

Euler-Bernoulliの弾性曲線(elastica)とその一般化: 楕円関数の萌芽からアーベル関数論の再構築へ

Elastica of Euler-Bernoulli and its generalization:

from sprout of elliptic functions to reconstruction of Abelian function theory

松谷茂樹 (佐世保工業高等専門学校)*

概 要

Elastica is an ideal thin elastic rod. Jacob Bernoulli proposed the elastica problem 1691: to determine every shape of elastica in a plane mathematically. To solve the problem, Jacob, Daniel Bernoulli and Euler discovered mathematical facts related to the lemniscate integral, the elastic energy (the oldest harmonic map), variational method, elliptic integrals, the moduli of elliptic curves. Finally Euler completely solved the problem 1744.

As its generalization, I have been studying the statistical mechanics of elastica to find the shape of DNA. Mathematically it means to investigate the geometrical structure of the loop space with the energy. It turned out that the structure is determined by the modified KdV flows and hyperelliptic functions including their moduli.

However the hyperelliptic function theory is not sufficient to describe the generalized elastica problem whereas the shape of original elastica is completely described by elliptic function theory. Thus I have been also studying a reconstruction of the Abelian function theory for decades with coauthors.

In this talk, after I will show the history of elastica (including its relation to lemniscate) and its generalization, I mention the recent progress of the reconstruction of the Abelian function theory and its application to the generalization of elastica.

1. 導入

Jacob Bernoulli は 1791 年に懸垂曲線の次の問題として「平面上のピアノ線の形状を数学的に表現し、分類せよ」という弾性曲線(elastica)問題を提示した。これは、レオナルド・ダ・ヴィンチの梁のスケッチなどにもみられる、建造物の梁の形状の設計という応用科学的な課題端を発するものである [22]。

この Jacob から始まる弾性曲線(elastica)の研究は、Daniel Bernoulli, Euler に引き継がれ、終結する。その過程において、Jacob は Lemniscate 積分を発見し、Daniel は最小原理を発見した。Euler はそれに従い、変分法、楕円積分、楕円曲線の実モデュライの研究を行った。そして、数値計算により、平面上のピアノ線のすべての形状を楕円積分の求積により表現し、分類を完成させた [3]。

これらの研究は今なお栄光と輝きに満ちているが、残念ながら一般的にあまり知ら

This work was supported by KAKENHI (16K05187).

2000 Mathematics Subject Classification: 53A04, 74B99, 14H50, 14K25, 14H52, 14H40

キーワード: elastica, lemniscate curve, elliptic curve, hyperelliptic curve, MKdV flow, Jacobi inversion formula, Weierstrass normal form

* e-mail: smatsu@sasebo.ac.jp

web: <http://www.sasebo.ac.jp/~smatsu/>

れていない． Jacob の発見した Lemniscate 積分に関連する形状は， Lemniscate 曲線とある写像で写り合う． 楕円関数の発見の歴史においては， Lemniscate 積分や Gauss の Lemniscate 関数， Abel の楕円積分の逆関数としての認知が有名であるが， それらのすべての原型が elastica の研究にある． Hausel によると， Gauss は Euler の elastica の結果に導かれて彼の楕円関数論を構築したともある [6]．

つまり， elastica 論とは楕円関数論の故郷たるものなのである．

1995 年頃から筆者は Bernoulli-Euler の elastica の一般化の研究をしている [10]． 1980 年代後半より DNA の顕微鏡像が得られるようになり， DNA が超らせん構造という大域構造を持つことがわかった． 弱い弾性力に支配された曲線である DNA の形状は Bernoulli-Euler の elastica 論を援用し研究されてきた [23]． しかしながら， 3 次元効果を考慮してもその形状を再現しないことが判明した． そこで筆者は， Daniel Bernoulli の発見した最小原理による曲線の形状の決定という視点を離れて， 熱の効果を考慮に入れた「elastica の統計力学」として， その一般化の検討を開始した． これは数学的には， 実曲線の解析的はめ込み全体の幾何構造の研究に対応する． その幾何構造は変形 KdV 階層によって定まり， 超楕円曲線論で記述される [10, 14, 16]．

Euler らが elastica に導かれるように楕円関数論の原型を構築した経緯をそのままトレースする如く， 筆者は elastica の統計力学の問題の解決に向け， 超楕円関数論の研究を行ってきた． 実際， Euler の elastica は楕円関数論を無尽に利用することで， その性質を明確に記述できるが， それに対応する程， 超楕円関数論は構築できていない． 残念ながら応用という観点からは超楕円関数論や Abel 関数論は， 楕円関数論の完成度の域には達していない．

19 世紀においては Weierstrass, Klein, Baker らにより， 楕円関数論に肉薄する Abel 関数論が既に一部， 構築されていた． Weierstrass 自身によって， 楕円関数の σ 関数を超楕円関数に一般化したものが提案・研究され， 完成度も高いものであった． が， 20 世紀初頭に抽象化と厳密性を重視する流れの中で， その研究は途絶えることとなった．

しかしながら， Mumford は「Tata lectures of Theta II」 [17] において， 19 世紀のこれらの結果を現代代数幾何の視点から再評価し， 19 世紀の数学の具体性と 20 世紀の数学の厳密性・抽象性とを融合した． 筆者は Mumford グループに居た Previato 氏をはじめとして， 大西良博氏， 米田二良氏らと Mumford の研究方法に従った Abel 関数論の再構築に関する研究を行っている [7, 8, 15, 16, 20]． 中屋敷厚氏らにより同様の研究が行われている [18, 19]． 筆者はそれらの結果を基に Euler の elastica 問題の一般化した問題の解決に向けた研究を行っている [11, 14, 16]．

本講演では以下を報告する：

1. Bernoulli, Euler による elastica 論の構築を現代的な視点から概観し [9, 13]，
2. 彼らの elastica 論を超える試みである elastica の統計力学 [10]，
3. その解明に向けて発展している Abel 関数論の再構築 [8] と，
4. 3 による 2 の現状 [11, 14, 16]．

1.1. 記法と基本的な設定

N (N は $(0, 1)$ または S^1) の $\mathbb{C}$ への等長はめ込み全体

$$\mathcal{M}_N := \{Z : N \rightarrow \mathbb{C} \mid \text{解析的}, |\partial_s Z(s)| = 1 \text{ for every } s \in N\}, \quad \mathbb{M}_N := \mathcal{M} / \sim$$

とし、 N 上の K 値解析的 p -形式の集合を $\mathcal{A}_N^p(K)$ とする．但し $K = \mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$, $\mathbb{M}_N$ は Euclid 変換による商空間を表す, $\text{pr}_1 : \mathcal{M}_N \rightarrow \mathbb{M}_N$.

