Weyl のゲージ理論，Schwarz 微分，そしてある球面定理

小　林　　　治

2017年9月12日 山形大学にて

Summary

“Weyl’s gauge theory, the Schwarzian derivative and a sphere theorem.” For many years I have been interested in conformal differential geometry and projective differential geometry. In this talk I would like to explain what these geometries mean at the present day and what can be expected in the future. I am now, as of June 2017, planning the talk and it will be concerned chiefly with a new conformal invariant which is similar to Yamabe’s conformal invariant in many respects. In addition a conjecture, a sphere theorem, will be presented. If time permits I touch upon projective differential geometry and discuss some complements to Weyl’s setting. This talk as a whole is a derivation from H. Weyl’s “Reine Infinitesimalgeometrie” and subsequent developments by K. Yano, H. Yamabe and M. Obata. (June 11, 2017)

1. はじめに

ほぼ一世紀前 H. Weyl は Euclid 幾何学から Riemann 幾何学への転換を遠隔幾何学から近接幾何学への移り行きと捉えた．この立場から Riemann 幾何学に改良の余地を見出し修正 Riemann 幾何学としていわゆる Weyl のゲージ理論を提示した．現在では共形微分幾何学と名前を変えて継がれている．100年前の共形幾何学の意味が現在と異なることは第3版までの岩波数学辞典に見ることができる．用語「近接」は「局所」に代わり「局所」の対義語は「遠隔」ではなく「大域」となった．Chern の Gauss–Bonnet 定理に代表される積分公式型定理およびこれと双対的な性格を持つ Hopf–Rinow 定理すなわち Euclid の第 1 公準（線分公準）第 2 公準（直線公準）の再検討が大域幾何学への道を開いたと見ることができる．

Weyl 理論の土台は第5公準（平行線公準）の無限小化すなわちアフィン接続にある．自然な流れで射影微分幾何学に導かれ共形微分幾何学と対置させて Riemann 幾何学がこの二者を取持つと見る構想に至る．Weyl 論文では明示的でないが射影微分幾何学もゲージ理論になっている．しかし古典射影幾何学が incidence 構造として公理化され結局体の代数学に吸収されてしまった事情によると思われるが Weyl の定式化はスケッチといえなくもなくこれが射影微分幾何学の現代幾何学としての存在感が薄れてしまった一因のように私には思える．その後数学の記述様式が変わり数学論文の標準言語が英語となり，その結果一世紀前の幾何学の幾分かが冬眠状態にあるように見える．

管見ではあるが以上のような問題意識から興味を惹かれる話題を紹介したい．

2. Weyl のゲージ理論

正の実数のなす乗法群 $\mathbf{R}_+ \subset GL(1,\mathbf{R})$ を構造群とするゲージ理論を Weyl のゲージ理論と呼ぶ．多様体 M 上の $\mathbf{R}_+$ ゲージ場のモデュライ空間は $H^1(M,\mathbf{R})$ である．$\mathbf{R}_+$ 主束

はいつでも自明だがそのゲージ理論は自明でない．Weyl理論の特色はMの計量が主束と関係を持つ点にある．CをMの計量の共形類とする．$P_C=\{g(x)|\ g\in C, x\in M\}$は自然に$M$上の$\mathbf{R}_+$主束となり随伴直線束$P_C\times_{\mathbf{R}_+}\mathbf{R}=\{rg(x)|\ r\in\mathbf{R}, g\in C,\ x\in M\}$の接続$D$は$g\in C$と1形式$\phi$により$Dg=\phi g$で定まる．曲率形式は$d\phi$．ゲージ変換は正値関数$\lambda$で与えられ$\tilde{D}=\lambda^{-1}D\lambda$とすると$\tilde{D}g=\tilde{\phi}g$, $\tilde{\phi}=d\log\lambda+\phi$. したがって同値関係$(g,\phi)\sim(\lambda g, d\log\lambda+\phi)$による同値類$[(g,\phi)]$が接続$D$に対応する．

命題 2.1 ([28]). $\nabla g=Dg$を満たすねじれ無しアフィン接続∇がDに対して一意的に存在する．これを *Weyl* 接続と呼ぶ.

