

放物型方程式に対するポテンシャル論と関数空間¹

西尾 昌治 (阪市大理)²

1 はじめに

$0 < \alpha \leq 1$ に対し, $R^{n+1} = R^n \times R$ 上の放物型作用素

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}^{(\alpha)} := \partial_t + (-\Delta_x)^\alpha$$

を考える. ここで, $R^n \times R$ 上の点を $X = (x, t) = (x_1, \dots, t)$ で表し, $\Delta_x := \partial_1^2 + \dots + \partial_n^2$ は x -空間 R^n の Laplacian である. $\alpha = 1$ のとき $\mathcal{L}^{(1)}$ は熱作用素である. また, $\alpha = 1/2$ の場合は Poisson 作用素とよばれ, 全空間 R^{n+1} 上の Laplacian Δ と深い関係がある. それは, 形式的に $\mathcal{L}^* \mathcal{L} = -\Delta$ となることからわかる.

$0 < \alpha < 1$ に対しては, $\mathcal{L}^{(\alpha)}$ は非局所作用素である. そのため, R^{n+1} の開集合で調和関数は全空間で定義されている必要がある. ここでは, そのような作用素に関するポテンシャル論について復習した後, 領域を上半空間に限定し, そこでの $\mathcal{L}$ -調和関数からなる関数空間, 放物型ベルグマン空間や関連した空間を導入し, その性質について述べる. そして最後に, 多重放物型作用素 $\mathcal{L}^m$ に関する最近の結果について多重調和関数の空間を意識しながら紹介する.

2 放物型ポテンシャル論

熱方程式に関するポテンシャル論については, Watson [52, 53], Doob [10], Kaufman-Wu [25] に詳しく述べられている. 抽象的な取り扱いは Constantinescu-Cornea [9] にまとめられている. ここでは $\mathcal{L}$ -調和性を弱微分の形で定義し, $\mathcal{L}$ の基本解による核ポテンシャル論によるポテンシャル論的な特徴づけに注意する.

$0 < \alpha < 1$ のとき, $(-\Delta_x)^\alpha$ は $-c_{n,\alpha} \text{p.f.}|x|^{-n-2\alpha}$ による合成積作用素, すなわち,

$$(-\Delta_x)^\alpha \varphi(x) = -c_{n,\alpha} \lim_{\delta \downarrow 0} \int_{|y|>\delta} (\varphi(x-y) - \varphi(x)) |y|^{-n-2\alpha} dy \quad (1)$$

である. ここで, $c_{n,\alpha} = -4^\alpha \pi^{-n/2} \Gamma((n+2\alpha)/2) / \Gamma(-\alpha) > 0$ は定数である. 局所可積分関数 f, g に対し, 任意の $\varphi \in C_c^\infty(R^n)$ に対し

$$\int_{R^n} g(x) (-\Delta_x)^\alpha \varphi(x) dx = \int_{R^n} f(x) \varphi(x) dx$$

が成り立つとき $(-\Delta_x)^\alpha f = g$ (弱) と表す. $f \in C^\infty(R^n)$ がたとえばその微分もすべて有界などのしかるべき条件があれば $(-\Delta_x)^\alpha f$ (弱) は直接 (1) で与えられるこ

¹本研究は科研費 (K15K04934) の助成を受けたものである.

²〒 558-8585 大阪市住吉区杉本 3-3-138

email: nishio@sci.osaka-cu.ac.jp

とに注意する. 開集合 $D \subset \mathbf{R}^{n+1}$ に対し,

$$s(D) := \{(x, t) \in \mathbf{R}^{n+1} \mid \exists y \in \mathbf{R}^n, (y, t) \in D\}$$

とおく.

定義 1. D を $\mathbf{R}^{n+1}$ の開集合とする. $s(D)$ 上の可測関数 u が D 上 $\mathcal{L}$ -調和であるとは, D 上連続であって, $\mathcal{L}u = 0$ (弱) となること, すなわち, 任意の $\varphi \in C_c^\infty(D)$ に対し,

$$\int_{s(D)} u(X) \mathcal{L}^* \varphi(X) dX = 0$$

が成り立つことをいう.