謝辞：本研究に関し，E. Previato 先生，大西良博先生，米田二良先生，大沢健夫先生，楫元先生，待田芳徳先生，織田孝幸先生，藤岡敦先生とは議論をさせて頂き，励ましを頂いた．感謝する．

2. Bernoulli-Euler の elastica

本節では，17, 18 世紀の elastica ($Z \in \mathcal{M}_{(0,1)}$ と記す) の研究を現代的に概観する．

2.1. Jacob の elastica と Lemniscate

Jacob Bernoulli は elastica に働く力が曲率 $k := \frac{1}{\sqrt{-1}} \frac{\partial_s^2 Z}{\partial_s Z}$ に比例する事実を発見し [22],

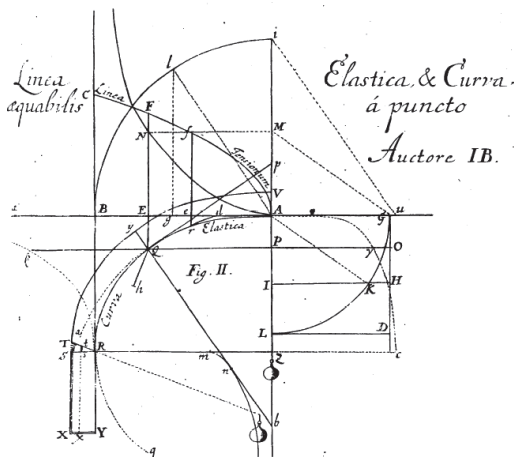


図 1 : Jacob Bernoulli 's 1692 Med. CLXX

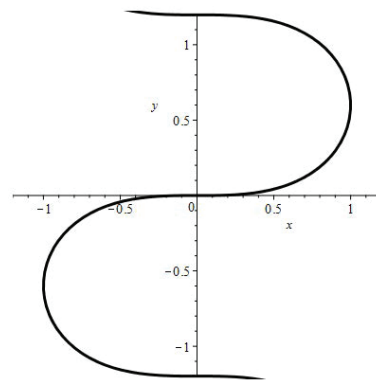


図 2 : Jacob の発見の曲線 (延長したもの)

この事実から幾何学的考察により，図 1,2 で実現する形状 $Z_L = X_L + \sqrt{-1}Y_L$ が

$$s = \int_0^{X_L} \frac{dX_L}{\sqrt{1-X_L^4}} \quad \text{と} \quad Y_L = \int_0^{X_L} \frac{X_L^2 dX_L}{\sqrt{1-X_L^4}}$$

となる事を見出した．この形状を固定する． Z_L の弧長は Lemniscate 積分で求まる．他方，elastica には 8 の字型の形状もあり (図 3)，Jacob は 8 の字型を意識したものと思われる．この形状 Z_L に対して

$$\sqrt{-1}\partial_s Z_L = e^{\sqrt{-1}\phi} \mapsto \sqrt{-1}\partial_s Z_\ell = e^{\sqrt{-1}3\phi/2}$$

とする写像を考えると， Z_ℓ はよく知られた 8 の字型の Lemniscate 形状となる．

Proposition 2.1 [9] Z_ℓ は Lemniscate 曲線となる．

証明： Jacob の得た形状は以下になる． ($\pm\sqrt{-1}$ は適切に決める)

$$\sqrt{-1}\partial_s Z_L ds = \frac{(\sqrt{-1}\sqrt{1-X_L^4} - X_L^2)dX}{\sqrt{1-X_L^4}} = \frac{(\sqrt{1-X_L^2} + \sqrt{-1}\sqrt{1+X_L^2})^2}{2} \frac{dX}{\sqrt{1-X_L^4}}.$$

これより $\sqrt{-1}\partial_s Z_\ell ds = \frac{(\sqrt{1-X_L^2} + \sqrt{-1}\sqrt{1+X_L^2})^3}{2\sqrt{2}} \frac{dX_L}{\sqrt{1-X_L^4}}$ となる．これは初等関

数により積分でき， $Z_\ell(t) := \int_0^t \partial_s Z_\ell ds(X_L)$ とすると

$$\sqrt{-1}Z_\ell(t) = -\frac{t\sqrt{1+t^2}}{\sqrt{2}} + \sqrt{-1}\frac{t\sqrt{1-t^2}}{\sqrt{2}} =: X_\ell(t) + \sqrt{-1}Y_\ell(t)$$

となる．このとき， X_ℓ, Y_ℓ は Lemniscate 曲線の方程式 $(X_\ell^2 - Y_\ell^2) = (X_\ell^2 + Y_\ell^2)^2$ を満たす．■

楕円関数の故郷としては Lemniscate があげられるが，その源流に elastica がある．Jacob は Lemniscate を上記の方法で発見したのかもしれない．

2.2. Daniel と Euler の elastica 問題とその解決

この問題を発端として，その後，Daniel Bernoulli は形状が汎関数 $\mathcal{E}[Z] := \frac{1}{2} \int k^2 ds$ を最小にしたものとして実現される事を発見した． Z から誘導される $g := dZ/ds : (0, 1) \rightarrow U(1)$ や Hodge 作用素 $*f(s)ds = f(s)$ ，Schwarz 微分 $\{Z, s\}_{SD} := \partial_s \frac{\partial^2 Z / \partial s^2}{\partial Z / \partial s} - \frac{1}{2} \frac{(\partial^2 Z / \partial s^2)^2}{(\partial Z / \partial s)^2}$ を援用すると， $\mathcal{E}[Z]$ は調和写像（下記，中辺）ともなり，Schwarz 微分の性質より

$$\mathcal{E}[Z] = \frac{1}{2} \int k^2 ds = \frac{1}{2} \int g^{-1} dg * g^{-1} dg = \int \{Z, s\}_{SD} ds$$

