特別講演
き裂を含む領域における偏微分方程式の解析

伊藤　弘道　(東京理科大学)*

1. 序論

現在まで偏微分方程式論は滑らかな領域で理論が確立してきたが，実際の物理現象には滑らかでない領域，例えばき裂や角を含む領域での解析が必要なものも少なくない．破壊現象はその典型であり，地震や構造物の安全性など生活に直結する身近で重要な現象である．その解析にはき裂を含む領域において偏微分方程式を考える必要があり，その際の本質的な困難は一般に解がき裂先端に特異性を有し，解の正則性が期待できないことである．まず，ある領域ΩにおけるPoisson方程式のDirichlet問題を考える．

$$\begin{cases} \Delta u = f \quad \text{in} \quad \Omega, \\ \quad u = 0 \quad \text{on} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

ここで$f \in H^{-1}(\Omega)$とする．このとき(1)は$H_0^1(\Omega)$上で強楕円性をもつ変分形式で表わされ，Lax-Milgramの補題により一意解$u \in H^1(\Omega)$の存在がいえる．さらにもし$\partial\Omega$が滑らかであれば，楕円型正則性定理（*elliptic regularity shift*とも呼ばれる）により，任意の$n \in \mathbb{N}$に対して，$f \in H^n(\Omega)$ならば$u \in H^{n+2}(\Omega)$がいえる（[1, 10]など参照）．しかし，$\partial\Omega$が滑らかでない場合（凹多角形など）を考えると，状況が一変し，$f \in L^2(\Omega)$であっても，一般に$u \notin H^2(\Omega)$となる[7, 16, 17]．この場合は，解の正則性を統一的に記述するため，V. Kondrat'evが導入した重み付きSobolev空間がよく用いられる[4]．

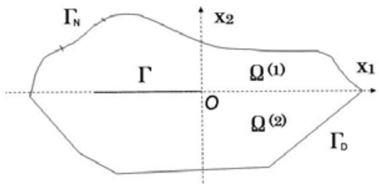
錐的特異点のまわりでの楕円型境界値問題の一般論（例えば[4, 16]参照）によると，き裂先端での解の特異性は，き裂先端を原点とする極座標(r, θ)を用いて，$r^\lambda \sum_j \log^j r \varphi_j(\theta)$となる．ここで，$\lambda \in \mathbb{C}$は特異性指数と呼ばれる．M. Costabel，M. Dauge[8]により，一般の楕円型システム（[1]の意味）において，き裂の両面で同条件を課した場合，特異性指数が$\frac{1}{2} + k$（$k \geq 0$）となることが示された．よって，一般に解は$H^{3/2}$（$H^s(\Omega)$はオーダー$s > 0$のSobolev-Slobodetskii空間）には属さず，Besov空間$B^{3/2}_{2,\infty}$もよく用いられる[29]．実際，任意の$\epsilon > 0$と整数でない$s > 0$に対して，$B^{s+\epsilon}_{2,\infty}(\Omega) \subset H^s(\Omega) \subset B^s_{2,\infty}(\Omega)$が知られている[44]．さらに，き裂の両面で異なる条件（Dirichlet-Neumann）を課した場合，特異性指数は$\frac{1}{4} + i\eta + k$（$\eta \in \mathbb{R}$，$k \in \mathbb{Z}$）となる[31, 8, 23]．

き裂先端での解の特異性は，破壊現象では，物体にかかる負荷に対してき裂先端で応力集中が起きていることを意味し，これが破壊を進行させる要因となっており，重要である[5, 43]．数学的には，このことが弱解を議論する上で大きな問題となることはないが，き裂進展問題などを扱う際には，き裂が進展することによって解放されるエネルギーの割合（物体の形状微分，エネルギー解放率と呼ぶ）を計算しなくてはならなくなり大きな障壁となる[39]．それを克服するためには，解の深い性質，特にき裂先端における挙動を精密に調べることが肝要である．また，これらの研究は破壊現象だけではなく，非破壊検査に関わる逆問題へも応用可能である（[18, 19, 20]など）．

* 〒162-8601 東京都新宿区神楽坂1-3　東京理科大学 理学部第二部数学科
e-mail: h-itou@rs.tus.ac.jp
web: http://www.rs.tus.ac.jp/h-itou/

2. 線形弾性体方程式の解のき裂先端における漸近挙動

本節では，簡単のため，２次元の均質等方的な線形弾性体領域において，き裂先端での変位場の振る舞いを考察する．$\Omega \subset \mathbb{R}^2$ をLipschitz境界をもつ有界領域とし，２つのLipschitz領域 $\Omega^{(1)} := \Omega \cap \{x_2 > 0\}$ と $\Omega^{(2)} = \Omega \cap \{x_2 < 0\}$ からなり，$\Omega^{(1)}$ と $\Omega^{(2)}$ の x_1 軸上の境界面を Γ' とする．Γ を Γ' 上の線分 $\boldsymbol{OP}$ とし，$\boldsymbol{O}$ は座標系 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2)$ の原点，$\boldsymbol{P} \notin \partial\Omega$ を満たすとする．$\Gamma_N \subset (\partial\Omega^{(1)} \setminus \Gamma')$ を $\Gamma_N \cap \overline{\Gamma'} = \emptyset$ を満たす開集合とし，$\Gamma_D := \partial\Omega \setminus \Gamma_N$ と定義する．



いわゆる定常の線形弾性体方程式（Navierの方程式とも呼ばれる）は変位ベクトル $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2)$ に対する以下の２階楕円型方程式系で表される（[33]，[35]）；

$$\mu \Delta \boldsymbol{u} + (\lambda + \mu)\nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{u}) = \boldsymbol{0} \tag{2}$$

ここで，λ，μ はLamé定数と呼ばれ，$\mu > 0$，$\lambda + \mu > 0$ を満たすものとし，$\tilde{\kappa} := \frac{\lambda+3\mu}{\lambda+\mu}$ とおく．次に，$\partial\Omega$ や Γ（Γ^+，Γ^- をそれぞれき裂の上面，下面とする）における応力ベクトルを $\boldsymbol{\sigma n}$ とかく，ここで，$\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_{ij})_{i,j=1,2}$ は応力テンソルであり，$\boldsymbol{n} = (n_1, n_2)$ は外向き単位法線とする．ただし，き裂 $\Gamma^\pm$ 上では $\boldsymbol{n} = (0, 1)$ とする．また，領域 $\Omega^{(k)}$（$k = 1, 2$）に対する変位ベクトルやLamé定数などをそれぞれ $\boldsymbol{u}^{(k)}$，$\mu^{(k)}$，$\lambda^{(k)}$ のように書くことにする．ここで，Coulomb摩擦を考慮した以下の境界値問題を考える；