Weyl はRic^∇の歪対称部を電磁場と考え統一場理論を試みたが批判を受けた ([28], [23]). 1970年代（と思われる）以降リバイバルがあり Gauduchonゲージなどの整備が進み一つの流れを作っている．

3. Schwarz 微分

1変数関数uのSchwarz微分$Su=\dfrac{\dddot{u}}{\dot{u}}-\dfrac{3}{2}\left(\dfrac{\ddot{u}}{\dot{u}}\right)^2$を複素変数で考えると$Su=0$は複素数平面の共円変換(Möbius変換)の方程式であり同時に複素直線の射影変換の方程式でもある．1990年代に和田昌昭氏はClifford代数に共形性を取り込ませるSchwarz微分を考案した．和田氏との共同研究で射影幾何的側面を補う改良を加えた[15]．共形性についてはその頃平面曲線の頂点について梅原雅顕氏と研究を進めていた([13], [14])こともありSchwarz微分も共円性に囚われていた．共同研究の過程での和田氏のふとした一言から純共形的なSchwarz微分も得ることができた[15]．以下にその要点を述べる．

注意 3.1. 共円微分幾何（矢野健太郎の concircular geometry [31] を Vogelの定理 [27]で補ったもの）はEuclidの第3公準（円公準）の抽象化，共形微分幾何（Weyl のゲージ理論[28]）は第4公準（直角公準）の抽象化である．両者の接点はEinstein方程式でここに一つの起源をもつ Hessian 方程式 ([31], [25]) とその一般形は小畠型方程式の呼称で1980年代には国外でも通用していた．古典幾何（遠隔幾何）として公理化したとき二つの幾何の関係はまだ不明な点がある (Dembowski [4]).

以後簡単のため $n=\dim M\geq 3$を仮定し, C を MのRiemann計量の共形類，∇をCの一つのWeyl接続とする．$g\in C$はClifford 束$\mathrm{Cl}(TM)$を定める．

定義 3.2. Iを区間またはS^1とする．正則曲線 $x\colon I\to M$に対して

$$sx:=(\nabla_{\dot{x}}\nabla_{\dot{x}}\dot{x})\dot{x}^{-1}-\frac{3}{2}((\nabla_{\dot{x}}\dot{x})\dot{x}^{-1})^2-\frac{1}{n-2}\dot{x}(L^\nabla\cdot\dot{x}),\ \text{ここで}\ L^\nabla=\mathrm{Ric}^\nabla-\frac{\mathrm{tr}\,(g^{-1}\circ\mathrm{Ric}^\nabla)}{2(n-1)}g$$

とする．∇がEinstein計量gのLevi–Civita接続のとき，右辺第3項は$\dfrac{R_g}{2n(n-1)}g(\dot{x},\dot{x})$である．$\mathrm{Cl}(TM)$値$sx$のスカラー部分$s_wx\colon I\to\mathbf{R}$ を *Weyl–Schwarzian* と呼ぶ.

命題 3.3. s_w はゲージ不変．したがって共形不変.

これは直交超曲面族の Dupin の定理を用いて示され（たと思われ）る Liouvilleの定理（1850）に相当する．あまり知られることのなくなったこのLiouvilleの定理の奥行きの深さを手短に説明することは難しい．モダンな証明はLie代数の order を使う．Weyl–Schwarzianの古典的なSchwarz微分との関係は

補題 3.4 ([17]). $x(t) = \tilde{x}(u(t))$ のとき $s_w x - \dot{u}^2 s_w \tilde{x} = Su$.

方程式 $Su = s$ の解は2階常微分方程式 $\ddot{f} + \frac{s}{2} f = 0$ の1次独立な解の比で与えられる．これはSchwarz微分が何らかの曲率を表していることを暗示する．また和田氏との共同研究[15]で1次元空間の曲率テンソルは0としか言いようがないものの，不定形の曲率 $\frac{1}{n-1}\mathrm{Ric}$ は1次元の制約の中に生埋めになっているような感触を得た．この方向の考察は[22] のproperly-closedness 問題を導いた．これは常微分方程式の周期性問題だが方程式を見ているだけでは暗闇だった．その後Kuiper [24]を知りproperly-closedness問題は肯定的に解けることがわかった．

定理 3.5. $n = \dim M \geq 3$, $S^1 = \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$ とする．正則閉曲線 $x\colon S^1 \to (M, C)$ に対して $s_w x =$ 定数 となる助変数変換が存在し，この定数の値 K は一意的.