と $SL(2, \mathbb{C})$ の変換の不変性も判る．これらはこの問題の自然さを示している [16]．

Euler はこの問題の解決のために [3] において変分法を整備し，その付録で数値計算を援用して完全な問題解決に至った．

Theorem 2.2 [3] 解析的な等長はめ込み $Z = X + \sqrt{-1}Y \in \mathcal{M}_{(0,1)}$ が $\mathcal{E}[Z]$ を最小にするととき，弧長 s 及び Y は X をパラメータとして

$$s = \int^X \frac{a^2 dX}{\sqrt{a^4 - (\alpha + \beta X + \gamma X^2)^2}},$$

$$Y = \int^X \frac{(\alpha + \beta X + \gamma X^2) dX}{\sqrt{a^4 - (\alpha + \beta X + \gamma X^2)^2}}$$

と定まる．パラメータ $a, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ の形状に関わる部分空間は 1 次元であり，実現する elastica の形状は右図のように与えられる．但し，右図では直線，円，及び Jacob の elastica は省いている．

Remark 2.3 1. 図 3 では，1) X や Y が s の関数となっていること，2) そこに現れる周期性と擬周期性が見て取れること，3) 楕円モデュライ τ に依存して曲線が定まること，4) 分岐問題として $\mathbb{Z}_2$ の対称性の破れを取り扱っていること，5) (dX, dY) のペアはシンプレクティック構造を持っていることに注意する [13]．

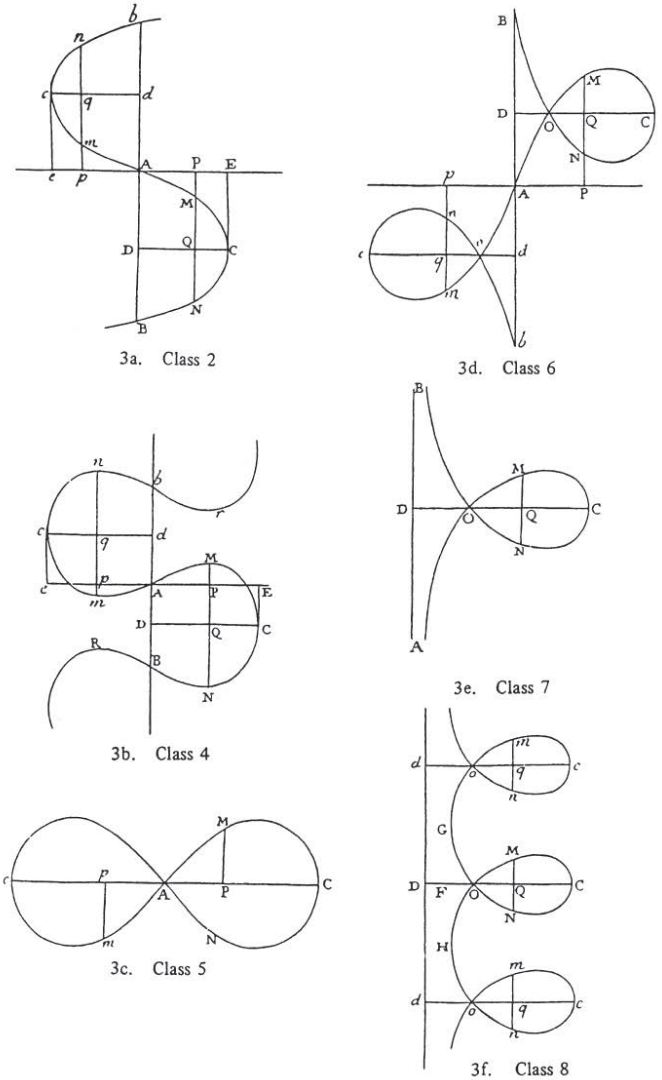


図 3 : Euler の数値計算結果 [3]

2. 歴史的には Euler の elastica の研究から影響を受け、Gauss が楕円関数の研究を始めたと言われていること [6]、この研究の前後に Euler はニュートン方程式を発見していることなどが重要である。

Euler の問題を現代的に整理すると次の定理となる：

Theorem 2.4 [13] 解析的な等長はめ込み $Z \in \mathcal{M}_{(0,1)}$ が $\mathcal{E}[Z]$ を最小にするとき Z は

$$Z(s) = \sqrt{-1}e^{\sqrt{-1}\alpha}(-\zeta(s+s_0) - e_1s) + Z_0$$

として与えられる。但し、1) $a \in \mathbb{R}$ に対して、 $e_1 = -a/6$, $e_i := a/12 + (-1)^i \sqrt{16 - a^2}/4$, ($i = 2, 3$), 2) $y^2 = 4 \prod_{i=1}^3 (x - e_i)$ とする楕円曲線、3) ζ は Weierstrass の楕円 ζ 関数、4) $s_0 = \omega''$ for $a \in [-4, 4]$, $= (\omega' + \omega'')/2$ otherwise, 5) $Z_0 \in \mathbb{C}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, 6) 楕円モデュライの点は $\tau \in \Gamma_0 := \sqrt{-1}\mathbb{R}_{>0} \cup (\sqrt{-1}\mathbb{R}_{>0} + 1/2)$ (このとき実性 $|\partial_s Z| = 1$ を満たす) とする。また、エネルギーは $\hat{\omega}$ を上記の周期とすると

$$\mathcal{E}[Z] = 8 \frac{\zeta(\hat{\omega})}{\hat{\omega}} + 2e_1$$

となる。(記法は Weierstrass 楕円関数論の慣習に従う。)

つまり、elastica の形状全体は $\mathcal{M}_{(0,1)}$ の部分空間として楕円曲線のモデュライ Γ_0 から定まる。(適当な商を考えれば Γ_0 と集合として同型になる。)

上記の証明のために、等長はめ込みに関して $Z \in \mathcal{M}_{(0,1)}$ に対して微小変形 $[0, \varepsilon) \rightarrow \mathcal{M}_{(0,1)}$, Z_t ($t \in [0, \varepsilon)$, $Z_0 = Z$), つまり解析的な埋め込みの芽を考え、上記の変分を考察する。より正確にはその一次成分である接空間 $T_Z(\mathcal{M})$ を考察する。陽に表現しないときは、記号の節約のため Z_t の $t = 0$ を再度 Z と記す。次の補題が重要である。

Lemma 2.5 $Z \in \mathcal{M}_{(0,1)}$ と $v \in \mathcal{A}_{(0,1)}^0(\mathbb{C})$ に対し、微小変形 Z_t を $t = 0$ で $\partial_t Z_t = v \partial_s Z_t$ とするとき、等長変形条件 $[\partial_t, \partial_s]Z_t = 0$ を満たすための必要十分条件は [5]:

$$\partial_t k = \Omega^{(\text{I})} v^{(\text{r})} = \Omega^{(\text{II})} v^{(\text{i})}, \quad (2.1)$$

$$k v^{(\text{i})} = \partial_s v^{(\text{r})}. \quad (2.2)$$

但し、 $k := k[Z_t]$, $v = v^{(\text{r})} + v^{(\text{i})}$, $\Omega^{(\text{I})} := \partial_s(\partial_s \frac{1}{k} \partial_s + k)$, $\Omega^{(\text{II})} := \partial_s^2 + \partial_s(k \partial_s^{-1} k)$.