与えられた表面力 $\boldsymbol{g} \in L^2(\Gamma_N)$ と十分小さな摩擦係数 $\tilde{f} \in (0, 1)$ に対して，

$$(*) \begin{cases} \mu^{(k)} \Delta \boldsymbol{u}^{(k)} + (\lambda^{(k)} + \mu^{(k)})\nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{u}^{(k)}) = \boldsymbol{0} & \text{in} \quad \Omega^{(k)}, \\ \boldsymbol{\sigma}^{(1)}\boldsymbol{n} = \boldsymbol{g} & \text{on} \quad \Gamma_N, \\ \boldsymbol{u}^{(k)} = \boldsymbol{0} & \text{on} \quad \Gamma_D, \\ [\![u_1]\!] = [\![u_2]\!] = [\![\sigma_{12}]\!] = [\![\sigma_{22}]\!] = 0 & \text{on} \quad \Gamma' \setminus \overline{\Gamma}, \\ [\![\sigma_{22}]\!] = 0,\ \sigma_{22}^{(k)} \le 0,\ [\![u_2]\!] \ge 0,\ \sigma_{22}^{(k)}[\![u_2]\!] = 0 & \text{on} \quad \Gamma^\pm, \\ [\![\sigma_{12}]\!] = 0,\ |\sigma_{12}^{(k)}| \le -f\sigma_{22}^{(k)},\ \sigma_{12}^{(k)}[\![u_1]\!] + \tilde{f}\sigma_{22}^{(k)}|[\![u_1]\!]| = 0 & \text{on} \quad \Gamma^\pm. \end{cases}$$

を満たす $\boldsymbol{u}^{(k)} \in H^1(\Omega^{(k)})$（$k = 1, 2$）を求めよ．ここで，角括弧 $[\![\cdot]\!]$ は“とび”を表す，例えば，$[\![\boldsymbol{u}]\!] := \boldsymbol{u}^{(1)} - \boldsymbol{u}^{(2)}$．$(*)$ 内のき裂 Γ 上の条件は摩擦効果を含んだ非貫通条件であり（[28, 34] 参照），以下の３つの場合を含んでいることに注意する；

- 開口き裂の場合：$[\![u_2]\!] > 0,\ \sigma_{12}^{(k)} = \sigma_{22}^{(k)} = 0$.
- 固着状態の場合：$[\![u_1]\!] = [\![u_2]\!] = 0,\ [\![\sigma_{22}]\!] = [\![\sigma_{12}]\!] = 0,\ \sigma_{22}^{(k)} \le 0,\ |\sigma_{12}^{(k)}| \le -f\sigma_{22}^{(k)}$.
- スリップ状態の場合：$[\![u_2]\!] = 0,\ [\![u_1]\!] \ne 0,\ [\![\sigma_{22}]\!] = [\![\sigma_{12}]\!] = 0,\ \sigma_{22}^{(k)} \le 0,\ \sigma_{12}^{(k)} \pm \tilde{f}\sigma_{22}^{(k)} = 0$．ここで，$\pm$ については，$[\![u_1]\!] > 0$ のとき“+”，$[\![u_1]\!] < 0$ のとき“−”の符号をとるものとする．

$(*)$ の弱解の存在は [27] で示された（一意性は未解決）．ここでは，き裂先端近傍で上記３つの場合のいずれかであるとして解の漸近挙動を導出する．それには様々な手法があるが（[31, 36] など），２次元均質等方線形弾性体の場合はGoursat-Kolosov-Muskhelishviliの応力関数 [37] を通じて，解析接続や特異型積分方程式を用いる方法が有

効である（[38, 12, 42]）．以下，その概略を紹介する．原点（き裂先端）を中心とする極座標 $\boldsymbol{x}=(r\cos\theta, r\sin\theta)$ を考え，$R>0$ に対して，$B_R:=\{|\boldsymbol{x}|<R\}$，$B_R^{(k)}:=B_R\cap\Omega^{(k)}$ $(k=1,2)$ とする．

Step 1: 応力関数の構成
解の内部と境界での正則性 [13] と Poincaré の補題より，各 $B_R^{(k)}$（$k=1,2$）における２つの正則関数 $\phi^{(k)}(z)$，$\omega^{(k)}(z)$（$z=x_1+ix_2$），の存在がいえ [18]，さらに $\phi^{(k)}(z)$, $\omega^{(k)}(z)\in H^1(B_R^{(k)})$ がわかる．変位や応力との関係式は以下で与えられる

$$
\begin{aligned}
2\mu^{(k)}(u_1^{(k)}+iu_2^{(k)}) &= \tilde{\kappa}^{(k)}\phi^{(k)}(z)-\overline{\omega^{(k)}(z)}+(\overline{z}-z)\overline{\phi^{(k)\prime}(z)}, \quad (3)\\
\sigma_{22}^{(k)}-i\sigma_{12}^{(k)} &= \phi^{(k)\prime}(z)+\overline{\omega^{(k)\prime}(z)}+(z-\overline{z})\overline{\phi^{(k)\prime\prime}(z)}, \quad (4)
\end{aligned}
$$

ここでは，$\phi^{(k)\prime}(z)=\mathrm{d}\phi^{(k)}/\mathrm{d}z$ であり，上線は複素共役を表す.

Step 2: Riemann-Hilbert 問題の導出
今，開口き裂の場合のみを考える．応力に関する条件：$B_R\cap(\Gamma'\setminus\overline{\Gamma})$ で $[\![\sigma_{i2}]\!]=0$ やトラクションフリーの条件：$B_R\cap\Gamma$ で $\sigma_{12}^{(k)}=\sigma_{22}^{(k)}=0$，変位に関する条件：$B_R\cap(\Gamma'\setminus\overline{\Gamma})$ で $[\![\boldsymbol{u}]\!]=\boldsymbol{0}$，を考えると，応力関数，例えば $\phi^{(1)\prime}(z)$，は $B_R\setminus\overline{\Gamma}$ において，以下の３条件を満たす区分的に正則な関数（*sectionally holomorphic function*）であることがわかる；

1. $\phi^{(1)\prime}(z)$ は $B_R\setminus\overline{\Gamma}$ のすべての点 z において正則である．
2. $\phi^{(1)\prime}(z)$ は Γ の近傍で区分的に連続（すなわち，端点を除く任意の点において $\lim_{x_2\to\pm 0}\phi^{(1)\prime}(z)$ がそれぞれ存在）である．
3. B_R における Γ の端点 z_0 において，$\lim_{z\to z_0}(z-z_0)\phi^{(1)\prime}(z)=0$ が成り立つ.

ここで，区分的に正則な関数が端点で特異性を持つとすれば，それは高々分岐点でしかない（弱い特異性をもつともいう）ことに注意する．さらに，$\phi^{(1)\prime}(z)$ に対する，$B_R\cap\Gamma$ における Riemann-Hilbert 問題：

$$
m_2\phi^{(1)\prime}(z)+m_1\phi^{(1)\prime}(\overline{z})=2\frac{\tilde{\kappa}^{(2)}+1}{\mu^{(2)}}\Phi(z)\quad\left(m_1:=\frac{\tilde{\kappa}^{(1)}}{\mu^{(1)}}+\frac{1}{\mu^{(2)}},\ m_2:=\frac{\tilde{\kappa}^{(2)}}{\mu^{(2)}}+\frac{1}{\mu^{(1)}}\right) \quad (5)
$$

が導出できる．ここで，$\Phi(z)$ は B_R 全体で正則なある関数である。

Step 3: Riemann-Hilbert 問題(5) の解
まず，(5) の同次方程式

$$
\phi^{(1)\prime}(z)+\frac{m_1}{m_2}\phi^{(1)\prime}(\overline{z})=0\quad\text{on}\quad B_R\cap\Gamma \quad (6)
$$

