

特別講演

半線形楕円型方程式の正値解の一意性・非退化性と その応用

足達 慎二 (静岡大学)*

1. 序

次の半線形楕円型方程式の正値解の一意性と非退化性について考える.

$$\begin{cases} -\Delta u = g(u) & \text{in } \mathbb{R}^N, \\ u > 0 & \text{in } \mathbb{R}^N, u \in H^1(\mathbb{R}^N). \end{cases} \quad (1)$$

ここで, $N \geq 2$ とし, 非線形項 g は C^1 級関数で $g(0) = 0$ とする. 典型的な非線形項は $g(s) = -s + s^p$ (スカラー場方程式) である. (1) の可解性 (正値解の存在) についてはさまざまな先行研究があり, 特に [8, 9, 17] により, 非常に広いクラスの非線形項に対して正値解の存在が知られている. また, 例えば [15] により (g に対する至ってマイルドな仮定のもとで) 正値解は全て (原点を中心とした) 球対称解であることもわかる. さらに (1) は変分構造を持ち, その解はエネルギー汎関数

$$E(u) := \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx - \int_{\mathbb{R}^N} G(u) dx : H^1(\mathbb{R}^N) \rightarrow \mathbb{R}$$

の臨界点として与えられる ($G(s) := \int_0^s g(t) dt$). 特に [8, 9, 17] で与えられた正値球対称解はエネルギー最小解である. つまり,

$$\inf\{E(u); u \text{ は (1) の非自明解}\}$$

を達成する. (1) は (非線形シュレディンガー方程式など) 様々な数理物理モデル等に現れ, 元となる物理モデルからの要請でエネルギー最小解 (基底状態) を詳しく調べることは重要である. そこで本講演ではエネルギー最小解の一意性と非退化性, あるいはより強く, 正値解の一意性と非退化性に焦点を当てて考察する.

(1) の正値解の一意性と非退化性に対する研究も長い歴史と非常に多くの先行研究がある (典型的な非線形項 $g(s) = -s + s^p$ に対しては [12, 19], それを含むより一般の $g(s)$ に対しては [7, 14, 21, 22, 23, 25] など). これらの先行研究の多くは $g(s)$ の無限遠方での増大度が優線形の仮定のもとで一意性や非退化性を扱っていて, $g(s)$ の増大度が劣線形の場合は一般には正値解の一意性や非退化性は知られていない. 本講演では $g(s)$ の無限遠方での増大度が劣線形の場合においても正値解の一意性や非退化性に関する結果が得られたので報告させて頂きたい.

非線形項 $g(s)$ について次を仮定する.

本講演は柴田将敬氏 (東京工業大学), 渡辺達也氏 (京都産業大学) との一連の共同研究に基づく.

2010 Mathematics Subject Classification: 35J61, 35A02, 35B05

キーワード: 正値球対称解, 一意性, 非退化性

* 〒432-8561 静岡県浜松市中区城北 3-5-1 静岡大学工学部数理システム工学科

e-mail: adachi@shizuoka.ac.jp

web: <https://wpp.shizuoka.ac.jp/adachi/>

(g1) $g \in C^1([0, \infty))$, $g(0) = 0$, $g'(0) < 0$.

(g2) ある $b > 0$ が存在し, $g(s) < 0$ on $(0, b)$, $g(s) > 0$ on (b, ∞) , $g'(b) > 0$.

(g3) $K_g(s) := \frac{sg'(s)}{g(s)}$ は (b, ∞) 上 $K_g(s) > 1$ となる範囲では $K'_g(s) < 0$.

(g4) $K_g(s) \leq 1$ on $(0, b)$.

主結果は以下の通りである.

定理 1 ([4]). $N \geq 2$ とし, (g1)–(g4) を仮定する. このとき (1) の正値解は平行移動を除いて高々一つで非退化である.

定義 2. (1) の解 u が非退化であるとは, u から定まる線形化作用素

$$\mathcal{L} := \Delta + g'(u) : H^2(\mathbb{R}^N) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^N)$$

に対して, $\varphi \in H^2_{rad}(\mathbb{R}^N)$, $\mathcal{L}\varphi = 0$ ならば $\varphi \equiv 0$.

