\mathbf{SH}^c$ においてパラメータ $\mathbf{c} = (\mathbf{c}_0, \mathbf{c}_1, \dots)$ を $\mathbf{c}_0 = 0$, $\mathbf{c}_i = -\kappa^i \omega^i$ ($i > 0$) に特殊化したもの（[SV] では $\mathbf{SH}$, [AS] では $\mathbf{SH}^\omega$ と書かれているもの）が得られる。

なお、Jordan 箴ではなく、ADE 型箴に付随する量子 Coulomb 枝を考えることもできる。この場合、[BFN2] の Appendix において、量子 Coulomb 枝が ADE 型の shifted ヤンギアンの商となることが、ある条件の下で示されている。

謝辞

本稿を書くにあたって、共同研究者である中島啓氏から有益なコメントをいただきました。この場を借りて感謝します。筆者は京都大学教育研究振興財団の後援および科研費（課題番号：26287004）のサポートを受けています。

参考文献

- [AS] Noah Arbesfeld and Olivier Schiffmann, *A presentation of the deformed $W_{1+\infty}$ algebra*, Symmetries, integrable systems and representations, Springer Proc. Math. Stat., vol. 40, Springer, Heidelberg, 2013, pp. 1–13.
- [BFN1] Alexander Braverman, Michael Finkelberg, and Hiraku Nakajima, *Towards a mathematical definition of Coulomb branches of 3-dimensional $\mathcal{N} = 4$ gauge theories, II*, arXiv:1601.03586.
- [BFN2] Alexander Braverman, Michael Finkelberg, and Hiraku Nakajima, *Coulomb branches of 3d $\mathcal{N} = 4$ quiver gauge theories and slices in the affine Grassmannian* (with appendices by A. Braverman, M. Finkelberg, J. Kamnitzer, R. Kodera, H. Nakajima, B. Webster, and A. Weekes), arXiv:1604.03625.
- [EG] Pavel Etingof and Victor Ginzburg, *Symplectic reflection algebras, Calogero-Moser space, and deformed Harish-Chandra homomorphism*, Invent. Math. **147** (2002), no. 2, 243–348.
- [KN] Ryosuke Kodera and Hiraku Nakajima, *Quantized Coulomb branches of Jordan quiver gauge theories and cyclotomic rational Cherednik algebras*, arXiv:1608.00875.
- [N1] Hiraku Nakajima, *More lectures on Hilbert schemes of points on surfaces*, Development of moduli theory—Kyoto 2013, Adv. Stud. Pure Math., vol. 69, Math. Soc. Japan, [Tokyo], 2016, pp. 173–205.
- [N2] Hiraku Nakajima, *Towards a mathematical definition of Coulomb branches of 3-dimensional $\mathcal{N} = 4$ gauge theories, I*, Adv. Theor. Math. Phys. **20** (2016), no. 3, 595–669.
- [N3] Hiraku Nakajima, *Introduction to a provisional mathematical definition of Coulomb branches of 3-dimensional $\mathcal{N} = 4$ gauge theories*, 第 61 回代数学シンポジウム報告集, arXiv:1612.09014.
- [N4] Hiraku Nakajima, *Introduction to a provisional mathematical definition of Coulomb branches of 3-dimensional $\mathcal{N} = 4$ gauge theories*, arXiv:1706.05154.

- [SV] Olivier Schiffmann and Eric Vasserot, *Cherednik algebras, W -algebras and the equivariant cohomology of the moduli space of instantons on $\mathbf{A}^2$* , Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. **118** (2013), 213–342.
- [VV] Michela Varagnolo and Eric Vasserot, *Double affine Hecke algebras and affine flag manifolds, I*, Affine flag manifolds and principal bundles, Trends Math., Birkhäuser/Springer Basel AG, Basel, 2010, pp. 233–289.