ここで,

$$W(x, t) = W^{(\alpha)}(x, t) := \begin{cases} (2\pi)^{-n} \int_{\mathbf{R}^n} \exp(-t|\xi|^{2\alpha} + \sqrt{-1} x \cdot \xi) d\xi & (t > 0) \\ 0 & (t \leq 0) \end{cases}$$

を考えると, これは $\mathcal{L}^{(\alpha)}$ の基本解である, すなわち,

補題 1. $\varphi \in C_c^\infty(\mathbf{R}^{n+1})$ に対し

$$W^{(\alpha)} * (\mathcal{L}^{(\alpha)} \varphi) = \mathcal{L}^{(\alpha)}(W^{(\alpha)} * \varphi) = \varphi$$

が成り立つ. ここで, $\varphi \in C_c^\infty(\mathbf{R}^{n+1})$ はコンパクト台の C^∞ -級関数全体を表す.

$\alpha = 1, 1/2$ の場合には $t > 0$ に対し

$$W^{(1)}(x, t) = (4\pi t)^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{4t}\right) : \text{Gau\ss-Weierstra\ss 核}$$

$$W^{(1/2)}(x, t) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\pi^{\frac{n+1}{2}}} \frac{t}{(t^2 + |x|^2)^{\frac{n+1}{2}}} : \text{Poisson 核}$$

と明示的に表される. 一般の $0 < \alpha < 1$ に対しては簡単な関数で表することはできないが, Poisson 核 $W^{(1/2)}$ と同様の挙動であることがわかっている ([22, 38, 39], [24]). すなわち,

補題 2. $0 < \alpha < 1$ とする. そのとき, $t > 0$ に対し, 評価

$$C^{-1}t(t + |x|^{2\alpha})^{-(\frac{n}{2\alpha}+1)} \leq W^{(\alpha)}(x, t) \leq Ct(t + |x|^{2\alpha})^{-(\frac{n}{2\alpha}+1)}$$

$$|\partial_x^\beta \partial_t^k W^{(\alpha)}(x, t)| \leq C(t + |x|^{2\alpha})^{-\frac{n+|\beta|}{2\alpha}-k}$$

および, 斉次性

$$\partial_x^\beta \partial_t^k W^{(\alpha)}(s^{\frac{1}{2\alpha}}x, st) = s^{-(\frac{n+|\beta|}{2\alpha}+k)}(\partial_x^\beta \partial_t^k W^{(\alpha)})(x, t)$$

が成り立つ. ここで, $s > 0$, k は非負整数, β は多重指数である.

また、開集合 $D \subset \mathbf{R}^{n+1}$ と点 $X \in D$ に対し、 X における Dirac 測度の $\mathbf{R}^{n+1} \setminus D$ への双対核 W^* に関する掃散測度を ν_D^X で表す。ここで、 $W^*(X) := W(-X)$ である。すると ν_D^X は $\mathcal{L}$ -調和測度である、すなわち、

定理 1. $D \subset \mathbf{R}^{n+1}$ を開集合とし、 u を $s(D)$ 上の可測関数で D 上連続とする。そのとき、 D 上 $\mathcal{L}$ -調和であるための必要十分条件は D の任意の相対コンパクト開集合 U と任意の $X \in U$ に対し、

$$u(X) = \int u(Y) d\nu_U^X(Y)$$

が成立することである。

3 放物型 Bergman 空間

元来の Bergman 空間は複素平面の単位円板上の 2 乗可積分な正則関数全体からなる Hilbert 空間である。その後、円板を滑らかな有界領域や上半平面などに一般化したり、正則関数のかわりに調和関数を対象とした調和 Bergman 空間の研究などが行われている ([7], [23], [51], [55], [56])。放物型 Bergman 空間は上半空間

$$\mathbf{H} := \{(x, t) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R} \mid x \in \mathbf{R}^n, t > 0\}$$

上の p 乗可積分な $\mathcal{L}^{(\alpha)}$ -調和関数全体のつくる Banach 空間である。すなわち、 $1 \leq p \leq \infty$ に対して、

$$b_\alpha^p := \{u \in C(\mathbf{H}) \mid \mathcal{L}^{(\alpha)}u = 0 \text{ (弱)}, u \in L^p(\mathbf{H})\}$$