について考える．(6) の一般解は $\chi(z)X(z)$ とかけることが知られている（[38]）．ここで，$\chi(z)$ は B_R 全体での正則関数で，$X(z)$ は Plemelj 関数と呼ばれ，今の場合

$$
X(z):=z^{-\gamma}(z+R)^{\gamma-1}
$$

と書ける．ここで，$z=0$，$-R$が分岐点となることに注意する．また，$-\pi < \arg z < \pi$，$-\pi < \arg(z+R) < \pi$と定めると，$X(z)$は一意的に決まり，全領域から$B_R \cap \Gamma$を除いたところで正則となる．今，$X^+(z) := \lim_{x_2 \to 0+} X(z)$，$X^-(z) := \lim_{x_2 \to 0-} X(z)$とすると，

$$X^+(z) - e^{-2\pi i\gamma} X^-(z) = 0 \quad \text{on} \quad B_R \cap \Gamma$$

がわかる．よって，γを$m_1/m_2 = -e^{-2\pi i\gamma}$となるように選べばよい．ゆえに，

$$\gamma := \frac{i}{2\pi} \ln\left(\frac{m_1}{m_2}\right) + \frac{1}{2}.$$

とすれば，$X(z)$が(6)の$L^2(B_R)$における解で，$B_R \setminus \overline{\Gamma}$で区分的に正則となっていることがわかる．よって，$\chi(z) := \phi^{(1)'}(z)/X(z)$とおけば，$\chi(z)$は$B_R$で正則な関数であり，$\chi(z)X(z)$が(6)の一般解であることがわかる．

次に，目的の非同次方程式(5)の一般解を考える．Plemeljの公式（[12, 38]）より，同次方程式のPlemelj関数$X(z)$を用いて

$$\phi^{(1)'}(z) = \frac{X(z)}{2\pi i} \int_{B_R \cap \Gamma} 2\frac{\tilde{\kappa}^{(2)}+1}{m_2\mu^{(2)}} \frac{\Phi(t)}{X^+(t)(t-z)}\,\mathrm{d}t + X(z)\chi(z)$$

と表せる．積分を計算すると

$$\phi^{(1)'}(z) = 2\frac{\tilde{\kappa}^{(2)}+1}{(m_1+m_2)\mu^{(2)}}\Phi(z) + X(z)\chi(z).$$

となる．実際，明らかに$2\frac{\tilde{\kappa}^{(2)}+1}{(m_1+m_2)\mu^{(2)}}\Phi(z)$は非同次方程式(5)の特殊解になっている．

Step 4: 漸近展開公式の導出

次に，$R' < R$ととり，$\chi(z)$を$B_{R'}$で定義された正則関数と取り直すと，

$$\phi^{(1)'}(z) = e^{-\pi\epsilon} z^{-\frac{1}{2}-i\epsilon}\chi(z) + 2\frac{\tilde{\kappa}^{(2)}+1}{(m_1+m_2)\mu^{(2)}}\Phi(z), \tag{7}$$

$$\epsilon := \frac{1}{2\pi}\ln\left(\frac{m_1}{m_2}\right) = -\frac{1}{2\pi}\ln\left(\frac{1-\beta}{1+\beta}\right), \quad \beta := \frac{m_1-m_2}{m_1+m_2} \in \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

とかける．βはDundursパラメータ[11]と呼ばれ，媒質の不均質性を表す．これより，$\beta=0$と$m_1=m_2$は同値であることがわかり，均質媒質の場合は$\beta=0$となる．(7)と同様に，$\omega^{(1)'}(z)$，$\phi^{(2)'}(z)$，$\omega^{(2)'}(z)$も$\chi(z)$と$\Phi(z)$を用いて表せる．それらを応力関数と変位との関係式(3)に代入すると，求める開口き裂の場合の解の漸近展開が得られる．

命題 1 ([27]). （開口き裂の場合）$\exists \hat{a}_n \in \mathbb{C}$ *with*

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n r^{\frac{1}{2}+n} \mathbf{Re}\left[\hat{a}_n r^{-i\epsilon}\right] > 0, \tag{8}$$

$\hat{b}_n \in \mathbb{C}$，$\boldsymbol{c} = (c_1, c_2, c_0) \in \mathbb{R}^3$ *s.t.* $k=1,2$に対して，

$$\begin{aligned} \boldsymbol{u}^{(k)}(r,\theta) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{(-1)^k \epsilon\pi} r^{\frac{1}{2}+n}}{2\mu^{(k)}} \left\{\mathbf{Re}\left[\hat{a}_n r^{-i\epsilon}\right] \boldsymbol{P}_{1,n}^{(k)}(\theta) - \mathbf{Im}\left[\hat{a}_n r^{-i\epsilon}\right] \boldsymbol{Q}_{1,n}^{(k)}(\theta)\right\} \\ &\quad + \sum_{n=0}^{\infty} r^{n+1} \tilde{d}_k \left\{\mathbf{Re}\left[\hat{b}_n\right] \boldsymbol{R}_{1,n}^{(k)}(\theta) - \mathbf{Im}\left[\hat{b}_n\right] \boldsymbol{S}_{1,n}^{(k)}(\theta)\right\} + \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{c}, \end{aligned}$$

ここで $\tilde{d}_1 = \tilde{\kappa}^{(2)} + 1$，$\tilde{d}_2 = \tilde{\kappa}^{(1)} + 1$，$F(\boldsymbol{x})\boldsymbol{c} := (c_1 + c_0 x_2, c_2 - c_0 x_1)$ であり，

$$\boldsymbol{P}_{1,n}^{(k)}(\theta) = e^{\epsilon\theta} \begin{pmatrix} \left(\tilde{\kappa}^{(k)} + n + \frac{1}{2} - e^{-2\epsilon(\theta + (-1)^k \pi)}\right) \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta \\ \quad + \epsilon\left(\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta - \sin\left(n - \frac{3}{2}\right)\theta\right) - \left(n + \frac{1}{2}\right)\cos\left(n - \frac{3}{2}\right)\theta \\ \left(\tilde{\kappa}^{(k)} - n - \frac{1}{2} + e^{-2\epsilon(\theta + (-1)^k \pi)}\right) \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta \\ \quad + \epsilon\left(\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta - \cos\left(n - \frac{3}{2}\right)\theta\right) + \left(n + \frac{1}{2}\right)\sin\left(n - \frac{3}{2}\right)\theta \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{Q}_{1,n}^{(k)}(\theta) = e^{\epsilon\theta} \begin{pmatrix} \left(\tilde{\kappa}^{(k)} + n + \frac{1}{2} + e^{-2\epsilon(\theta + (-1)^k \pi)}\right) \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta \\ \quad - \epsilon\left(\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta - \cos\left(n - \frac{3}{2}\right)\theta\right) - \left(n + \frac{1}{2}\right)\sin\left(n - \frac{3}{2}\right)\theta \\ \left(-\tilde{\kappa}^{(k)} + n + \frac{1}{2} + e^{-2\epsilon(\theta + (-1)^k \pi)}\right) \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta \\ \quad + \epsilon\left(\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\theta - \sin\left(n - \frac{3}{2}\right)\theta\right) - \left(n + \frac{1}{2}\right)\cos\left(n - \frac{3}{2}\right)\theta \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{R}_{1,n}^{(k)}(\theta) = \begin{pmatrix} \tilde{\kappa}^{(k)} \cos(n+1)\theta - (n+1)\cos(n-1)\theta + (n+2)\cos(n+1)\theta \\ \tilde{\kappa}^{(k)} \sin(n+1)\theta + (n+1)\sin(n-1)\theta - (n+2)\sin(n+1)\theta \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{S}_{1,n}^{(k)}(\theta) = \begin{pmatrix} \tilde{\kappa}^{(k)} \sin(n+1)\theta - (n+1)\sin(n-1)\theta + n\sin(n+1)\theta \\ -\tilde{\kappa}^{(k)} \cos(n+1)\theta - (n+1)\cos(n-1)\theta + n\cos(n+1)\theta \end{pmatrix}.$$