Lemma 2.5 は交換式の実部と虚部を比較することで判る。

定理 2.4 の証明のスケッチ：[13] $Z^\varepsilon := Z + \varepsilon \partial_t Z$ を考えるとそのエネルギーは

$$\mathcal{E}[Z^\varepsilon] = \frac{1}{2} \int (k + \varepsilon \partial_t k)^2 ds = \frac{1}{2} \int (k^2 + 2\varepsilon k \partial_s (\partial_s \frac{1}{k} \partial_s + k) v^{(\text{r})}) ds + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$$

となり、Fréchet 微分により

$$-\frac{\delta \mathcal{E}}{\delta \varepsilon v^{(\text{r})}} = \partial_s(k^2) + 2\partial_s \frac{\partial_s^2 k}{k} = 0$$

となる。これらより

$$ak + \frac{1}{2}k^3 + \partial_s^2 k = 0$$

を得、楕円積分を経て、定理の Weierstrass の ζ 関数の記述に至る。楕円関数の加法定理により $X - X_0 \propto k$ となる対称性を得ることで、Euler の発見にも至る。■

3. Bernoulli-Euler の elastica の統計力学

3.1. DNA 形状の elastica について

観察より図4のようにDNAはらせん形状の微細構造だけではなく、より大きいスケールの弱い弾性力を持つ超らせん形状 (supercoil) を有する. 1980年代から Euler-Bernoulli の elastica の結果を援用した研究がなされていた [23]. しかし, Euler の elastica のリストにはその形状は存在せず, 3次元効果を考慮しても表現できない事が判っている.

諸々な要因が考えらるが, その一つとして DNA のサイズから熱の揺らぎの影響が考えられる. そこで温度 T に対して, ボルツマン重み関数 $\exp(-\mathcal{E}[Z]/Tds)$ により熱揺らぎを検討する [10].

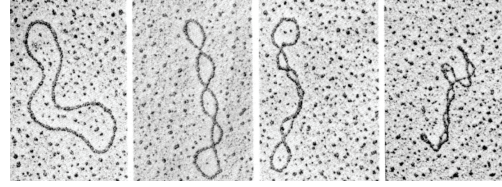


図4: DNA の超らせん形状の顕微鏡図

<http://www.udel.edu/chem/bahnsen/chem645/websites/Sapra/Supercoiling.html>

形式的には数理物理の分配関数

$$\mathcal{Z}[T] = \int_{\mathcal{M}_{S^1}} DZ \exp(-\oint k^2 ds/T)$$

を評価するということである. DZ は未定義の測度. elastica の統計力学の構築である. 上記の T と $\sqrt{-1}\hbar$ との対応より筆者は「量子化した elastica」とも呼んでいる.

しかし, $\mathcal{Z}[T]$ を定義するにはまず $\mathcal{M}_{S^1}$ を幾何学的に理解することが必須となる. モデュライ $\mathcal{M}_{S^1}$ の幾何構造を解明し, 調和写像 $\mathcal{E}[Z] = \oint k^2 ds$ や $e^{-\mathcal{E}[Z]/T}$ から定まる位相及びそれに随伴した σ 加法族や測度 DZ を導入することが本研究の目標となる.

3.2. モデュライ $\mathcal{M}_{S^1}$ の幾何構造

$\mathcal{M}_{S^1}$ の幾何構造を決定するために以下を行う [14, 16]:

1. 各点 $Z \in \mathcal{M}_{S^1}$ において, 接空間 $T_Z \mathcal{M}_{S^1}$ の幾何構造を観察する.
2. 接空間 $T_Z \mathcal{M}_{S^1}$ の情報から, $\mathcal{M}_{S^1}$ の構造を軌道などの解析により決定する.

そのために Lemma 2.5 を援用する.

3.3. 等長はめ込み変形の関係式 Lemma 2.5(2.2)

Lemma 2.5 の関係式 (2.2) を満たす空間を定めるため, 写像

$$\ell_d : \mathcal{A}_{S^1}^0(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{A}_{S^1}^1(\mathbb{R}), \quad \ell_d(v^{(i)}) = kv^{(i)} ds,$$

を考える [16]. $d\mathcal{A}_{S^1}^0(\mathbb{R}) \subset \mathcal{A}_{S^1}^1(\mathbb{R})$ の逆像を $\hat{\mathcal{A}}_{S^1}^0(\mathbb{R}) := \ell_d^{-1}d\mathcal{A}_{S^1}^0(\mathbb{R})$ とし, その制限写像

$$\hat{\ell}_d : \hat{\mathcal{A}}_{S^1}^0(\mathbb{R}) \rightarrow d\mathcal{A}_{S^1}^0(\mathbb{R}) \subset \mathcal{A}_{S^1}^1(\mathbb{R}), \quad \hat{\ell}_d(v^{(i)}) = kv^{(i)} ds = \partial_s v^{(r)} ds = dv^{(r)},$$

より $\hat{\mathcal{A}}_{S^1}^0(\mathbb{R})$ の各要素は関係式 (2.2) を満たす事が判る. 線型空間として $\hat{\mathcal{A}}_{S^1}^0(\mathbb{R}) \approx d\mathcal{A}_{S^1}^0(\mathbb{R}) \approx \mathcal{A}_{S^1}^0(\mathbb{R})/\mathbb{R}$. $\ell_r^0 : \hat{\mathcal{A}}_{S^1}^0(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{A}_{S^1}^0(\mathbb{R})$ を $\ell_r^0(v^{(i)}) = \int_0^s kv^{(i)} ds = \int_0^s \partial_s v^{(r)} ds$ とする. これらにより関係式 (2.2) を満たす $\mathcal{A}_{S^1}^0(\mathbb{C})$ の部分空間が定まる:

$$\ell : \hat{\mathcal{A}}_{S^1}^0(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{A}_{S^1}^0(\mathbb{C}), \quad \ell(f) = \ell_r^0(f) + \sqrt{-1}f.$$

よって, 次を得る (Brilinsky[2] によって類似の定理は既に得られている).