4. 共形不変量 $\kappa(M, C)$

以下の定式化は正規化定数その他吟味不十分のため細部に暫定的なところがある．

定義 4.1. 正則閉曲線 $x\colon S^1 \to (M, C)$ に対して $\kappa(x) := 2\pi^2 K$. ここで K は定理3.5の定数.

定理 4.2 ([22]). $\kappa(x)$ は共形不変．$x\colon S^1 \to (S^n, C_0)$ に対して $\kappa(x) \geq \pi^2$. $\kappa(x) = \pi^2$ ならば x は正円.

証明は de Sitter 型 Laguerre 幾何を用いる[22]．和田昌昭氏が見出した[15]の関係式(1.8)は長い間気に掛かっていた．Blaschke [2]を読み直しそれがLaguerre幾何と気づいたときには2010年を過ぎていた．

定義 4.3. $\kappa(M, C) = \inf\{\kappa(x) |\ x\colon S^1 \to M$ ははめ込み$\}$.

この定義に従うと $\kappa(M, C) < 0$ のときはいつでも $\kappa(M, C) = -\infty$ となる．おさまりのよい有限値になるようこの定義は修正する予定である．このままでも以下の議論に影響はない．

定理 4.4. $\kappa(M, C) \leq \kappa(S^n, C_0) = \pi^2$. ここで C_0 は標準定曲率計量の共形類.

次はKlingenberg [7]および小畠[26]を用いる．山辺の共形不変量 $\mu(M, C)$ [30]は次節で簡単に解説する．

定理 4.5. M はコンパクト連結で $n = \dim M \geq 3$，C は *Einstein* 計量を含むとする．

(1) $\mu(M, C) < 0$ ならば $\kappa(M, C) < 0$.

(2) $\mu(M, C) = 0$ ならば $\kappa(M, C) = 0$.

(3) $\mu(M, C) > 0$ ならば $\kappa(M, C) > 0$.

μ と κ の符号が同じといえばそれで済むことだが符号に応じて議論の質に違いがある．(1)でEinstein条件は不要と思われる．(2)の条件は C が $\mathrm{Ric} = 0$ となる計量を持つことと同じ．(3)は $\kappa(S^1(r) \times S^{n-1}(1)) = -\infty$ の例があるのでEinstein条件は必要.

次を基本問題としたい．

予想 4.6. M はコンパクト連結で $\kappa(M, C) = \kappa(S^n, C_0)$ ならば $(M, C) \simeq (S^n, C_0)$.

$\dim M = 2$での定式化は省いたが対応する命題は正しい．これから Nehari の単葉性定理が得られる．(M, g) が階数1のコンパクト対称空間のとき，$(M, [g])$ に対してこの予想は正しい [19]．一般の場合の証明方針の私案を講演時に述べたい．

5. 山辺の定理

Weylのゲージ理論で今や最も大きな位置を占めるのは山辺の定理とこれに派生する数学であると見ることができる．この解釈は説明を要するかも知れない．山辺英彦の1960年論文 [30] では不等式 (6.2) に誤りがあり全17ページの論文の約一割が無効となった．しかし主定理（山辺計量の存在）が正しいことは1980年代に R. Schoen により証明された ([20] など)．山辺論文 [30] で示されたことは以下のように要約される．

- M はコンパクト連結, $n = \dim M$ とする．共形不変量

$$\mu(M, C) = \inf_{g \in C} \frac{\int_M R_g d\mu_g}{(\int_M d\mu_g)^{(n-2)/n}}$$