この級数は $H^1(B_{R'}^{(k)})$ で絶対収束し，$B_{R'}^{(k)}$（$k = 1, 2$）で広義一様収束する．また，$n \geq 0$ に対して以下の評価式が成り立つ

$$|\hat{a}_n| \leq c\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\,(R')^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)}\|\nabla \boldsymbol{u}\|_{L^2(B_{R'})}, \quad |\hat{b}_n| \leq c\frac{1}{\sqrt{n+1}}\,(R')^{-(n+1)}\|\nabla \boldsymbol{u}\|_{L^2(B_{R'})}.$$

級数の特異項の係数 $\hat{a}_0$ は破壊力学では応力拡大係数と呼ばれ，き裂先端付近の応力分布の強さを表す量で材料の強度評価に用いられる重要なパラメータである．命題1の公式からわかるように，異相媒質の界面き裂の場合，媒質の不均質性から特異性指数は $\frac{1}{2} + n$ だけでなく振動する特異性 $r^{-i\epsilon}$ が現れることがわかる．媒質が均質の場合（このとき，$\epsilon = 0$ となる）は振動する特異性はなくなり，均質媒質の場合の公式（[18] 参照）と一致する．さらに非貫通条件 $[\![u_2]\!] > 0$ から導かれる係数の条件式(8) から $\mathbf{Re}[\hat{a}_0] \geq 0$ がわかり，[3] において別手法で導出された結果と一致する．

他の 2 つの場合：固着状態の場合，スリップ状態の場合についても同様に導出できる，詳しくは [27, 21, 22] 参照のこと．例えば，固着状態の場合は特異性指数は自然数となり，解はき裂先端近傍で解析的になることがわかる．また，スリップ状態の場合には方程式 $\cot(\pi\check{\gamma}) = \mp\tilde{f}\beta$ を満たす $\check{\gamma}$ に対して $(1 - \check{\gamma})$ が特異性指数となる．ここで符号 “$-$” はき裂先端近傍で $[\![u_1]\!] > 0$ のときであり，“$+$” は $[\![u_1]\!] < 0$ のときに対応する．他の境界条件から $\beta \neq 0$ のときは，$\check{\gamma} \in (0, 1/2)$ がわかり，開口き裂の場合と比べ，弱い特異性を有することがわかる．しかし，$\beta = 0$ の場合は $\check{\gamma} = 1/2$ となり，開口き裂の場合と同様の振舞いを示すことがわかる．

以上より，開口き裂の場合は $\boldsymbol{u} \notin H^{3/2}(B_{R'} \setminus \overline{\Gamma})$ であり，固着状態の場合は実解析的，スリップ状態の場合で $\beta \neq 0$ のときは，$\boldsymbol{u} \in H^{3/2}(B_{R'} \setminus \overline{\Gamma})$ が成り立つことがわかる．

3. 非線形弾性体におけるき裂問題

これまで扱ってきた線形弾性体を仮定した脆性破壊は現在まで線形破壊力学として体系化されてきた．しかし，破壊現象のようなき裂を含む物体の変形を理論的に解析する際，線形弾性体は適当であるのかという疑念が生じる．そもそも線形弾性体とはHookeの法則（弾性体内に発生する応力の各成分が歪み成分の線形結合で表現できるという法則）が成り立っている物体であり，一般にHooke の法則が成り立つには “歪みが微小” という前提条件がある．しかしき裂を含む線形弾性体を考えると，き裂先端で応力集中が起き，歪みも発散することがわかるため（例えば命題1）矛盾が生じ，破壊問題適用への限界を示唆している．そこでき裂を含む弾性体が満たす構成方程式を再度吟味し直し，より広汎な破壊現象に則したモデルの数理解析が必要である．

3.1. 線形弾性体方程式の導出とき裂問題における不条理

初めに前出の線形弾性体方程式の導出について考えたい．まず，$\boldsymbol{x}$を現時刻における空間座標とし，$\boldsymbol{X}$を基準時刻における物質座標とする．変位ベクトル$\boldsymbol{u}$は$\boldsymbol{u} := \boldsymbol{x} - \boldsymbol{X}$で定義される．連続体力学の基礎方程式として，質量保存則から導かれる連続の方程式

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} + \rho \mathrm{div}\boldsymbol{v} = 0 \tag{9}$$

と運動量保存則から導かれる平衡方程式

$$\rho\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \mathrm{div}\boldsymbol{\sigma} + \rho\boldsymbol{f} \tag{10}$$

がある．ρは物体の密度，$\boldsymbol{v} = \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial t}\big|_{\boldsymbol{X}} = \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t}\big|_{\boldsymbol{X}}$は速度ベクトル，$\boldsymbol{\sigma}$はCauchy応力，$\boldsymbol{f}$は外力を表す．線形弾性体では，以下の前提条件があることに注意が必要である．

- 歪みが微小（$\|\nabla\boldsymbol{u}\| \ll 1$）．これにより，様々な応力や歪みの定義が統一的に考えられ，線形化された歪みテンソル$\boldsymbol{e}(\boldsymbol{u}) := 1/2(\nabla\boldsymbol{u} + (\nabla\boldsymbol{u})^{\mathrm{T}})$が定義される．

- 応力－歪みの構成則が線形である．すなわち，$\boldsymbol{\sigma} = C\boldsymbol{e}$であり，$C = \{C_{ijkl}\}$は４階のテンソルで弾性テンソルと呼ばれる．これは１次元のいわゆるHookeの法則の高次元への拡張とも考えられる．

- 歪みが微小のため，密度変化も微小である．すなわち$\rho = \rho_0 + \rho'$，$\rho' \ll \rho_0$（ρ_0：定数）と考えられる．よって，平衡方程式(10)のρは定数ρ_0に置き換えられ，連続の方程式(9)を同時に解く必要はなくなる．(9)はρ'を求めるために用いる．

- $\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{v}$，$\partial\boldsymbol{v}/\partial t$も微小．これにより，(9)と(10)に現れる物質微分（$\mathrm{d}/\mathrm{d}t$）を$\partial/\partial t$とみなすことができる．

以上より，良く知られた次の線形弾性体方程式が導かれる；

$$\rho_0\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \sum_{j,k,l=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(C_{ijkl}\frac{\partial u_k}{\partial x_l}\right) + \rho_0 f_i \quad i = 1, 2, 3.$$