Proposition 3.1 [16] 任意の $\tilde{Z} \in \mathcal{M}_{S^1}$ に対して, $\hat{\mathcal{A}}_{S^1}^0(\mathbb{R}) \approx \mathcal{A}_{S^1}^0(\mathbb{R})/\mathbb{R}$ より, ℓ は全単射 $\ell^\sharp$ と全射 $\ell^\flat$ を誘導する :

$$\begin{array}{ccc} \hat{\mathcal{A}}_{S^1}^0(\mathbb{R}) & \xrightarrow{\ell^\sharp} & T_{\tilde{Z}}(\mathcal{M}_{S^1}) \\ & \searrow \ell^\flat & \downarrow \text{pr}_{1*} \\ & & T_{\text{pr}_1(\tilde{Z})}(\mathbb{M}) \end{array}$$

これらにより $T_{\tilde{Z}}(\mathcal{M}_{S^1})$ の構造が $\hat{\mathcal{A}}_{S^1}^0(\mathbb{R})$ によって定まる. 更により良い情報を得るためにエネルギー汎関数を利用する.

3.4. 等エネルギー変形

エネルギーを加味した分類を行うために, 非負 $E \in \mathbb{R}$ に対して

$$\mathcal{M}_E := \{Z \in \mathcal{M}_{S^1} \mid \mathcal{E}[Z] = E\}, \quad \mathbb{M}_E := \mathcal{M}_E / \sim,$$

を導入し, 自然な射影 $\text{pr}_E : \mathbb{M}_E \rightarrow \mathfrak{M}_E := \mathbb{M}_E / \text{U}(1)$ を考える. そのために, 上述の $T_Z \mathcal{M}_{S^1}$ の内, エネルギーを保存する成分である微小等エネルギー変形の部分空間を考察する. 弧長 s が変形に不変なため, $\partial_t \oint k^2 ds = 2 \oint k \partial_t k ds$ となることから次を得る.

Proposition 3.2 $Z \in \mathcal{M}_{S^1}$ に対し, 等長変形が等エネルギー変形 $\partial_t \mathcal{E}(Z) = 0$ となるための必要十分条件は $k \partial_t k ds \in d\mathcal{A}_{S^1}^0(\mathbb{R})$. 即ち, $\partial_t k \in \hat{\mathcal{A}}_{S^1}^0(\mathbb{R})$.

条件 $\partial_t k \in \hat{\mathcal{A}}_{S^1}^0(\mathbb{R})$ と Lemma 2.5 の関係式 (2.2) の類似性より次が言える [14, 16] :

Proposition 3.3 二つの等長変換 $v^{(i)}, v'^{(i)} \in \hat{\mathcal{A}}_{S^1}^0(\mathbb{R})$, $t, t' \in [0, \varepsilon)$

$$\begin{aligned} \partial_t Z &= (\ell(v^{(i)})) \partial_s Z \quad \text{or} \quad \partial_t k = \Omega^{(\text{II})} v^{(i)}, \\ \partial_{t'} Z &= (\ell(v'^{(i)})) \partial_s Z \quad \text{or} \quad \partial_{t'} k = \Omega^{(\text{II})} v'^{(i)}, \end{aligned}$$

が関係式 $v'^{(i)} = \partial_t k$ を満たすと, 次が成り立つ :

1. $\partial_t k \in \hat{\mathcal{A}}_{S^1}^0(\mathbb{R})$ より微小変形 $\partial_t Z$ は等エネルギー的, i.e., $(\partial_t \mathcal{E}[Z] = 0)$,
2. $\partial_{t'} k = \Omega^{(\text{II})} v'^{(i)} = \Omega^{(\text{II})^2} v^{(i)}$.

Proposition 3.4 $v^{(i)} \in \mathcal{A}_{S^1}^0(\mathbb{R})$ でかつ $\{\Omega^{(\text{II})^n} v^{(i)}\}_{n=0,1,2,\dots}$ の元すべてが $\hat{\mathcal{A}}_{S^1}^0(\mathbb{R})$ に属しているならば, パラメータ $(\tilde{w}_1, \tilde{w}_2, \dots) \in [0, \varepsilon)^\infty$, に対して, 以下の等長・等エネルギー微小変形の方程式列を得る :

$$\begin{aligned} \partial_{\tilde{w}_1} k &= \Omega^{(\text{II})} v^{(i)}, \\ \partial_{\tilde{w}_2} k &= \Omega^{(\text{II})} \partial_{\tilde{w}_1} k = \Omega^{(\text{II})^2} v^{(i)}, \\ \partial_{\tilde{w}_3} k &= \Omega^{(\text{II})} \partial_{\tilde{w}_2} k = \Omega^{(\text{II})^2} \partial_{\tilde{w}_1} k = \Omega^{(\text{II})^3} v^{(i)}, \\ &\vdots \end{aligned}$$

この命題により, 「よい」 $v^{(i)}$ を定めると $T\mathcal{M}_{S^1}$ の構造を理解できることを示唆している. そのため「よい」 $v^{(i)}$ として次の静的変形を考察する.

3.5. 静的変形（自明な変形）

Lemma 3.5 任意の実数 $c \in \mathbb{R}$ と $Z \in \mathcal{M}_E$ には自然な $U(1)$ 作用があり静的変形（自明な変形） $Z(s + ct)$, $(t \in \mathbb{R})$ を与える．これは以下の解である：

$$\partial_t Z = c \partial_s Z, \quad \partial_{t_1} k = \partial_s k.$$

ここで静的変形 $\partial_{t_1} k = \Omega^{(\text{II})^0} \partial_s k = \partial_s k$ は等長でかつ等エネルギー的であることに注意し， $\Omega^{(\text{II})^\ell} \partial_s k$ が $\widehat{\mathcal{A}}_{S^1}^0(\mathbb{R})$ の元となる事実 [14] より，次が得られる：