  が導入された．$n \geq 3$のとき下限を実現する計量（山辺計量）のスカラー曲率 R_g は定数である．

- R_g が定符号 (定数にはまだ至らない）となる $g \in C$ が存在し，その符号は $\mu(M, C)$ の符号と一致する．

その後 Lichnerowicz (1963) は $\mu(M, C) > 0$ となる C の存在には $n > 2$ でも M に位相的制約があることを示した．また Avez (1963), Aubin (1966), Eliasson (1971) により $n \geq 3$ のとき $\inf_C \mu(M, C) = -\infty$ が示された．与えられた多様体が正のスカラー曲率計量を許容するかどうかが真剣に取り組むべき問題となったのはこのように山辺論文 [30] に原点がある．一方，山辺の定理が Poincaré 予想を目指していたという伝承があり書かれたものでは [3] がある．その根拠は山辺の定理が Einstein 計量の存在を示すのに十分豊富な定スカラー曲率計量を与えることにあると私には思われた．しかし1980年代にはまだ山辺の定理の正否が確立されてなく，あえてその一歩先に踏み込めばやるべきことは山辺数 $\mu(M) = \sup_C \mu(M, C)$ の研究にあると思われた [10]．実際その後の研究を追うと的外れではなかったようである．にもかかわらず着想時の主要問題の大半は未解決のままでいまだ悪夢から逃れられずまた5次元以上での議論が捗捗しくないことの歯がゆさがある．余談だが山辺数 the Yamabe number の名称は1986年 Liverpool での講演後に会食の席で受けたサジェスチョンによる．スカラー曲率を単に符号だけでなくオプティマルな定数にまでコントロールすることは困難であるが重要でもある．山辺の定理の証明が完成するまでのみちのりはおおよそ次の3段階に分けられる．

定理 5.1 (山辺, Aubin)**.** $\mu(M, C) < \mu(S^n, C_0)$ ならば (M, C) は山辺計量を持つ．

これは山辺の議論で修復可能な部分にあたる．その後の方針は Aubin によるもので次のように続く．

定理 5.2 (Aubin)**.** S^n の定曲率計量は山辺計量．一般に $\mu(M, C) \leq \mu(S^n, C_0) = n(n-1)\mathrm{Vol}(S^n(1))^{2/n}$.

定理 5.3 (Aubin, Schoen)**.** $\mu(M, C) = n(n-1)\mathrm{Vol}(S^n(1))^{2/n}$ ならば (M, C) は $S^n(1)$ に共形的.

山辺論文の不備が指摘された後この問題の解決に小畠守生の研究 [26] が関係していることは（国外では）注意されていた．それは定理5.2, 5.3によく表れている．本講演との関係は，定理 4.2, 4.4と定理 5.2, 予想 4.6と定理 5.3の類似から明白に見えるかも知れない．しかし違いもありそれは講演時に説明したい．

6. Weyl のゲージ理論再考

$\mathcal{A}(M)$ で M のねじれの無いアフィン接続全体，$\mathcal{V}(M)$ で M の体積要素全体からなる空間を表す．$S^*L(n,\mathbf{R}) = \{A \in GL(n,\mathbf{R})|\ \det A = \pm 1\}$ と書く．$GL(n,\mathbf{R})/S^*L(n,\mathbf{R}) \simeq \mathbf{R}_+$ は可縮なので n 次元多様体は $S^*L(n,\mathbf{R})$ 構造をもつ．$S^*L(n,\mathbf{R})$ 構造は体積要素 (体積形式 volume form ではない) に他ならない．M の接枠束を LM と書くとき $LM/S^*L(n,\mathbf{R})$ は $\mathbf{R}_+$ 主束でその切断全体が $\mathcal{V}(M)$ となる．この $\mathbf{R}_+$ 主束に Weylのゲージ理論を適用する．随伴直線束の接続 D は $d\mu \in \mathcal{V}(M)$ と1形式 ϕ により $Dd\mu = \phi d\mu$ で定まる．ゲージ変換は正値関数 λ で与えられ $\tilde{D} = \lambda^{-1}D\lambda$ とすると $\tilde{D}d\mu = \tilde{\phi}d\mu$, $\tilde{\phi} = d\log\lambda + \phi$. つまり第2節と同様である．

$\nabla \in \mathcal{A}(M)$ と1形式 ψ に対して $\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \psi(X)Y + \psi(Y)X$ で定まる $\tilde{\nabla} \in \mathcal{A}(M)$ は ∇ に射影同値であるという．射影同値類を単に射影類と呼ぶ．Weylの射影微分幾何学の枠組みは命題2.1に対応する次の命題で与えられる．

命題 6.1 ([16]). 射影類 $P \subset \mathcal{A}(M)$ が与えられたとき $Dd\mu = \nabla d\mu$ を満たす $\nabla \in P$ が一意的に存在する．これも *Weyl*接続と呼ぶ．