注意 3. 仮定 (g2) をもう少し一般化し, 次の仮定のもとで定理 1 を示すことができる.

(g2') ある $b > 0$, $\tilde{b} \in (b, \infty]$ が存在し, $g(s) < 0$ on $(0, b)$, $g(s) > 0$ on $(b, \tilde{b})$, $g(s) < 0$ on $(\tilde{b}, \infty)$, $g'(b) > 0$, $g'(\tilde{b}) < 0$.

仮定 (g2') により, Allen-Cahn 型の非線形項 $g(s) = -s(s-b)(s-\tilde{b})$ に対しても定理 1 を適用できる. 一方, 例えば双べき型の非線形項 $g(s) = -s + s^p + s^q$ ($1 < p \neq q$) は (g2) は満たすが (g3) を満たさないで, 定理 1 を適用できない.

$K_g(s) = \frac{sg'(s)}{g(s)}$ は growth function と呼ばれ, $g(s)$ の無限遠方での増大度を“測る”関数である. 実際, 典型的な非線形項 $g(s) = -s + s^p$ ($p > 1$) に対しては

$$K_g(s) = \frac{ps^{p-1} - 1}{s^{p-1} - 1} > 1 \quad (s > 1)$$

であり, $K_g(\infty) = p$ であることがわかる. また,

$$K'_g(s) = -\frac{(p-1)^2 s^{p-2}}{(s^{p-1} - 1)^2} < 0 \quad (s > 1)$$

であるので, $g(s) = -s + s^p$ ($p > 1$) は (g1)–(g4) を満たすことがわかる. $g(s) = -s + s^p$ ($p > 1$) に対する (1) の正値解の一意性は [19] により得られたが, [21] は [19] の結果を一般化し, (g1), (g2), (g4) に加えて次の仮定を満たす非線形項 $g(s)$ に対して (1) の正値解の一意性を示した.

(g5) $K_g(s) > 1$ on (b, ∞) .

(g6) $K'_g(s) < 0$ on (b, ∞) .

さらに (g5), (g6) のもとで正値解の非退化性も示すことができ, [7] を用いれば線形化作用素のより詳しい性質を得ることもできる. 一方, 仮定 (g5) は $g(s)$ の無限遠方での増大度が優線形または漸近線形 ($K_g(\infty) \geq 1$) であることを必要とするので, [19] の結果は $g(s)$ の増大度が劣線形 ($K_g(\infty) < 1$) である場合には適用できない. 我々の仮定 (g3) は (g5), (g6) を改良したものであり, $g(s)$ の増大度が劣線形である場合も含まれている点に注意されたい. なお, [25] は $N \geq 3$ において, (g1), (g2), (g6) の仮定のみで (1) の正値解の一意性を示しているが, (g6) だけでは非退化性を得ることはできない.

2. 定理 1 の証明の概略

2.1. 一意性

次の常微分方程式の初期値問題を考える.

$$\begin{cases} u'' + \frac{N-1}{r}u' + g(u) = 0, \\ u(0) = d > 0, \\ u'(0) = 0. \end{cases} \quad (2)$$

初期値 $d > 0$ を変えるときの (2) の解 $u(r; d)$ の挙動を詳しく調べるため, 初期値 $d > 0$ を以下の 3 つの集合に分類する.

$$N = \{d > 0; R_d > 0 \text{ が存在して } u'(r; d) < 0 \text{ on } (0, R_d], u(R_d; d) = 0\},$$

$$G = \{d > 0; u'(r; d) < 0 \text{ on } (0, \infty), \lim_{r \rightarrow \infty} u(r; d) = 0\},$$

$$P = \{d > 0; u(r; d) > 0 \text{ on } (0, \infty), \lim_{r \rightarrow \infty} u(r; d) \neq 0\}.$$

$d \in G$ のときは $R_d = \infty$ とみなす. 集合 N, G, P について以下のことがわかる.