3.6. 変形 KdV 階層

Proposition 3.6 [14, 16] 各 $Z \in \mathcal{M}_{S^1}$ と曲率 $k := k[Z]$ に対し，静的変形 $\partial_{t_1} k = \partial_s k$ から始まる階層 $\{\Omega^{(\text{II})^n} \partial_s k\}_{n=0,1,2,\dots}$ の各元は $\widehat{\mathcal{A}}_{S^1}^0(\mathbb{R})$ に属し，等長・等エネルギー関係を満たす：

$$\begin{aligned} \partial_{t_2} k &= \Omega^{(\text{II})} \partial_{t_1} k = \Omega^{(\text{II})} \partial_s k, \\ \partial_{t_3} k &= \Omega^{(\text{II})} \partial_{t_2} k = \Omega^{(\text{II})^2} \partial_{t_1} k = \Omega^{(\text{II})^2} \partial_s k, \\ \partial_{t_4} k &= \Omega^{(\text{II})} \partial_{t_2} k = \Omega^{(\text{II})^2} \partial_{t_2} k = \Omega^{(\text{II})^3} \partial_s k, \\ &\vdots \end{aligned}$$

これは変形 KdV 階層に一致する [5, 10, 16].

Proposition 3.7 [14, 16] $\mathcal{M}_g := \{Z \in \mathcal{M}_{S^1} \mid \partial_{t_n} k = 0 \text{ for } n > g\}$ とすると， $\mathcal{M}_g$ は種数 g 以下の超楕円関数によって記述され，次の関係を得る：

1. $\mathcal{M}_{g-1} \subset \mathcal{M}_g$
2. 弱い位相により $\mathcal{M}_{S^1} = \bigcup_{g=0}^{\infty} \mathcal{M}_g$

MKdV 階層は可積分かつ初期値問題であることから，任意の $Z \in \mathcal{M}_{S^1}$ に対して，曲率 k が MKdV 階層に従う flow（並進対称群 $\mathbb{R}^g$ の $\mathcal{M}_g$ への作用）が定義できる．変形 KdV 階層は積分可能であるため，微小変形は積分でき $\mathcal{M}_{S^1}$ や $\mathbb{M}_{S^1}$ ， $\mathcal{M}_E$ や $\mathbb{M}_E$ ， $\mathfrak{M}_E$ などの分解を与える．

Remark 3.8 1. 変形 KdV 階層と KdV 階層との対応により， $S^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$ の問題と捉えられる [14, 21]. このとき上記枠組みは Poincare の保型関数の議論と類似したものとなり，Schwarz 微分が KdV 階層を満たす [14].

2. 以下述べる超楕円曲線のマデュライが単連結であることを利用すると，位相代数幾何で知られている S^2 上のループ空間 LS^2 のコホモロジー $H^p(LS^2, \mathbb{R})$ の構造 [1] を上記の $\mathcal{M}_p$ の構造から再現する射を構成できる [14].

3. S^2 のはめ込みを S^3 などに拡張できる [14]. その際，上記のコホモロジー $H^p(LS^n, \mathbb{R})$ が重要となると思われる [2].

4. $\mathcal{M}_{g^1}$ の構造と超楕円曲線

4.1. Abel 関数論の再構築

変形 KdV 階層は超楕円関数解を持つため、楕円積分によって Euler がなし得たように、原理的に $\mathcal{M}_{g^1}$ は超楕円曲線のモデュライや Jacobi 多様体により分類できる． 実際，簡単な考察から， $\mathbb{R}^g$ の作用は種数 g の超楕円曲線の Jacobi 多様体の「実部」に対応している事，それらの作用による軌道分解による $\mathcal{M}_g$ の各代表点は超楕円曲線の g 以下の種数のモデュライの点に対応する事などが判る [10, 14].

しかし，現在，超楕円関数などの Abel 関数は残念ながら楕円関数と同程度の具体性をもって扱うことができない．(特に実性や曲線の閉条件などが不明.) そこで『楕円関数が明示的な表現を持つことで「理論物理，整数論，工学」の発展に寄与したように，楕円関数と同レベルの具体性を持つ代数曲線上の Abel 関数論を再構築すること』を目指し，現在研究を行っている [3]. それより 19 世紀の具象的な数学と 20 世紀の抽象的な数学を融合させたいと考えている．

そのためのプロトタイプが Mumford の「Tata Lecture of Theta II」 [17] にある．

Mumford は 19 世紀の数学 (特に Jacobi の方法) を現代代数幾何の枠組みで捉え直すことで，非線型可積分偏微分方程式である KdV

方程式，Neumann 方程式，sine-Gordon 方程式等の超楕円曲線解の具体的構成を通し，楕円関数と同様の具体性を持つ超楕円関数論を構築する方法を提示した．これを Mumford Program と呼ぶ：

『超楕円曲線上の Abel 関数の応用に向け，以下の 3 つを繰り返す：

- (1): 超楕円曲線での Jacobi の逆公式の精緻化
- (2): 超楕円曲線での Abel 関数， θ 関数の代数構造及び微分構造の解明
- (3): (1),(2) の知見の非線型可積分方程式への適用，及び (1),(2) へのフィードバック』

Jacobi の逆公式とは曲線上の有理関数と Riemann θ 関数との関係を提示するものである． Mumford は UVW 表現というよい有理関数を θ 関数と結びつけることで，上述の非線型可積分方程式を解き，それらを通し 19 世紀の具象性と 20 世紀の抽象性を融合させた．

筆者らはこの Mumford Program の深化，深耕を目指し研究を行っている [4, 7, 8, 15]. 超楕円曲線を含めた一般の代数曲線へ拡張することで超楕円関数も含めた Abel 関数の理解を行う事を目標としている．

そこでは， θ 関数の代わりに Weierstrass, Klein が定義し，Baker らが研究した σ 関数に着目している． σ 関数の特徴はモデュラー不変である [20].