$\mathcal{A}_0(M) = \{\nabla \in \mathcal{A}(M)|\ \exists d\mu \in \mathcal{V}(M),\ \nabla d\mu = 0\}$ と書く．この命題から $P_0 := P \cap \mathcal{A}_0(M) \neq \emptyset$ で，これは P を決める．P_0 を Weylの意味での射影類と呼ぶ（末尾の文献表にない Weylの論文による）．こうして射影微分幾何学は $\mathbf{R}_+$ ゲージ理論となる．共形類 C に対して $C \to \mathcal{V}(M)$; $g \mapsto d\mu_g$ の全単射がある．Gauduchon ゲージとまったく同様に

定理 6.2. M はコンパクト連結とする．任意の *Weyl*接続に対して $\mathrm{div}_g\phi = 0$, $d\mu = d\mu_g$ を満たすゲージ $g \in C$ が定数倍を除いて一意的に存在する．

計量が突然現れるので人為的な印象を与えるかも知れないが自然に見える解釈も可能で3節で述べたSchwarz微分の射影微分幾何版と合わせて講演時に述べたい．射影微分幾何の準備状況について私の認識は次のとおり．積分公式型の結果として [1] などがある．Hopf–Rinow型定理は folklore があるものの体系的に書かれたものがあるかは不明．幾何解析への道は緒に就いた．

射影微分幾何学はアフィン接続を対象としその全体は計量の空間より大きい．その研究は故郷を離れて放浪する旅のような趣きがある．感覚的には n 次元射影微分幾何の難易度は $n+0.5$ 次元共形微分幾何と比較できる．第3節，第4節の話は1次元射影微分幾何を掘り下げたものと考えられる．次は2次元，その次に3次元そして4次元以上．この次元の区分で幾何学の性格が異なる．どのような問題に取り組むべきかの系統的な検討はまだ不十分に思われる．誰もが思いつきそうな

- 3次元では常に平坦射影構造が入るか?
- S^3 にねじれ無し $\mathrm{Ric}^\nabla = 0$ はあるか?

は未解決と思われる．前者の動機は[9]にあった．後者はねじれを許せば答えは肯定的．3次元多様体で平坦共形構造を持たないものがあると分かったのは1980年代，Ricci平坦しかし平坦でない4次元閉Riemann多様体の存在が確認されたのは1970年代だったと思う．Weylはアフィン接続をねじれ無しに限定したが，その後概複素構造の積分可能性などアフィン接続のねじれが重要な役を担う数学がいくつか現れた．アフィン接続のねじれの考察は別の機会に論じたい．なお5節で触れた山辺数，本節のアフィン接続のねじれの問題，いずれも30年以上前に鈴木一郎氏との議論から触発されたことを記しておきたい．

7. おわりに

幾何学はそこに私たちが置かれている世界や空間の数学ではなく私たちが見る対象としての形の数学だったのではないだろうか．内在的で大域的であること．このドグマから私はなかなか抜け出せなかった．上に述べた話の数歩先に再び部分多様体—無限次元無限余次元も含めてまた特異点もありの微分幾何学がうまく接続されればとの思いがある．本論で述べた数学の薄らとした悲哀の色合いもこの思いがかなえばハッピーエンドの明るさに交替しダンテの神曲がそうであったように喜劇となる．アリストテレスの詩学によれば劣った人間の数学となり…．小畠守生先生の何気無い一言《世の中は辻褄が合うようううまくできている》が思い出される．

参考文献

[1] A. Avez, "Remarque sur les formes de Pontrjagin," C. R. Acad. Sci. Paris 270 (1970), 1248. (関連論文として "Applications de la formule de Gauss-Bonnet-Chern aux varietes a quatre dimensions," C. R. Acad. Sci. Paris 256 (1963), 5488–5490; "Characteristic classes and Weyl tensor," Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 66 (1970), 265–268. 小さな誤りがある)

[2] W. Blaschke, Vorlesungen über Differentialgeometrie III, Springer, 1929.

[3] S. S. Chern, "The geometry of G-structures," Bull. AMS 72 (1966), 167–219.

[4] P. Dembowski, Finite Geometries, Springer, 1968.