補題 4. 次が成立する.

(i) N, G, P は互いに素であり, $N \cup G \cup P = (0, \infty)$. また, P と N は $(0, \infty)$ 内の開集合. さらにある $d_0 > 0$ が存在して, $(0, d_0) \subset P$.

(ii) $d_0 \in G$.

(iii) ある $\epsilon > 0$ が存在して $(d_0, d_0 + \epsilon) \subset N$.

したがって, 正值解の一意性を示すためには $G = \{d_0\}$ であることを示せばよいので, $d > d_0 > 0$ を大きくしていった時の $u(r; d)$ の最初の零点 $R_d > 0$ の挙動を調べることが重要である. 例えば, $\lim_{d \nearrow d_1} R_d = \infty$ となるような $d_1 > 0$ が存在すると, $d_1 \in G$ であり一意性が成立しないので, このようなことが起こらないことを示す.

(2) の解 $u = u(r; d)$ から定まる線形化方程式を考える:

$$\begin{cases} \delta'' + \frac{N-1}{r}\delta' + g'(u)\delta = 0, \\ \delta(0) = 1, \\ \delta'(0) = 0. \end{cases} \quad (3)$$

$\delta(r; d) := \frac{\partial}{\partial d}u(r; d)$ とおくと $\delta(r; d)$ は (3) の解であり, $\delta(R_d; d)$ の符号と $R_d > 0$ の挙動の関係について以下のことがわかる.

補題 5. 次が成立する.

(i) $\delta(R_d; d) > 0$ ならば, $0 = u(R_d; d) < u(R_d; d + \epsilon)$ となり, $R_d < R_{d+\epsilon}$.

(ii) $\delta(R_d; d) < 0$ ならば, $0 = u(R_d; d) > u(R_d; d + \epsilon)$ となり, $R_d > R_{d+\epsilon}$.

(iii) $d \in [d_0, d_0 + \epsilon)$ では $\delta(r; d)$ は $(0, R_d)$ で丁度 1 回符号変化し, $\delta_d(R_d; d) < 0$.

したがって, $R_d > 0$ の挙動を調べるには, $\delta(r; d)$ の挙動を調べればよい. 次の 2 つの補題が正值解の一意性 (と非退化性) を得るための鍵となる補題である.

補題 6. $d \in G$ ならば, $\delta(r; d)$ は少なくとも 1 回符号変化する.

補題 7 (strictly admissible). $d \in N \cup G$ とする. さらに $\delta(r; d)$ は $(0, R_d)$ で丁度 1 回符号変化すると仮定する. このとき,

(i) $d \in N$ ならば, $\delta(R_d; d) < 0$.

(ii) $d \in G$ ならば, $\lim_{r \rightarrow \infty} \delta(r; d) = -\infty$.

注意 8. 補題 6, 7 は $v_\lambda(r; d) := ru'(r; d) + \lambda u(r; d)$ ($\lambda > 0$) と $\delta(r; d)$ に対して Sturm の比較定理を用いて示される. この証明方針は [21] と同じだが, [21] は補題 6, 7 の証明において仮定 (g5), (g6) を用いている. 我々の仮定 (g3) のもとでは比較関数 $v_\lambda(r; d)$ の運用も含めて, いろいろと改良が必要になる.

以下, 補題 5–7 を用いて, 正值解の一意性の証明の概略を述べる. $d \in (d_0, \infty)$ を d_0 から連続的に増やしていき, もし $\delta(R_d; d) = 0$ となったとしたら, 補題 5 の (iii) から次のいずれかが成立する.

Case A: $\delta(r; d)$ は $(0, R_d)$ で丁度 1 回符号変化し, $\delta(R_d; d) = 0$.

Case B: $\delta(r; d) > 0$ on $(0, R_d)$ で, $\delta(R_d; d) = 0$.