である。 $p = \infty$ の場合は b_α^∞ よりも、次の放物型 Bloch 空間が重要となる。

$$\mathcal{B}_\alpha := \{u \in C^1(\mathbf{H}) \mid \mathcal{L}^{(\alpha)}u = 0 \text{ (弱)}, \|u\|_{\mathcal{B}_\alpha} < \infty\}$$

ここで Bloch ノルムは

$$\|u\|_{\mathcal{B}_\alpha} := \sup_{(x,t) \in \mathbf{H}} \{t|\partial_t u(x,t)| + t^{1/(2\alpha)}|\nabla_x u(x,t)|\}$$

である。すると $\mathcal{B}_\alpha/\mathbf{R}$ は $\|\cdot\|_{\mathcal{B}_\alpha}$ で Banach 空間である。また、 $b_\alpha^\infty \subsetneq \mathcal{B}_\alpha$ (連続埋め込み) である。

通常の Bergman 空間の場合と同様に放物型 Bergman 関数 u に対する平均値の定理のひとつである Huygens 原理

$$u(x, t) = \int_{\mathbf{R}^n} u(y, s) W^{(\alpha)}(x - y, t - s) dy \quad (0 < s < t, x \in \mathbf{R}^n)$$

から b_α^2 は再生核 Hilbert 空間になる。その再生核 R_α は、基本解を用いて

$$R_\alpha(x, t; y, s) := -2\partial_t W^{(\alpha)}(x - y, t + s)$$

であたえられ, 放物型 Bergman 核とよぶ. また, それによる積分作用素 (同じ記号 R_α で表す)

$$R_\alpha f(X) := \int R_\alpha(X, Y) f(Y) dV(Y)$$

は 2 以外の p に対しても次のように射影である.

命題 1. (1) $R_\alpha u = u$ for $\forall u \in b_\alpha^p$ ($1 \leq p < \infty$)

(2) $R_\alpha : L^p(H) \rightarrow b_\alpha^p$ は $1 < p < \infty$ のとき有界作用素

(3) $R_\alpha : L^2(H) \rightarrow b_\alpha^2$: 直交射影

これより双対空間に関する次は直ちに従う.

定理 2. $(b_\alpha^p)^* \simeq b_\alpha^{p'}$ ($1 < p < \infty$). ここで, 同型はノルム同値で $1/p + 1/p' = 1$ とする.

$p = 1$ の双対空間には, 放物型 Bloch 空間があらわれる. ここで, H の 1 点コンパクト化を $H \cup \{\mathcal{A}\}$ で表し,

$$\mathcal{B}_{\alpha,0} := \{u \in \mathcal{B}_\alpha \mid \lim_{(x,t) \rightarrow \mathcal{A}} t|\partial_t u(x,t)| + t^{\frac{1}{2\alpha}} |\nabla_x u(x,t)| = 0\}$$

とおく.

定理 3. 次のノルム同値の意味での同型が成り立つ.

(1) $(b_\alpha^1)^* \simeq \mathcal{B}_\alpha / R$

(2) $(\mathcal{B}_{\alpha,0} / R)^* \simeq b_\alpha^1$

ここで R は定数関数全体を表す.

最後に, 調和関数との関連を注意する. 上半空間上の調和 Bergman 空間

$$b^p := \{u \in C^2(H) \mid \Delta u = 0, u \in L^p(H)\}$$

については Ramey-Yi [51] をはじめ多くの研究がある. $u \in b^p$ が $\alpha = 1/2$ に対する Huygens 原理をみたすことから $b^p = b_{1/2}^p$ である.

4 Toeplitz 作用素

放物型 Bergman 空間上の Toeplitz 作用素をとりあげる. Toeplitz 作用素は補間問題 (cf. [43]) などにも応用がある基本的な作用素である. $p \neq 2$ の場合も興味深い結果があるが, ここでは $p = 2$, すなわち, Hilbert 空間の場合に限って, その有界性 ([41]), コンパクト性 ([42, 44, 46, 47]) などについて述べる.

表象 φ の Toeplitz 作用素 T_φ は φ による掛け算作用素と射影作用素の合成によって定義される

$$(T_\varphi u)(X) := \int R_\alpha(X, Y) u(Y) \varphi(Y) dY$$

の形の作用素である. 表象を上半空間上の Radon 測度 $\mu \geq 0$ に拡張すると

$$(T_\mu u)(X) := \int R_\alpha(X, Y) u(Y) d\mu(Y)$$

となる. すなわち, Hilbert 空間上の正值自己共役作用素を考えることになる. そこで, ここではそのことがより明確にわかるように定義を修正する.