[5] D. Hilbert, S. Cohn-Vossen, Anschauliche Geometrie, Springer, 1932 (芹沢正三訳，直観幾何学，みすず書房，1966).

[6] F. Klein, "Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen," Erlangen, 1872.

[7] W. Klingenberg, Lectures on closed geodesics, Springer, 1978.

[8] O. Kobayashi, A. Yoshioka, Y. Maeda and H. Omori, "The theory of infinite-dimensional Lie groups and its applications," Acta Appl. Math. 3 (1985), 71–106.

[9] O. Kobayashi, "A Willmore type problem for $S^2 \times S^2$," Differential geometry and differential equations (Shanghai, 1985), 67–72, Lecture Notes in Math. 1255, Springer, Berlin, 1987.

[10] 小林　治, "大きなスカラー曲率について", 幾何学分科会講演アブストラクト，日本数学会1985年度秋季総合分科会於富山大学; O. Kobayashi, "Scalar curvature of a metric with unit volume," Math. Ann. 279 (1987), 253–265.

[11] 小林　治, 井関裕靖, "山辺の問題について", Sem. on Math. Sci. 16, 慶応義塾大学，1990.

[12] O. Kobayashi, T. Gomikawa, "Complete Metrics of Negative Ricci Curvature, " J. Math. Soc. Japan 43 (1991), 432–435.

[13] O. Kobayashi, M. Umehara, "Geometry of scrolls," Osaka J. Math. 33 (1996), 441–473.

[14] O. Kobayashi, "Vertices of curves with complementary shells," Kobe J. Math. 15 (1998), 59–65.

[15] O. Kobayashi, M. Wada, "Circular geometry and the Schwarzian," Far East J. Math. Sci. Special Volume (2000), 335–363.

[16] O. Kobayashi, "A variational problem for affine connections," Arch. Math. 86 (2006), 464–469.

[17] O. Kobayashi, "Projective structures of a curve in a conformal space," From Geometry to Quantum Mechanics *in honor of Hideki Omori*, 47–51, Progr. Math. 252, Birkhäuser, 2007.

[18] O. Kobayashi, "Ricci curvature of affine connections," Tohoku Math. J. 60 (2008), 357–364.

[19] O. Kobayashi, "Injectivity property of regular curves and a sphere theorem," Differential geometry of submanifolds and its related topics *in honor of Sadahiro Maeda*, 16–18, World Scientific, 2013,

[20] 小林　治，芥川和雄，井関裕靖，"山辺の問題", 数学メモアール 7, 日本数学会，2013.

[21] 小林　治，"Laguerre 幾何学–忘れられた幾何", 阪大合宿資料, 2014.

[22] O. Kobayashi, "Conformal length through Laguerre geometry," Geometric Analysis in Geometry and Topology 2015.
`http://www.rs.kagu.tus.ac.jp/~koike/GAGT2015-Kobayashi.pdf`

[23] 小林　治，幾何学的方法と解析学的方法，数理科学 53 巻 10 号 (2015)，7–14; ワイルと微分幾何，数理科学 54 巻 10 号 (2016), 30–35, サイエンス社.

[24] N. H. Kuiper, "Locally projective spaces of dimension one," Michigan Math. J. 2 (1953), 95–97.

[25] M. Obata, "Certain conditions for a Riemannian manifold to be isometric with a sphere," J. Math. Soc. Japan 14 (1962), 333–340.

[26] M. Obata, "The conjectures on conformal transformations of Riemannian manifolds," J. Diff. Geom. 6 (1971), 247–258.

[27] W. O. Vogel, "Kreistreue Transformationen in Riemannschen Räumen," Arch. Math. 21 (1970), 641–645.

[28] H. Weyl, "Reine Infinitesimalgeometrie," Math. Z. 2 (1918), 384–411.

[29] H. Weyl, "Zur Infinitesimalgeometrie: Einordnung der projektiven und der konformen Auffassung," Göttingen Nachrichten (1921), 99–112.

[30] H. Yamabe, "On a Deformation of Riemannian Structures on Compact Manifolds," Osaka Math. J. 12 (1960), 21–37.

[31] K. Yano, "Concircular Geometry I, II, III, IV, V," Proc. Imp. Acad. Japan 16 (1940), 195–200, 354–360, 442–448, 505–511; 18 (1942) 447–451.

(2017/07/14)