まず, Case A は補題 7 と矛盾するので, Case A は起こり得ないことがわかる. 一方, Case B は起こりうる. この場合, R_d は増加するかもしれない. しかし, この状況である $d_1 > 0$ が存在して, $\lim_{d \nearrow d_1} R_d = \infty$ となると

$$d_1 \in G, \delta(r; d_1) > 0 \text{ on } (0, \infty)$$

であることがわかる. ところが, これは補題 6 に矛盾する. 結局, (d_0, ∞) において $d_1 \in G$ となる $d_1 > d_0$ は存在せず, $G = \{d_0\}$ がわかる.

2.2. 非退化性

非退化性も補題 7 から示すことができる. (1) の一意正值球対称解 $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ に対して

$$\varphi'' + \frac{N-1}{r} \varphi' + g'(u) \varphi = 0, \quad \varphi'(0) = 0,$$

をみたす非自明な $\varphi \in H_{rad}^2(\mathbb{R}^N)$ があつたとする. このとき, 常微分方程式の初期値問題の解の一意性からある $a \in \mathbb{R}$ が存在して, $\varphi(r) = a\delta(r; d_0)$ である. 補題 7 の (ii) より $\lim_{r \rightarrow \infty} \delta(r; d_0) = -\infty$ なので, $\varphi \notin H_{rad}^2(\mathbb{R}^N)$ となり矛盾.

注意 9. 正值球対称解 u の一意存在がわかれば, [7] と同様にして,

$$\text{Ker}(\mathcal{L}) = \text{span} \left\{ \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_N} \right\}$$

など, 線形化作用素 $\mathcal{L}$ のより詳しい性質がわかる.

3. 定理 1 の応用

定理 1 の応用として次の準線形楕円型方程式の正値解の一意性と非退化性について考える.

$$\begin{cases} -\Delta u - \kappa u^{\alpha-1} \Delta(u^\alpha) = -u + u^p & \text{in } \mathbb{R}^N, \\ u > 0 & \text{in } \mathbb{R}^N, u \in H^1(\mathbb{R}^N). \end{cases} \quad (4)$$

ここで, $N \geq 2$, $\kappa > 0$, $\alpha > 1$, $1 < p < \alpha 2^* - 1$ とする. 2^* は Sobolev 臨界指数で

$$2^* := \begin{cases} \frac{2N}{N-2} & (N \geq 3), \\ \infty & (N = 2). \end{cases}$$

方程式 (4) の物理的背景については [10, 11, 18] など参照されたい. (4) は $N \geq 2$, $\kappa > 0$, $\alpha > 1$, $1 < p < \alpha 2^* - 1$ において正値 (球対称) 解が存在する ([13, 20]) が, その一意性, 非退化性については準線形項の係数 κ や非線形項の指数 p , あるいは次元 N を制限した部分的な解決のみである ([1, 2, 3, 5, 6, 16, 24]). ここでは, 定理 1 を適用することで, $N \geq 2$, $\kappa > 0$, $\alpha > 1$, $1 < p < \alpha 2^* - 1$ において正値解の一意性, 非退化性を得ることができたので報告させて頂きたい.

定理 10. $N \geq 2$, $\kappa > 0$, $\alpha > 1$, $1 < p < \alpha 2^* - 1$ とする. このとき (4) の正値解は平行移動を除いて一意で非退化である.

以下, 定理 1 の適用の仕方を中心に定理 10 の証明の概略を述べる.

3.1. 定理 10 の証明の概略

方程式 (4) に対応する汎関数は

$$\begin{aligned} I(u) &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx + \frac{\kappa}{2\alpha} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla(u^\alpha)|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} u^2 dx - \frac{1}{p+1} \int_{\mathbb{R}^N} u^{p+1} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} (1 + \alpha \kappa u^{2\alpha-2}) |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} u^2 dx - \frac{1}{p+1} \int_{\mathbb{R}^N} u^{p+1} dx \\ &: X := \left\{ u \in H^1(\mathbb{R}^N); \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla(u^\alpha)|^2 dx < \infty \right\} \rightarrow \mathbb{R} \end{aligned}$$