２次元均質等方的の場合で，慣性項と外力項を無視すると，(2)と一致する．

例えば第２節で考えたように，き裂を含むような２次元の線形弾性体での定常問題を考えると，一般にき裂先端で応力集中という現象が起きる（命題1）．これは，線形

弾性体の場合，前提条件から応力－歪み構成式は線形であるので，歪みもき裂先端で集中していることを意味し，もう１つの前提条件である微小歪みとの不条理が生じる．K. R. Rajagopal [40, 41] はこの不条理を指摘し，解消するためにより広範な弾性体モデル（*Implicit constitutive Theory* や *Strain-Limiting model*）を提案した．

3.2. 非線形弾性体モデル

基礎方程式(9)，(10) は連続体仮説と力学の原理から導かれるが [45]，応力－歪み構成則には現象論的な考察が必要である．従来，扱われてきた一般的な枠組みとして Cauchy 弾性体が知られており，これは $\boldsymbol{\sigma} = f(\boldsymbol{F})$ で定義される．ここで，$\boldsymbol{F}$ は変形勾配テンソルと呼ばれ，$\boldsymbol{F} := \partial \boldsymbol{x}/\partial \boldsymbol{X}$ で定義され $\det\boldsymbol{F} \neq 0$ を満たす．しかしこの枠組みでは許容できない簡単な例も存在し（[40] 参照），より広範な枠組みが必要となる．そこで，K. R. Rajagopal は陰関数で与えるような構成則（*Implicit constitutive Theory*）を提案した．これは，等方物質である弾性体とすると，$f(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{0}$ と表され，ここで $\boldsymbol{B} := \boldsymbol{F}\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}$ は左 Cauchy-Green 変形テンソルである．構成式が従うべき原理の１つに物質客観性の原理（*frame indiffernce*）があり，そのため f は等方テンソル値関数でなければならない．つまり，任意の直交テンソル $\boldsymbol{Q}$ に対して，$f(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{Q}\boldsymbol{B}\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}) = \boldsymbol{Q}f(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{B})\boldsymbol{Q}^{\mathrm{T}}$ が成立しなくてはならない．これにより，f は以下の表現式をもつことがわかる

$$
\begin{aligned}
f(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{B}) \;:=\; & \alpha_0 \boldsymbol{I} + \alpha_1 \boldsymbol{\sigma} + \alpha_2 \boldsymbol{B} + \alpha_3 \boldsymbol{\sigma}^2 + \alpha_4 \boldsymbol{B}^2 + \alpha_5(\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{B} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{\sigma}) \\
& + \alpha_6(\boldsymbol{\sigma}^2\boldsymbol{B} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{\sigma}^2) + \alpha_7(\boldsymbol{B}^2\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{B}^2) + \alpha_8(\boldsymbol{B}^2\boldsymbol{\sigma}^2 + \boldsymbol{\sigma}^2\boldsymbol{B}^2) = \boldsymbol{0}. \quad (11)
\end{aligned}
$$

ここで，係数 α_i （$i = 0, 1, \cdots, 8$）は ρ，$\mathrm{tr}\boldsymbol{\sigma}$，$\mathrm{tr}\boldsymbol{B}$，$\mathrm{tr}\boldsymbol{\sigma}^2$，$\mathrm{tr}\boldsymbol{B}^2$，$\mathrm{tr}\boldsymbol{\sigma}^3$，$\mathrm{tr}\boldsymbol{B}^3$，$\mathrm{tr}(\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{B})$，$\mathrm{tr}(\boldsymbol{\sigma}^2\boldsymbol{B})$，$\mathrm{tr}(\boldsymbol{B}^2\boldsymbol{\sigma})$，$\mathrm{tr}(\boldsymbol{\sigma}^2\boldsymbol{B}^2)$ に依存する量である．(11) は Cauchy 弾性体も含むより一般的なモデルであることがわかる．ここで，微小歪みを仮定すると，$\boldsymbol{B}$ を $2\boldsymbol{e}(\boldsymbol{u})$ で近似することができ，(11) の特別な場合として線形化された歪みを応力の関数として表した $\boldsymbol{e}(\boldsymbol{u}) = \Phi_1(\mathrm{tr}\boldsymbol{\sigma}, \mathrm{tr}\boldsymbol{\sigma}^2)I + \Phi_2(\mathrm{tr}\boldsymbol{\sigma}^2)\boldsymbol{\sigma}$ が導き出せる．ただし，$\Phi_1(0, \cdot) = 0$ とする．本稿では，*Strain-Limiting model* の１つの例として以下のモデルを考える（[41]）

$$
\boldsymbol{e}(\boldsymbol{u}) = \Psi(\boldsymbol{\sigma}) := \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2\mu(1 + \kappa|\boldsymbol{\sigma}|^s)^{1/s}}, \quad \left(|\boldsymbol{\sigma}| = \sqrt{\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\sigma}} = \sqrt{\sigma_{ij}\sigma_{ij}}\right). \tag{12}
$$

ここで μ，κ，$s > 0$ は材料定数である．このモデルの特徴は，微小歪みを仮定するが，応力に関しては拘束条件を課さないことである．実際、例えば１次元の場合を考えると，$|\boldsymbol{\sigma}| \to +\infty$ であっても $|\boldsymbol{e}(\boldsymbol{u})|$ は有界である．また $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{0}$ のとき $\boldsymbol{e}(\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{0}$ である．

3.3. 非線形弾性体モデルの境界値問題

前節で紹介した非線形弾性体モデル(12) のき裂を含む領域での境界値問題を考える [24].

$\Omega \subset \mathbb{R}^d$ （$d \in \{2, 3\}$）を有界領域とし，$\partial\Omega$ は Lipschitz であるとする．また，$\partial\Omega = \overline{\Gamma_N} \cup \overline{\Gamma_D}$ であって，$\Gamma_N \cap \Gamma_D = \emptyset$ と $\Gamma_D \neq \emptyset$ を満たすものとする．$\Gamma_c \subset \Omega$ を $d-1$ 次元向き付け可能な Lipschitz 多様体とする，これをき裂とみなす．$\Omega_c := \Omega \setminus \overline{\Gamma_c}$ と定義し，$\boldsymbol{n} = (n_1, ..., n_d)$ は $\partial\Omega, \Gamma_c$ での法線ベクトルを表す．そこで，以下の境界値問題を考える；与えられた $\boldsymbol{f} \in L^{\max\{2,p\}}(\Omega_c; \mathbb{R}^d)$，$\boldsymbol{g} \in L^2(\Gamma_N; \mathbb{R}^d)$，$\Psi : \mathrm{Sym}(\mathbb{R}^{d\times d}) \to \mathrm{Sym}(\mathbb{R}^{d\times d})$ に対して，次の問題 $(**)$ を満たす $\boldsymbol{u} \in H^1(\Omega_c; \mathbb{R}^d)$，$\boldsymbol{e}(\boldsymbol{u}) = \{e_{ij}(\boldsymbol{u})\}_{i,j=1}^d \in L^{p'}(\Omega_c; \mathrm{Sym}(\mathbb{R}^{d\times d}))$,