定義 2. $\mu \geq 0$ を H 上の Radon 測度で $b_\alpha^2 \cap L^2(H, \mu)$ が b_α^2 の稠密部分空間であるものとする. そのとき, 関係式

$$\langle \sqrt{T_\mu} u, \sqrt{T_\mu} v \rangle = \int uv d\mu \quad (u, v \in b_\alpha^2 \cap L^2(H, \mu))$$

で一意的に定まる b_α^2 上の正值自己共役作用素 T_μ を表象 μ の Toeplitz 作用素とよぶ.

注意 1. 正測度 μ がある $\tau \in R$ に対し

$$\int (1 + t + |x|^{2\alpha})^\tau d\mu(x, t) < \infty \quad (2)$$

をみたせば $b_\alpha^2 \cap L^2(H, \mu)$ は b_α^2 で稠密である.

Toeplitz 作用素は Carleson 埋め込みとよばれる次の閉作用素

$$\iota_\mu : b_\alpha^2 \rightarrow L^2(H, \mu) : u \mapsto u$$

と関連がある. ここで, 定義域は $b_\alpha^2 \cap L^2(H, \mu)$ である. ι_μ が b_α^2 上有界であるとき, 測度 μ を Carleson 測度とよぶ.

注意 2. Radon 測度 $\mu \geq 0$ が条件 (2) をみたせば, $T_\mu = \iota_\mu^* \iota_\mu$ である. さらに, T_μ と ι_μ のいずれかが有界ならば他方も有界であって次が成り立つ.

$$\|T_\mu\| = \|\iota_\mu\|^2, \quad T_\mu u(X) = \int R_\alpha(X, Y) u(Y) d\mu(Y).$$

Toeplitz 作用素を調べるのに次の平均関数 $\hat{\mu}^{(\alpha)}$ と Berezin 変換 $\tilde{\mu}^{(\alpha)}$ が有用で, 有界性やコンパクト性を特徴づけることができる ([41, 42]).

$$\begin{aligned} \hat{\mu}^{(\alpha)}(Y) &:= \mu(Q^{(\alpha)}(Y)) / V(Q^{(\alpha)}(Y)), \\ \tilde{\mu}^{(\alpha)}(Y) &:= \int R_\alpha(X, Y)^2 d\mu(X) / \int R_\alpha(X, Y)^2 dV(X). \end{aligned}$$

ここで, $Q^{(\alpha)}(Y)$ は次で定義される α -放物型 Carleson box である.

$$Q^{(\alpha)}(y_1, \dots, y_n, s) := \{(x_1, \dots, x_n, t) | s \leq t \leq 2s, |x_j - y_j| \leq 2^{-1} s^{1/2\alpha}\}.$$

定理 4. Radon 測度 $\mu \geq 0$ は条件 (2) をみたすとする. そのとき次は同値:

- (i) T_μ は b_α^2 上有界;
- (ii) $\hat{\mu}^{(\alpha)}$ は H 上有界;
- (iii) $\tilde{\mu}^{(\alpha)}$ は H 上有界.

定理 5. Radon 測度 $\mu \geq 0$ は条件 (2) をみたすとする. そのとき次は同値:

- (i) T_μ は b_α^2 上コンパクト;
- (ii) $\lim_{Y \rightarrow \mathcal{A}} \hat{\mu}^{(\alpha)}(Y) = 0$;
- (iii) $\lim_{Y \rightarrow \mathcal{A}} \tilde{\mu}^{(\alpha)}(Y) = 0$.

Toeplitz 作用素のコンパクト性をさらに追求して, トレース族や Hilbert-Schmidt 作用素などの Schatten 族に属するための条件やランク有限作用素を調べることができる. そのためにはスケーリングとそれを用いた平均作用素が有効である.

5 多重放物型 Bergman 空間

最後に, 最近の結果として, 多重放物型 Bergman 空間とその再生核について多重調和 Bergman 空間との関連で述べる. なお, 実 2 次元の場合の多重調和 Bergman 空間については Pessoa-Santos [49] による複素平面上の関数空間としての研究がある.