であり, $I(u)$ の臨界点は準線形楕円型方程式 (4) の解である. ここで, $u = f(v)$ とおくと,

$$\begin{aligned} I(f(v)) &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} (1 + \alpha \kappa f(v)^{2\alpha-2}) |\nabla f(v)|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} f(v)^2 dx - \frac{1}{p+1} \int_{\mathbb{R}^N} f(v)^{p+1} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} (1 + \alpha \kappa f(v)^{2\alpha-2}) f'(v)^2 |\nabla v|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} f(v)^2 dx - \frac{1}{p+1} \int_{\mathbb{R}^N} f(v)^{p+1} dx \end{aligned}$$

となるので,

$$(1 + \alpha \kappa f(v)^{2\alpha-2}) f'(v)^2 \equiv 1$$

となるように関数 f を選び, この f に対して汎関数

$$J(v) := I(f(v)) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} f(v)^2 dx - \frac{1}{p+1} \int_{\mathbb{R}^N} f(v)^{p+1} dx$$

を考える. $J(v)$ の臨界点は次の半線形楕円型方程式の解である.

$$\begin{cases} -\Delta v = -f(v)f'(v) + f(v)^p f'(v) & \text{in } \mathbb{R}^N, \\ v > 0 & \text{in } \mathbb{R}^N, v \in H^1(\mathbb{R}^N). \end{cases} \quad (5)$$

結局, 変換関数 f を通して, 方程式 (4) の解と (5) の解が 1 対 1 に対応するので, 定理 10 を証明するためには半線形楕円型方程式 (5) の正値解が平行移動を除いて一意かつ非退化であることを示せばよい. このように変換関数 f を用いて方程式 (4) を方程式 (5) に変換して解析する手法を**双対アプローチ**と呼び, この手法は [13, 20] によって導入された.

変換関数 f は次の常微分方程式の初期値問題の一意大域解である.

$$\begin{cases} f'(s) = \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha \kappa f(s)^{2\alpha-2}}} & \text{on } s \in [0, \infty), \\ f(0) = 0. \end{cases} \quad (6)$$

方程式 (6) の一意大域解 $f(s)$ に対して, $g(s) := -f(s)f'(s) + f(s)^p f'(s)$, $b := f^{-1}(1)$ が仮定 (g1)–(g4) を満たすことを示せば, 定理 1 から方程式 (5) の正値解 v は平行移動を除いて一意かつ非退化であり, 結局, 方程式 (4) の解 $u = f(v)$ も平行移動を除いて一意かつ非退化である. 変換関数 $f(s)$ について次が成立する.

補題 11. 次が成立する.

- (i) $f(s) \leq s$, $0 < f'(s) \leq 1$, $f''(s) \leq 0$ on $[0, \infty)$.
- (ii) $f(s) \leq \alpha s f'(s) - (\alpha - 1)f(s)f'(s)^2$ on $[0, \infty)$.
- (iii) $s f'(s) \leq f(s)$ on $[0, \infty)$.
- (iv) $\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{f(s)}{s^{\frac{1}{\alpha}}} = \left(\frac{\alpha}{\kappa}\right)^{\frac{1}{2\alpha}}$, $\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s f'(s)}{f(s)} = \frac{1}{\alpha}$.
- (v) $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{f(s)}{s} = 1$.

特に補題 11 の (ii) が仮定 (g3) を満たすことを示す際に鍵となる不等式である.

注意 12. $g(s) = -f(s)f'(s) + f(s)^p f'(s)$ に対して $K_g(s) = \frac{s g'(s)}{g(s)}$ とおくと, 補題 11 から

$$\lim_{s \rightarrow \infty} K_g(s) = \frac{p - \alpha + 1}{\alpha}$$

であることがわかる. したがって,

$$\frac{p - \alpha + 1}{\alpha} \geq 1 \iff p \geq 2\alpha - 1$$

となり, $g(s)$ の無限遠方での増大度が優線形 (または漸近線形) であるためには $p \geq 2\alpha - 1$ でなければならない.

3.2. 方程式 (4) の一般化

実際は次の準線形楕円型方程式の正值解の存在, 一意性, 非退化性を示すことができる.