Abel 関数論の再構築は図 6 の左側の代数的な世界と，右側の超越関数の世界を結びつける具体的な射を明示的に構成することである． これにより左側の世界を右側から理解したり，右側の世界を左側の世界で理解することが，楕円関数と同様なレベルで可能となる．

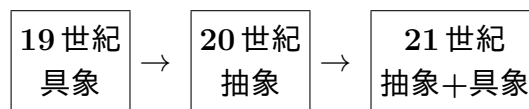


図 5

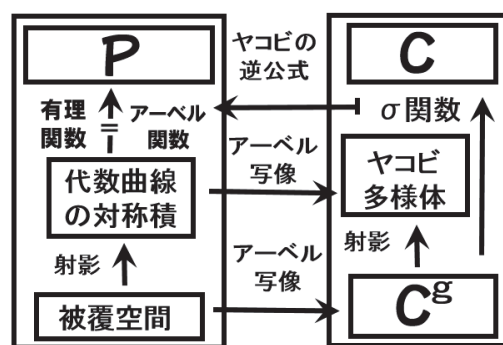


図 6

代数的な世界である左の世界から右側の世界である複素ベクトル空間や Jacobi 多様体へ Abel 写像があり、その逆向きの射が Jacobi の逆公式となる。

その代数曲線の Abel 被覆空間は積分経路の空間の Abel 化として現れるが、経路の取り方が被覆の仕方を定め、モデュラー変換に対応する。Abel 被覆空間から代数曲線へは自然な射影があり、代数曲線や有理関数は被覆の仕方に当然、依存しない。そのため、右の世界でも「モデュラー不変性」が重要となる。 σ 関数はその性質を有し、そのため、 σ によって実現された、Jacobi 多様体上の多重周期関数である Abel 関数は、代数曲線上の有理関数と同一視され、Jacobi の逆公式となる。

σ 関数のそのような性質のお陰で、Weierstrass が考察した代数曲線 (r, s は互いの素の正整数, $r < s$)

$$y^r + A_1(x)y^{r-1} + A_2(x)y^{r-2} + \cdots + A_{r-1}(x)y + A_r(x) = 0$$

(各 $A_i \in \mathbb{C}[x]$ で、次数は $\lfloor is/r \rfloor$ の次数となる) に関する Jacobi の逆公式は、曲線が特異でないときには既に得られている [18, 15]。また、特異曲線を正規化した非特異曲線に関しても研究が進んでいる。

これらは Weierstrass の楕円関数の σ 関数の自然な性質を受け継ぐものである。

4.2. 超楕円関数による一般化 elastica の形状

ここでは、上記の知見を利用して、超楕円関数による一般化 elastica の形状に関して述べる。そのために $\mathbb{C}$ 上のアフィン超楕円曲線 $\text{Spec} R$

$$R := \mathbb{C}[x, y]/(y^2 - \prod_{i=1}^{2g+1} (x - b_i)) = \mathbb{C}[x, y]/(y^2 - x^{2g+1} - \lambda_{2g}x^{2g} - \cdots - \lambda_1x - \lambda_0)$$

を考える。但し、 $b_i \in \mathbb{C}$, b_i は互いに異なる。古典的には複素閉リーマン面として $X := \{(x, y) \mid y^2 = \prod_{i=1}^{2g+1} (x - b_i)\} \cup \{\infty\}$ を対象としている。elastica 問題に適用する際には b_i には曲線の実性に対応する制限を受ける。

第一種、第二種微分を

$$\nu_i^I = \frac{x^{i-1}dx}{2y}, \quad \nu_i^{II} = \frac{1}{2y} \sum_{k=i}^{2g-i} (k+1-i) \lambda_{k+1+i} x^k dx,$$

とすることで、第一種、第二種完全積分を

$$\begin{aligned} \omega'_{ij} &:= \int_{\alpha_i} \nu_j^I, & \omega''_{ij} &:= \int_{\beta_i} \nu_j^I, & i, j &= 1, \dots, g, \\ \eta'_{ij} &:= \int_{\alpha_i} \nu_j^{II}, & \eta''_{ij} &:= \int_{\beta_i} \nu_j^{II}, & i, j &= 1, \dots, g, \end{aligned}$$

を得る。また、 α_i, β_j は標準的な $H_1(X, \mathbb{Z})$ を定める。 ($\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle = \langle \beta_i, \beta_j \rangle = 0$, $\langle \alpha_i, \beta_j \rangle = \delta_{ij}$) これにより Legendre 関係式

$$\omega' \eta'' - \omega'' \eta' = \frac{\pi}{2} \sqrt{-1} I_g$$

を得る。Hodge 構造が正規化された θ 関数の関数形を定めるように、Legendre 関係式 (Symplectic 構造) が以下で述べる σ 関数の関数形を定める。 α_i, β_j の選択による不定性に依らず σ 関数が定まることが重要なことである。

曲線 X の対称積 $S^g X$ により Abel 写像は

$$u := \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_g \end{pmatrix} : S^g X \longrightarrow \mathbb{C}^g, \quad \left(u_k((x_1, y_1), \dots, (x_g, y_g)) := \sum_{i=1}^g \int_{\infty}^{(x_i, y_i)} \frac{x^{k-1} dx}{2y} \right).$$

超楕円 Jacobi 多様体は

$$\mathcal{J}_g = \mathbb{C}^g / \Lambda, \quad \Lambda = \langle \omega', \omega'' \rangle_{\mathbb{Z}}.$$

となる. $\mathbb{T} = \omega'^{-1} \omega''$ とすることで θ 関数 ($a, b \in (\mathbb{Z}/2)^g$) は $\mathbb{C}^g$ 上の整関数として

$$\theta \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} (z; \mathbb{T}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^g} \exp \left[2\pi\sqrt{-1} \left\{ \frac{1}{2} {}^t(n+a)\mathbb{T}(n+a) + {}^t(n+a)(z+b) \right\} \right]$$

となる. Riemann 定数 $\delta, \delta' \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}^g$ を使い σ 関数は以下のように定まる:

$$\sigma(u) = \gamma_0 \exp \left\{ -\frac{1}{2} {}^t u \eta' \omega'^{-1} u \right\} \vartheta \begin{bmatrix} \delta'' \\ \delta' \end{bmatrix} \left(\frac{1}{2} \omega'^{-1} u; \mathbb{T} \right).$$

この時, 超楕円 $\wp$ 関数, ζ 関数, al 関数を

$$\wp_{ij} = -\frac{\partial^2}{\partial u_i \partial u_j} \log \sigma(u), \quad \zeta_i = \frac{\partial}{\partial u_i} \log \sigma(u)$$

$$\text{al}_r := \gamma'_0 \frac{e^{-\eta_r u} \sigma(u + \omega_r)}{\sigma(\omega_r) \sigma(u)} \left(= \sqrt{(b_r - x_1)(b_r - x_2) \cdots (b_r - x_g)} \right),$$

と定義する. 但し $\omega_r = \int_{\infty}^{b_r} \nu^I$. これらより, $\mathcal{M}_g$ の元 Z の形状は次で与えられる:

Theorem 4.1 [11, 14, 11, 12]

1) $|\text{al}_r(u_g)| = 1$, ($u_g \in \mathbb{R}$) となる超楕円曲線 X に対して, $s := u_g/r_0$ とし,

$$\partial_s Z(s) = \frac{e^{\sqrt{-1}\alpha}}{r_0} \text{al}_r(s)^2, \quad Z(s) = \frac{e^{\sqrt{-1}\alpha}}{r_0} \left(b_r^g s - \sum_{i=1}^g \zeta_i(s) b_r^{i-1} \right) - Z_0$$

とする. 閉条件 $Z(s) = Z(s + \hat{\omega})$ を満たすとき, $Z \in \mathcal{M}_g$ となる. 以下これを仮定する. 但し $r = 1, 2, \dots, 2g+1$, $\hat{\omega}$ は周期, $\alpha \in \mathbb{R}$, $Z_0 \in \mathbb{C}$ とする.