$\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_{ij}\}_{i,j=1}^d \in L^p(\Omega_c; \mathrm{Sym}(\mathbb{R}^{d\times d}))$，$(p \in [1,\infty), p' \in (1,\infty], \frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1)$ を求めよ．

$$
(**)\left\{
\begin{array}{ll}
-\mathrm{div}\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{f} & \text{in} \quad \Omega_c,\\
\Psi(\boldsymbol{\sigma}) = \boldsymbol{e}(\boldsymbol{u}) := \frac{1}{2}(\nabla\boldsymbol{u} + (\nabla\boldsymbol{u})^{\mathrm{T}}) & \text{in} \quad \Omega_c,\\
\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0} & \text{on} \quad \Gamma_D,\\
\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{n} = \boldsymbol{g} & \text{on} \quad \Gamma_N,\\
[\![\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}]\!] \geq 0, \quad [\![\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{n}}]\!] = 0, \quad \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{n}}[\![\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}]\!] = 0, \quad \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{n}} \leq 0, \quad \boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{\tau}} = \boldsymbol{0} & \text{on} \quad \Gamma_c^{\pm}.
\end{array}
\right.
$$

ここで，$[\![\cdot]\!] := \cdot|_{\Gamma_c^+} - \cdot|_{\Gamma_c^-}$，$\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{n}} := (\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{n})\cdot\boldsymbol{n}$，$\boldsymbol{\sigma}_{\boldsymbol{\tau}} := \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{n} - \sigma_{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{n}$ とする．問題 $(**)$ において第１式は外力 $\boldsymbol{f}$ がかけられた場合の定常の平衡方程式(10)，第２式は応力－歪みの構成則，第３式は Γ_D 上の Dirichlet 条件，第４式は Γ_N 上に表面力 $\boldsymbol{g}$ を課した Neumann 条件をそれぞれ表している．き裂 Γ_c 上では問題 $(*)$ での非貫通条件を考えるが，問題 $(**)$ では摩擦力ゼロとして考えている．この問題 $(**)$ の弱形式を以下で定義する．

$$
[\![\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}]\!] \geq 0 \quad \text{on} \quad \Gamma_c, \qquad \boldsymbol{u} = \boldsymbol{0} \quad \text{on} \quad \Gamma_D, \qquad \Psi(\boldsymbol{\sigma}) = \boldsymbol{e}(\boldsymbol{u}) \quad \text{in} \quad \Omega_c, \tag{13a}
$$

$$
\int_{\Omega_c} \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{e}(\overline{\boldsymbol{u}} - \boldsymbol{u})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \geq \int_{\Omega_c} \boldsymbol{f}\cdot(\overline{\boldsymbol{u}} - \boldsymbol{u})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} + \int_{\Gamma_N} \boldsymbol{g}\cdot(\overline{\boldsymbol{u}} - \boldsymbol{u})\,\mathrm{d}S_{\boldsymbol{x}} \tag{13b}
$$

$$
\forall\overline{\boldsymbol{u}} \in H^1(\Omega_c;\mathbb{R}^d) \text{ s.t. } \overline{\boldsymbol{u}}|_{\Gamma_D} = \boldsymbol{0},\ [\![\overline{\boldsymbol{u}}\cdot\boldsymbol{n}]\!] \geq 0 \text{ on } \Gamma_c,\ \boldsymbol{e}(\overline{\boldsymbol{u}}) \in L^{p'}(\Omega_c; \mathrm{Sym}(\mathbb{R}^{d\times d})).
$$

3.4. (13) の解の存在について

まず，(12) で定めた Ψ は以下の性質をもっていることに注意する．

補題 1. (i) Ψ は狭義単調で連続であり，つまり次の不等式を満たす

$$
\frac{2^{-(1+1/s)}\mu^{-1}|\boldsymbol{\sigma}^1 - \boldsymbol{\sigma}^2|^2}{1+\kappa^{1+1/s}(|\boldsymbol{\sigma}^1| + |\boldsymbol{\sigma}^2|)^{1+s}} \leq \big(\Psi(\boldsymbol{\sigma}^1) - \Psi(\boldsymbol{\sigma}^2)\big) : (\boldsymbol{\sigma}^1 - \boldsymbol{\sigma}^2) \leq \frac{|\boldsymbol{\sigma}^1 - \boldsymbol{\sigma}^2|^2}{\mu}.
$$

(ii) Ψ は一様に有界である．すなわち，$|\Psi(\boldsymbol{\sigma})| \leq \dfrac{1}{2\mu}\min\left\{\dfrac{1}{\kappa^{1/s}}, |\boldsymbol{\sigma}|\right\}$ を満たす．

(iii) $\int_{\Omega_c} \Psi(\boldsymbol{\sigma}) : \boldsymbol{\sigma}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$ は強圧的であり，次の不等式を満たす．

$$
\frac{1}{2\mu c_s \kappa^{1/s}}\Big(\int_{\Omega_c}|\boldsymbol{\sigma}|\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} - \frac{|\Omega|}{\kappa^{1/s}}\Big) \leq \int_{\Omega_c}\Psi(\boldsymbol{\sigma}) : \boldsymbol{\sigma}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}, \quad c_s := \left\{\begin{array}{ll} 2^{1/s-1} & (s\in(0,1)),\\ 1 & (s \geq 1).\end{array}\right.
$$

証明は [24] および [6] を参照のこと．補題 1(i) の狭義単調性から(13) における応力テンソル $\boldsymbol{\sigma}$ の一意性は導かれるものの，L^1 におけるアプリオリ評価

$$
\|\boldsymbol{\sigma}\|_{L^1(\Omega_c)} \leq \frac{|\Omega|}{\kappa^{1/s}} + \frac{c_s|\Omega|}{\sqrt{c_{\mathrm{KP}}}}\big(\|\boldsymbol{f}\|_{L^2(\Omega_c)} + \|\boldsymbol{g}\|_{L^2(\Gamma_N)}\big) \tag{14}
$$

しか得られない．ここで，c_{KP} は Korn-Poincaré の不等式に現れる正定数である．この問題の最も困難な点は(14) のように反射的でない L^1 空間でしか評価できず，一般的な解の存在証明手法（例えば [32] 参照）が使えないことである．また，き裂の存在や方

程式がシステムのため，既存の解の正則性を改善させる手法（[6, 15] など参照）も使えない状況である．そこで問題の正則化を考える．

今，正則化パラメータ $\varepsilon > 0$ に対して，$\boldsymbol{u}^{\varepsilon} \in H^1(\Omega_c; \mathbb{R}^d)$，$\boldsymbol{e}(\boldsymbol{u}^{\varepsilon}) \in L^2(\Omega_c; \mathrm{Sym}(\mathbb{R}^{d\times d}))$，$\boldsymbol{\sigma}^{\varepsilon} \in L^2(\Omega_c; \mathrm{Sym}(\mathbb{R}^{d\times d}))$ を求める以下の問題を考える．

$$\boldsymbol{u}^{\varepsilon} = \boldsymbol{0} \quad \text{on} \quad \Gamma_D, \qquad \varepsilon\boldsymbol{\sigma}^{\varepsilon} + \Psi(\boldsymbol{\sigma}^{\varepsilon}) = \boldsymbol{e}(\boldsymbol{u}^{\varepsilon}) \quad \text{in} \quad \Omega_c, \tag{15a}$$

$$\int_{\Omega_c} (\varepsilon e(\boldsymbol{u}^{\varepsilon}) + \boldsymbol{\sigma}^{\varepsilon}) : \boldsymbol{e}(\overline{\boldsymbol{u}})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} + \frac{1}{\varepsilon}\int_{\Gamma_c} \min\{0, [\![\boldsymbol{u}^{\varepsilon}\cdot\boldsymbol{n}]\!]\}\,[\![\overline{\boldsymbol{u}}\cdot\boldsymbol{n}]\!]\,\mathrm{d}S_{\boldsymbol{x}} \tag{15b}$$
$$= \int_{\Omega_c} \boldsymbol{f}\cdot\overline{\boldsymbol{u}}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} + \int_{\Gamma_N} \boldsymbol{g}\cdot\overline{\boldsymbol{u}}\,\mathrm{d}S_{\boldsymbol{x}}, \quad \forall\overline{\boldsymbol{u}} \in H^1(\Omega_c; \mathbb{R}^d) \quad s.t. \quad \overline{\boldsymbol{u}}|_{\Gamma_D} = \boldsymbol{0}.$$