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(a(u)\nabla u) + \frac{1}{2}a'(u)|\nabla u|^2 = h(u) & \text{in } \mathbb{R}^N, \\ u > 0 & \text{in } \mathbb{R}^N, u \in H^1(\mathbb{R}^N). \end{cases} \quad (7)$$

ここで, $h(s)$, $a(s)$ について次を仮定する.

$$(h1) \quad h \in C^1([0, \infty)), h(0) = 0, h'(0) < 0.$$

$$(h2) \quad \text{ある } b > 0, \tilde{b} \in (b, \infty] \text{ が存在し, } h(s) < 0 \text{ on } (0, b), h(s) > 0 \text{ on } (b, \tilde{b}), h(s) < 0 \\ \text{on } (\tilde{b}, \infty), h'(b) > 0, h'(\tilde{b}) < 0.$$

$$(h3) \quad K_h(s) \text{ は } (b, \tilde{b}) \text{ 上 } K_h(s) > 1 \text{ となる範囲では } K'_h(s) < 0.$$

$$(h4) \quad K_h(s) \leq 1 \text{ on } (0, b).$$

$$(h5) \quad \text{ある } s_0 > 0 \text{ が存在し, } H(s_0) = \int_0^{s_0} h(t) dt > 0.$$

$$(h6) \quad \text{ある } \ell > 0 \text{ が存在し, } \begin{cases} \limsup_{s \rightarrow \infty} \frac{h(s)}{s^{\frac{(\ell+1)N+2}{N-2}}} \leq 0 \text{ if } N \geq 3, \\ \limsup_{s \rightarrow \infty} \frac{h(s)}{e^{\beta s^{\ell+2}}} \leq 0 \text{ for any } \beta > 0 \text{ if } N = 2. \end{cases}$$

$$(a1) \quad a \in C^2([0, \infty)), \inf_{s \geq 0} a(s) > 0.$$

$$(a2) \quad a'(s) \geq 0 \text{ on } (0, \infty).$$

$$(a3) \quad K_a(s) \leq K_a(b) \text{ on } (0, b), K'_a(s) \geq 0 \text{ on } [b, \tilde{b}).$$

$$(a4) \quad \text{ある } a_\infty > 0 \text{ が存在し, } \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{a(s)}{s^\ell} = a_\infty.$$

定理 13 ([4]). (h1)–(h6), (a1)–(a4) を仮定する. このとき (7) は正值解が存在し, 平行移動を除いて一意で非退化である.

注意 14. $h(s) = -s + s^p$ ($1 < p < \alpha 2^* - 1$), $a(s) = 1 + \kappa s^{2\alpha-2}$ とおくと, これらは (h1)–(h6), (a1)–(a4) を満たし ($b = 1, \tilde{b} = \infty, \ell = 2\alpha - 2$), 方程式 (7) は方程式 (4) と一致する.

参考文献

- [1] S. Adachi, M. Shibata, T. Watanabe, *Asymptotic behavior of positive solutions for a class of quasilinear elliptic equations with general nonlinearities*, Commun. Pure Appl. Anal. **13** (2014), 97–118.
- [2] S. Adachi, M. Shibata, T. Watanabe, *Asymptotic behavior of positive solutions for a class of quasilinear elliptic equations in $\mathbb{R}^2$* , Funkcialaj Ekvacioj **57** (2014), 297–317.
- [3] S. Adachi, M. Shibata, T. Watanabe, *Global uniqueness results for ground states for a class of quasilinear elliptic equations*, Kodai Math. J. **40** (2017), 117–142.