2) $\mathcal{J}_g^r := \{u \in \mathcal{J}_g \mid |\partial_s Z| = 1\}$ に対して $Z(u \in \mathcal{J}_g^r)$ は等エネルギーの軌道を与える.

3) エネルギーは適当な定数倍を除いて以下となる:

$$\oint_{\alpha_a} k^2 ds = \frac{1}{r_0} (-4\eta'_{ag} + 2(\lambda_{2g} + b_r) \omega'_{ag}).$$

4) $\mathcal{M}_E$ の体積 $\text{Vol}(\mathcal{M}_E)$ は Jacobi 多様体の実部分空間の体積の和として得られる.

4.3. 今後について

1. 今後は, σ に関する熱方程式を利用して超楕円曲線のモデュライの幾何を取り込んだ elastica の統計力学の研究を実施する.
2. 現在, $y^3 = (x-b)^2 \prod (x-b_i)$ の型の特異曲線での Jacobi の逆問題の研究を行っている [7, 8]. 一般の曲線での σ 関数の知見を基に elastica 問題を考察する.
3. Mumford の Program に従った Abel 関数の再構築に取り組んで行く [7, 8].

参考文献

- [1] R. Bott and L.W. Tu, *Differential Forms in Algebraic Topology*, Graduate Texts in Mathematics, 82. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1982.
- [2] J.-L. Brylinski, *Loop spaces, characteristic classes and geometric quantization*, Progress in Mathematics, 107. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1993.
- [3] L. Euler, *Methodus Inveniendi Lineas Curvas Maximi Minimive Proprietate Gaudentes*, 1744, Leonhardi Euleri Opera Omnia Ser. I vol. 14.
- [4] J.C. Eilbeck, V.Z. Enol'skii, S. Matsutani, Y. Ônishi, and E. Previato *Addition formulae over the Jacobian pre-image of hyperelliptic Wirtinger varieties*, *Crelle's Journal*, **2008** (2008) 37-48.
- [5] R.E. Goldstein and D.M. Petrich, *The Korteweg-de Vries hierarchy as dynamics of closed curves in the plane*, *Phys. Rev. Lett.* **67** (1991) 3203-3206.
- [6] C. Houzel, 「楕円関数と Abel 関数」, in デュドネ編, 数学史 II, 山下純一他訳, 岩波出版, 1985 年.
- [7] J. Komeda, S. Matsutani, and E. Previato, *The sigma function for Weierstrass semi-groups $\langle 3, 7, 8 \rangle$ and $\langle 6, 13, 14, 15, 16 \rangle$* , *Int. J. Math.* , **24** (2013) 1350085 (58).
- [8] J. Komeda, S. Matsutani and E. Previato, *The Riemann constant for a non-symmetric Weierstrass semigroup*, **107** (2016) 499-509.
- [9] S. Matsutani, *The Relation of Lemniscate and a Loop Soliton as $3/2$ and 1 Spin Fields along the Modified Korteweg-de Vries Equation*, *Mod. Phys. Lett. A*, **10** (1995) 717-721.
- [10] S. Matsutani, *Statistical Mechanics of Elastica on a plane: Origin of MKdV hierarchy*, *J. Phys. A*, **31** (1998) 2705-2725.
- [11] S. Matsutani, *Hyperelliptic loop solitons with genus g : investigation of a quantized elastica*, *J. Geom. Phys.*, **43** (2002) 146-162.
- [12] S. Matsutani, *Reality conditions of loop solitons genus g : hyperelliptic am functions*, *Electron. J. Diff. Eqns.*, **2007** (2007) 1-12.
- [13] S. Matsutani, *Euler's Elastica and Beyond*, *J. Geom. Symm. Phys.*, **17** (2010) 45-86.
- [14] S. Matsutani and Y. Ônishi, *On the Moduli of a Quantized Elastica in $\mathbb{P}$ and KdV Flows: Study of Hyperelliptic Curves as an Extension of Euler's Perspective of Elastica I*, *Rev. Math. Phys.*, **15** (2003) 559-628.
- [15] S. Matsutani and E. Previato, *Jacobi inversion on strata of the Jacobian of the C_{rs} curve $y^r = f(x)$ I, II*, *J. Math. Soc. Jpn.* , **60** (2008) 1009-1044, *J. Math. Soc. Japan*, **66** (2014) 647-691.
- [16] S. Matsutani and E. Previato, *From Euler's elastica to the mKdV hierarchy, through the Faber polynomials*, *J. Math. Phys.*, **57** (2016) 081519.
- [17] D. Mumford, *Tata Lectures on Theta I,II*, Progress in Mathematics, 28, 43. Birkhäuser, Boston, 1983, 1984.
- [18] A. Nakayashiki, *On algebraic expressions of sigma functions for (n, s) curves*, *Asian J. Math.*, **14** (2010) 175-212.
- [19] A. Nakayashiki, *Tau function approach to theta functions*, *Int Math Res Notices* (2016) 2016 (17): 5202-5248.
- [20] 大西良博, *Abel 函数論*, 中央大学数学教室講究録 No.6, 2013.
- [21] A.N. Tjurin, *Periods of quadratic differentials*, *Uspekhi Mat. Nauk* **33** (1978), 149-195.
- [22] C. Truesdell, *The influence of elasticity on analysis: the classic heritage*, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **9** (1983) 293-310.
- [23] Tsuru H. and Wadati M., *Elastic Model of Highly Supercoiled DNA*, *Biopolymers*, **25** (1986) 2083-2096.