各 $\varepsilon > 0$ に対して，(15) の解の一意存在性は Browder-Minty 定理から直ちに導かれ，ε に一様なアプリオリ評価が得られる（[24] または [28]）．すると以下の定理を得る．

定理 1 ([24]). (i) 正則化された問題(15) の解の $\varepsilon \searrow 0^+$ としたときの弱集積点として決定される，これを一般化された解と呼ぶ，$\boldsymbol{u} \in H^1(\Omega_c; \mathbb{R}^d)$，$\boldsymbol{e}(\boldsymbol{u}) \in L^2(\Omega_c; \mathrm{Sym}(\mathbb{R}^{d\times d}))$，$\boldsymbol{\sigma} \in \mathcal{M}^1(\Omega; \mathrm{Sym}(\mathbb{R}^{d\times d}))$ は以下を満たす．

$$[\![\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{n}]\!] \geq 0 \quad \text{on} \quad \Gamma_c, \quad \boldsymbol{u} = \boldsymbol{0} \quad \text{on} \quad \Gamma_D, \tag{16a}$$

$$\int_{\Omega} \sigma : e(\overline{\boldsymbol{u}})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \geq \int_{\Omega_c} \boldsymbol{f}\cdot\overline{\boldsymbol{u}}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} + \int_{\Gamma_N} \boldsymbol{g}\cdot\overline{\boldsymbol{u}}\,\mathrm{d}S_{\boldsymbol{x}} \quad \forall\overline{\boldsymbol{u}} \in H^1(\Omega_c; \mathbb{R}^d) \tag{16b}$$

$s.t.$ $\overline{\boldsymbol{u}}|_{\Gamma_D} = \boldsymbol{0}$, $[\![\overline{\boldsymbol{u}}\cdot\boldsymbol{n}]\!] \geq 0$ on Γ_c, $e(\overline{\boldsymbol{u}}) \in C_c(\Omega; \mathrm{Sym}(\mathbb{R}^{d\times d}))$；$\forall\overline{\sigma} \in C_c(\Omega; \mathrm{Sym}(\mathbb{R}^{d\times d}))$

$$\int_{\Omega} (\sigma - \overline{\sigma}) : \Psi(\overline{\sigma})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} + \int_{\Omega_c} e(\boldsymbol{u}) : \overline{\sigma}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \leq \int_{\Omega_c} \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{u}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} + \int_{\Gamma_N} \boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{u}\,\mathrm{d}S_{\boldsymbol{x}}. \tag{16c}$$

(ii) もし，$\boldsymbol{\sigma} \in L^p(\Omega_c; \mathrm{Sym}(\mathbb{R}^{d\times d}))$，$\boldsymbol{e}(\boldsymbol{u}) \in L^{p'}(\Omega_c; \mathrm{Sym}(\mathbb{R}^{d\times d}))$，$p, p' \in (1, \infty)$ $(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1)$ ならば，一般化された解 $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{e}(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{\sigma})$ は $(**)$ の弱形式(13) の解となる．

注意 1. M. Bulíček らは [6] で面外変形の場合にこれに関連するモデル方程式の V ノッチ領域における境界値問題において弱解の存在性を証明している．しかし，ここでの手法はき裂がある場合や支配方程式がシステムの場合（面内変形）には適用できない．他の非線形楕円型方程式に対してもき裂を含む領域においては困難がある（例えば [15] 参照）．よって本問題の解の正則性については未解決である．

注意 2. 定理 1 の (ii) において，境界における応力ベクトル $\boldsymbol{\sigma n}$ は定義され，$\boldsymbol{\sigma n} \in W^{-1/p',p}(\Gamma_N; \mathbb{R}^d) \times W^{-1/p',p}(\Gamma_c; \mathbb{R}^d)$, $p, p' \in (1, \infty)$ $(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1)$ である．

4. 今後の展望

4.1. Strain-Limiting model における応力場のき裂先端における漸近挙動

２次元線形弾性体の場合で扱った Goursat-Kolosov-Muskhelishvili の応力関数による手法は非線形弾性体の場合は使えず，新たなアイデアが必要である．しかし，[5] や [9] で用いられているホドグラフ変換や Legendre 変換により，線形偏微分方程式に帰着させ，解析解を求める方法が知られているので，検討中である．しかし，その場合，単純な境界条件や領域に対してのみ有効である．

4.2. 粘弾性体への応用

定理1の結果を非線形粘弾性体に拡張する．ここでは，Kelvin-Voigt モデルを採用し，以下の擬定常の境界値問題を考える [26].

与えられた $\boldsymbol{f} \in C([0,T]; L^2(\Omega_c;\mathbb{R}^d))$, $\boldsymbol{g} \in C([0,T]; L^2(\Gamma_N;\mathbb{R}^d))$，$\boldsymbol{u}^0 \in H^1(\Omega_c;\mathbb{R}^d)$ に対して，$\boldsymbol{u} \in C([0,T]; H^1(\Omega_c;\mathbb{R}^d))$, $\boldsymbol{e}(\boldsymbol{u}) \in C^1([0,T]; L^\infty(\Omega_c;\mathrm{Sym}(\mathbb{R}^{d\times d})))$，$\boldsymbol{\sigma} \in C([0,T]; L^2(\Omega_c;\mathrm{Sym}(\mathbb{R}^{d\times d})))$ s.t. $\boldsymbol{u}(0,\cdot) = \boldsymbol{u}^0$ in Ω_c,

$$\begin{cases} -\mathrm{div}\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{f} & \text{in} \quad (0,T)\times\Omega_c, \\ \boldsymbol{e}(\boldsymbol{u}) + \alpha\boldsymbol{e}(\dot{\boldsymbol{u}}) = \Psi(\boldsymbol{\sigma}) & \text{in} \quad (0,T)\times\Omega_c, \\ \boldsymbol{u} = \boldsymbol{0} & \text{on} \quad (0,T)\times\Gamma_D, \\ \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{n} = \boldsymbol{g} & \text{on} \quad (0,T)\times\Gamma_N, \\ \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{n} = \boldsymbol{0} & \text{on} \quad (0,T)\times\Gamma_c^{\pm}. \end{cases}$$