- [4] S. Adachi, M. Shibata, T. Watanabe, *A note on the uniqueness and the non-degeneracy of positive radial solutions for semilinear elliptic problems and its application*, submitted.
- [5] S. Adachi, T. Watanabe, *Uniqueness of the ground state solutions of quasilinear Schrödinger equations*, Nonlinear Anal. **75** (2012), 819–833.
- [6] S. Adachi, T. Watanabe, *Asymptotic uniqueness of ground states for a class of quasi-linear Schrödinger equations with H^1 -supercritical exponent*, J. Differential Equations. **260** (2016), 3086–3118.
- [7] P. Bates, J. Shi, *Existence and instability of spike layer solutions to singular perturbation problems*, J. Funct. Anal. **196** (2002), 429–482.
- [8] H. Berestycki, T. Gallouët, O. Kavian, *Equations de champs scalaires euclidiens non linéaires dans le plan*, C. R. Acad. Paris Sér. I Math. **297** (1984), 307–310.
- [9] H. Berestycki and P. L. Lions, *Nonlinear scalar fields equations, I. Existence of a ground state*, Arch. Rational Mech. Anal. **82** (1983), 313–345.
- [10] L. Brizhik, A. Eremko, B. Piette, W. J. Zakrzewski, *Electron self-trapping in a discrete two-dimensional lattice*, Phys. D **159** (2001), 71–90.
- [11] L. Brizhik, A. Eremko, B. Piette, W. J. Zakrzewski, *Static solutions of a D-dimensional modified nonlinear Schrödinger equation*, Nonlinearity **16** (2003), 1481–1497.
- [12] C. V. Coffman, *Uniqueness of the ground state solution for $\Delta u - u + u^3 = 0$ and a variational characterization of other solutions*, Arch. Rational Mech. Anal. **46** (1972), 81–95.
- [13] M. Colin, L. Jeanjean, *Solutions for a quasilinear Schrödinger equation: a dual approach*, Nonlinear Anal. **56** (2004), 213–226.
- [14] C. Cortázar, M. Elgueta, P. Felmer, *Uniqueness of positive solutions of $\Delta u + f(u) = 0$ in $\mathbb{R}^N$, $N \geq 3$* , Arch. Rational Mech. Anal. **142** (1998), 127–141.
- [15] B. Gidas, W. M. Ni, L. Nirenberg, *Symmetry of positive solutions of nonlinear elliptic equations in $\mathbb{R}^N$* Adv. in Math. Suppl. Stud. **7a** (1981), 369–402.
- [16] F. Gladiali, M. Squassina, *Uniqueness of ground states for a class of quasi-linear elliptic equations*, Adv. Nonlinear Anal. **1** (2012), 159–179.
- [17] J. Hirata, N. Ikoma and K. Tanaka, *Nonlinear scalar field equations in $\mathbb{R}^N$: mountain pass and symmetric mountain pass approaches*, Topol. Methods in Nonlinear Anal. **35** (2010), 253–276.
- [18] S. Kurihara, *Large-amplitude quasi-solitons in superfluid films*, J. Phys. Soc. Japan **50** (1981), 3262–3267.
- [19] M. K. Kwong, *Uniqueness of positive solutions of $\Delta u - u + u^p = 0$ in $\mathbb{R}^N$* , Arch. Rational Mech. Anal. **105** (1989), 243–266.
- [20] J. Q. Liu, Y. Q. Wang, Z. Q. Wang, *Soliton solutions for quasilinear Schrödinger equations II*, J. Differential Equations. **187** (2003), 473–493.
- [21] K. McLeod, *Uniqueness of positive radial solutions of $\Delta u + f(u) = 0$ in $\mathbb{R}^N$, II*, Trans. Amer. Math. Soc. **339** (1993), 495–505.
- [22] K. McLeod, J. Serrin, *Uniqueness of positive radial solutions of $\Delta u + f(u) = 0$ in $\mathbb{R}^N$* , Arch. Rational Mech. Anal. **99** (1987), 115–145.
- [23] L. A. Peletier, J. Serrin, *Uniqueness of positive solutions of semilinear equations in $\mathbb{R}^n$* , Arch. Rational Mech. Anal. **81** (1983), 181–197.
- [24] A. Selvitella, *Uniqueness and nondegeneracy of the ground state for a quasilinear Schrödinger equation with a small parameter*, Nonlinear Anal. **74** (2011), 1731–1737.
- [25] J. Serrin, M. Tang, *Uniqueness of ground states for quasilinear elliptic equations*, Indiana Univ. Math. J. **49** (2000), 897–923.