多重放物型および多重調和 Bergman 空間を自然数 m と $1 \leq p \leq \infty$ に対し,

$$\begin{aligned} b_\alpha^{m,p} &:= \{u \in C^\infty(H) \mid \mathcal{L}^m u = 0, t^k \mathcal{L}^k u \in L^p(H) \text{ for } 0 \leq k \leq m\}, \\ b^{m,p} &:= \{u \in C^\infty(H) \mid \Delta^m u = 0, u \in L^p(H)\} \end{aligned}$$

で定義する. ノルムはいずれも L^p -ノルムを考える. はじめに $b^{m,p} = b_{1/2}^{m,p}$ であることを注意する.

定理 6. $b_\alpha^{m,p}$ は $L^p(H)$ の閉部分空間である. さらに, $u \in b_\alpha^{m,p}$ に対し, 各点評価

$$|u(x, t)| \leq C t^{-(\frac{n}{2\alpha} + 1)\frac{1}{p}} \|u\|_{L^p(H)}$$

が得られる. ここで, C は u によらない定数である.

これにより, $p = 2$ のときは再生核 Hilbert 空間になることがわかる. そしてその再生核は次で与えられる.

定理 7. 上半空間上の点 $X_1 = (x_1, t_1), Y_1 = (y_1, s_1) \in H$ に対し,

$$K_\alpha^m(X_1, Y_1) := \sum_{k=0}^{m-1} (p_k(-2t_1 \partial_t) p_k(-2s_1 \partial_s) R_\alpha)(X_1, Y_1)$$

とおく. そのとき, 核 $K_\alpha^{m,\lambda}$ による積分作用素は $L^2(H)$ から $b_\alpha^{m,2}$ への直交射影を与える. ここで, $(p_k)_{k=0}^\infty$ は $(0, \infty)$ 上 $e^{-t} dt$ で正規化された Laguerre 多項式で $p_k(-2s_1 \partial_s)$ は定数係数の微分作用素を表し, $R_\alpha(X, Y)$ は放物型 Bergman 核である.

6 おわりに

以上のようにこれまで調和関数への応用を意識しながら放物型方程式に関する研究をすすめてきた。振り返ってみるといずれも詰めが甘く十分に目的をはたしたとは言えない状況である。たとえば、多重放物型作用素におけるポテンシャル論の活用は非常に不十分であるし、領域も上半空間に限られている点は不満で、せめて帯状領域を取り扱いたいと考えている。また、興味ある話題のなかで今回全く触れられなかったものに調和双対と重み付き Bergman 空間がある。放物型 Bergman 関数の調和双対は Yamada [54] で初めて取り上げられた。そこでは自然に重みが現れ、同時に重み付き空間の研究がなされている。重み付き Bergman 核については分数べき微分を用いて Hishikawa [12] によって得られている。この方面の研究では Hardy 空間との関連が興味深い方向性に思われるが未だ十分に解明されたとは言いがたい状況である。今後はそういう問題を丁寧に取り上げ、粘り強く取り組んでいきたい。

References

- [1] S. Axler, P. Bourdon, and W. Ramey, Harmonic function theory, GTM 137, Springer-Verlag, 1992.
- [2] N. Aronszajn, Theory of reproducing kernels, Trans. Amer. Math. Soc. 68 (1950), 337–404.
- [3] N. Aronszajn, T. M. Creese, and L. J. Lipkin, Polyharmonic functions, Clarendon Press, Oxford, 1983.
- [4] J. Bliedtner, and W. Hansen, Potential theory, An analytic and probabilistic approach to balayage. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, 1986.
- [5] M. Brzezina, Tusk type conditions and thinness for the parabolic operator of order α , Manuscripta Math., 80 (1993), no 1, 21–26.
- [6] B. R. Choe, *On higher dimensional Luecking's theorem*, J. Math. Soc. Japan, **61** No. 1 (2009), 213–224.
- [7] B. R. Choe, H. Koo and H. Yi, *Positive Toeplitz operators between the harmonic Bergman spaces*, Potential Analysis, **17** (2002), 307–335.
- [8] B. R. Choe, H. Koo and Y. J. Lee, *Positive Schatten(-Herz) class Toeplitz operators on the half space*, Potential Analysis, **27** (2007), 73–100.
- [9] C. Constantinescu, and A. Cornea, Potential theory on harmonic spaces, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 158. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1972.

- [10] J. L. Doob, Classical potential theory and its probabilistic counterpart, Springer-Verlag, Berlin, 2001.
- [11] W. Hansen, Modification of balayage spaces by transition with application to coupling of pde's, Nagoya Math. J. Vol. 169 (2003), 77–118.
- [12] Y. Hishikawa, Fractional calculus on parabolic Bergman spaces. Hiroshima Math. J., 38 (2008), no. 3, 471–488.
- [13] Y. Hishikawa, Representing sequences on parabolic Bergman spaces, J. Korean Math. Soc. 48 (2011), no. 5, 1017–1041.
- [14] Y. Hishikawa, M. Nishio and M. Yamada, *A conjugate system and tangential derivative norms on parabolic Bergman spaces*, Hokkaido Math. J., **39** (2010), no. 1, 85–114.
- [15] Y. Hishikawa, M. Nishio and M. Yamada, Conjugate functions on spaces of parabolic Bloch type, J. Math. Soc. Japan 65 (2013), no. 2, 487–520.
- [16] Y. Hishikawa, M. Nishio and M. Yamada, $L^{(\alpha)}$ -conjugates on parabolic Bergman spaces, Potential Anal. 40 (2014), no. 4, 525–537.
- [17] Y. Hishikawa, M. Nishio and M. Yamada, Fractional calculus and $L^{(\alpha)}$ -conjugates on parabolic Hardy spaces, Sci. Math. Jpn. 77 (2015), no. 3, 371–391.
- [18] Y. Hishikawa, M. Nishio and M. Yamada, A system of conjugate functions on parabolic Bloch spaces, to appear.
- [19] Y. Hishikawa and M. Yamada, Function spaces of parabolic Bloch type, Hiroshima Math. J. 41 (2011), no. 1, 55–87.
- [20] Y. Hishikawa and M. Yamada, Representing and interpolating sequences on parabolic Bloch type spaces, Hokkaido Math. J. 41 (2012), no. 3, 335–364.
- [21] T. Ikegami, and M. Nishio, Q -compactification of harmonic spaces and the Choquet simplex, Osaka J. Math. 39 (2002), no. 4, 931–944.
- [22] M. Itô and M. Nishio, Poincaré type conditions of the regularity for the parabolic operator of order α , Nagoya Math. J., 115(1989), 1–22.
- [23] H. Kang, and H. Koo, Estimates of the harmonic Bergman kernel on smooth domains, J. Funct. Anal. 185 (2001), no. 1, 220–239.
- [24] T. Takeuchi, and K. Sakai, Behavior of solutions to linear and semilinear parabolic pseudo-differential equations, Tsukuba J. Math. 34 (2010), no. 2, 221–253.
- [25] R. Kaufman, and J. M. Wu, Parabolic potential theory. J. Differential Equations 43 (1982), no. 2, 204–234.

- [26] H. Koo, K. Nam and H. Yi, Weighted harmonic Bergman kernel on half-spaces, J. Math. Soc. Japan Vol. 58, No. 2, (2006), 351–362.
- [27] D. H. Luecking, *Trace ideal criteria for Toeplitz operators*, J. Funct. Anal., **73** (1987), 345–368.
- [28] D. H. Luecking, *Finite rank Toeplitz operators on the Bergman space*, Proc. Amer. Math. Soc., **136** (2008), 1717–1723.
- [29] Y. Maekawa, and H. Miura, On fundamental solutions for non-local parabolic equations with divergence free drift, Adv. Math. 247 (2013), 123–191.
- [30] Y. Maekawa, and H. Miura, On domain of Poisson operators and factorization for divergence form elliptic operators, Manuscripta Math. 152 (2017), 459–512.
- [31] S. Miyajima, and H. Shindoh, Gaussian estimates of order α and L^p -spectral independence of generators of C_0 -semigroups. II. SUT J. Math. 42 (2006), no. 2, 357–371.
- [32] S. Miyajima, and H. Shindoh, Gaussian estimates of order α and L^p -spectral independence of generators of C_0 -semigroups, Positivity 11 (2007), no. 1, 15–39.
- [33] H. Nakagawa and N. Suzuki, Boundedness of Toeplitz operators on parabolic Hardy spaces, Linear Nonlinear Anal. 2 (2016), no. 2, 229–235.
- [34] M. Nishio, The Wiener criterion of regular points for the parabolic operator of order α , Nagoya Math. J., 116 (1989), 163–179.
- [35] M. Nishio, Riesz capacity and regular boundary points for the parabolic operator of order α , Nagoya Math. J. 139 (1995), 185–196.
- [36] M. Nishio, and K. Shimomura, Reproducing kernels for iterated parabolic operators on the upper half space with application to polyharmonic Bergman spaces, Complex Anal. Oper. Theory (2017), DOI: 10.1007/s11785-017-0673-5.
- [37] M. Nishio, K. Shimomura, and N. Suzuki, A mean value property of polytemperatures on a strip domain, J. London Math. Soc., (2) **58** (1998) 381–393.
- [38] M. Nishio, K. Shimomura and N. Suzuki, α -parabolic Bergman spaces, Osaka J. Math., **42** (2005), 133–162.
- [39] M. Nishio, K. Shimomura and N. Suzuki, L^p -boundedness of Bergman projections for α -parabolic operators, Advanced Studies Pure Math., 44 (2006), 305–318.
- [40] M. Nishio and N. Suzuki, A characterization of strip domains by a mean value property for the parabolic operator of order α , New Zealand J. Math., 29 (2000), 47–54.

- [41] M. Nishio, N. Suzuki and M. Yamada, *Toeplitz operators and Carleson measures on parabolic Bergman spaces*, Hokkaido Math. J., **36**, No. 3 (2007), 563–583.
- [42] M. Nishio, N. Suzuki and M. Yamada, *Compact Toeplitz operators on parabolic Bergman spaces*, Hiroshima Math. J., **38** (2008), 177–192.
- [43] M. Nishio, N. Suzuki and M. Yamada, *Interpolating sequences of parabolic Bergman spaces*, Potential Analysis, **28** (2008), 353–378.
- [44] M. Nishio, N. Suzuki and M. Yamada, *Weighted Berezin transformations with application to the Schatten class Toeplitz operators on parabolic Bergman spaces*, Kodai math. J., **32** (2009), 501–520.
- [45] M. Nishio, N. Suzuki and M. Yamada, *Carleson inequalities on parabolic Bergman spaces*, Tohoku Math. J., **62** (2010), 269–286.
- [46] M. Nishio, N. Suzuki and M. Yamada, *Schatten class Toeplitz operators on the parabolic Bergman space II*, Kodai Math. J., **35** (2012), 52–77.
- [47] M. Nishio, N. Suzuki and M. Yamada, *Positive Toeplitz operators of finite rank on the parabolic Bergman spaces*, Kodai Math. J., **36** (2013), 38–49.
- [48] M. Nishio and M. Yamada, *Carleson type measures on parabolic Bergman spaces*, J. Math. Soc. Japan, **58**, No. 1 (2006), 83–96.
- [49] L. V. Pessoa and A. M. Santos, Polyharmonic Bergman spaces and Bargmann type transforms, J. Math. Anal. Appl. 449 (2017), no. 1, 619–641.
- [50] H. Shindoh, L^p -spectral independence of fractional Laplacians perturbed by potentials, SUT J. Math. 42 (2006), no. 2, 225–294.
- [51] W. C. Ramey and H. Yi, Harmonic Bergman functions on half-spaces, Trans. Amer. Math. Soc. 348 (1996), 633–660.
- [52] N. A. Watson, Green functions, potentials, and the Dirichlet problem for the heat equation, Proc. London Math. Soc. (3) 33 (1976) no. 2, 251–298.
- [53] N. A. Watson, Introduction to heat potential theory, Mathematical Surveys and Monographs, 182, American Mathematical Society, Providence, RI, 2012.
- [54] M. Yamada, Harmonic conjugates of parabolic Bergman functions, Potential theory in Matsue, 391–402, Adv. Stud. Pure Math., 44, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2006.
- [55] H. Yi, Harmonic little Bloch functions on half-spaces, Math. Japon. 47 (1998) 21–28.
- [56] K. Zhu, Operator theory in function spaces, Marcell-Dekker, New York, 1990.