を求める．ここで，Ψ として前節で用いた(12) を想定して良いが，補題1，つまり，単調性，連続性，有界性，強圧性を満たしていれば十分であるので，一般に下記の条件を満たすものであればよい．$\exists M_1, M_2, M_4 > 0, M_3 \geq 0$ s.t. $\forall\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\sigma}^1, \boldsymbol{\sigma}^2 \in \mathrm{Sym}(\mathbb{R}^{d\times d})$,

$$\begin{aligned} |\Psi(\boldsymbol{\sigma})| &\leq M_1, \\ 0 \leq \big(\Psi(\boldsymbol{\sigma}^1) - \Psi(\boldsymbol{\sigma}^2)\big) : (\boldsymbol{\sigma}^1 - \boldsymbol{\sigma}^2) &\leq M_2|\boldsymbol{\sigma}^1 - \boldsymbol{\sigma}^2|^2, \\ -M_3 + M_4\sum_{i,j=1}^{d}|\sigma_{ij}| &\leq \Psi(\boldsymbol{\sigma}) : \boldsymbol{\sigma}. \end{aligned}$$

このような条件を満たす Ψ の(12) 以外の例については [25] を参照されたい．また，生体科学に現れる他の粘弾性体モデルへの応用も今後の課題である．

4.3. 地震における断層破壊への応用

地震における断層破壊もき裂の問題と考えることはできるが，工学における破壊との決定的な違いは断層面での摩擦による影響と，そのため動的な問題を扱う必要があるということである．また，地震の時空間的スケールや破壊伝播速度の多様性は工学諸分野で確立されたモデルで容易に説明できるものではなく，大きく異なる．地震学においては，空間スケールについて，規模の異なる個々の地震が互いに相似であること，すなわちスケール不変な物理量が存在することなどが提唱されており，このことは地震の数理モデルを無次元化によって統一的に解釈できる可能性を示唆している．また，個々の地震においては破壊が伝播する速度が岩石のS波（横波）速度の 40-100 %相当と様々であることが知られており，いかにしてその値が決定されるのかは重大な関心事である．それに対して1960年代から，B. V. Kostrov らによって様々なモデルの解析解が導出され（[2, 14, 30, 46]），現在も地震学においては用いられているが，数学的理論が整っているとは言い難い状況である．そこで，断層破壊について，妥当な物理的条件下で数理モデル化し，それに対する数学理論を構築することが，破壊伝播速度や滑り速度といった重要な震源パラメータの決定機構の解明につながると考えている．これによって，破壊現象の物理に基づいた現実的な想定地震シナリオが提唱でき，災害予測のための入力である強震動シミュレーションの基盤確立への貢献が期待できる．

参考文献

[1] S. Agmon, A. Douglis, L. Nirenberg, Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions, I, *Comm. Pure Appl. Math.*, **12**(1959), 623–727; II, ibid., **17**(1964), 35–92.

[2] K. Aki, P. G. Richards, *Quantitative Seismology*, 2nd edn, University Science Books, Sausalito, California, 2002.

[3] M. Bach, A. M. Khludnev, V. A. Kovtunenko, Derivatives of the Energy Functional for 2D-Problems with a Crack under Signorini and Friction Conditions, *Math. Meth. Appl. Sci.*, **23**(2000), 515–534.

[4] M. Borsuk, V. Kondratiev, *Elliptic Boundary Value Problems of Second Order in Piecewise Smooth Domains*, Elsevier Science B.V., Amsterdam, 2006.

[5] K. B. Broberg, *Cracks and Fracture*, Academic Press, San Diego, 1999.

[6] M. Bulíček, J. Málek, K. R. Rajagopal, J. R. Walton, Existence of solutions for the anti-plane stress for a new class of "strain-limiting" elastic bodies, *Calc. Var. and PDE*, **54**(2015), 2115–2147.

[7] M. Costabel, M. Dauge, Stable asymptotics for elliptic systems on plane domains with corners, *Comm. PDE.*, **19**(1994), 1677–1726.

[8] M. Costabel, M. Dauge, Crack Singularities for General Elliptic Systems, *Math. Nachr.*, **235**(2002), 29–49.

[9] R. Courant, K. O. Friedrichs, *Supersonic Flow and Shock Waves*, Springer-Verlag, New York, 1976.

[10] F. Demengel, G. Demengel, *Functional Spaces for the Theory of Elliptic Partial Differential Equations*, Springer, London, 2012.

[11] J. Dundurs, M. Comninou, Some consequences of the inequality conditions in contact and crack problems, *J. Elast.*, **9**(1979), 71–82.

[12] A. H. England, *Complex Variable Methods in Elasticity*, Wiley, New York, 1971.

[13] G. Fichera, *Existence theorems in elasticity.* In: C. Truesdell (ed.) volume VIa/2 of Handbuch der Physik, Springer-Verlag, Berlin, 1972.

[14] L. B. Freund, *Dynamic fracture mechanics*, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

[15] D. Gilbarg, N. S. Trudinger, *Elliptic partial differential equations of second order*, Grundlehren Math. Wiss. 224, Springer-Verlag, Berlin, 1983.

[16] P. Grisvard, *Boundary Value Problems in Non-Smooth Domains*, Pitman, London 1985.

[17] P. Grisvard, *Singularities in boundary value problems*, volume 22 of Research in Applied Mathematics, Masson, Paris 1992.

[18] M. Ikehata, H. Itou, Reconstruction of a linear crack in an isotropic elastic body from a single set of measured data, *Inverse Prob.*, **23**(2007), 589–607.

[19] M. Ikehata, H. Itou, An inverse problem for a linear crack in an anisotropic elastic body and the enclosure method, *Inverse Prob.*, **24**(2008), 025005(21pp).

[20] M. Ikehata, H. Itou, Extracting the support function of a cavity in an isotropic elastic body from a single set of boundary data, *Inverse Prob.* **25**(2009), 105005(21pp).

[21] H. Itou, On convergent expansions of solutions of the linearized elasticity equation near singular points, *AIP Conf. Proc.*, **1389**(2011), 465–468.

[22] H. Itou, *On singularities in 2D linearized elasticity.* In: H. Itou, M. Kimura, V. Chalupecky, K. Ohtsuka, D. Tagami, A. Takada (Eds.) Mathematical Analysis of Continuum Mechanics and Industrial Applications -Proceedings of the International Conference CoMFoS15- (Mathematics for Industry Volume 26), Springer Singapore, 2017, 35–47.

[23] H. Itou, A. M. Khludnev, E. M. Rudoy, A. Tani, Asymptotic behaviour at a tip of a rigid line inclusion in linearized elasticity, *Z. Angew. Math. Mech.*, **92**(2012), 716–730.

[24] H. Itou, V. A. Kovtunenko, K. R. Rajagopal, Nonlinear elasticity with limiting small strain for cracks subject to non-penetration, *Math. Mech. Solids*, **22**(2017), 1334–1346.

[25] H. Itou, V. A. Kovtunenko, K. R. Rajagopal, Contacting crack faces within the context of bodies exhibiting limiting strains, to appear in *JSIAM Letters*.

[26] H. Itou, V. A. Kovtunenko, K. R. Rajagopal, On the states of stress and strain adjacent to a crack in a strain-limiting viscoelastic body, to appear in *Math. Mech. Solids*, DOI: 10.1177/1081286517709517.

[27] H. Itou, V. A. Kovtunenko, A. Tani, The interface crack with Coulomb friction between two bonded dissimilar elastic media, *Appl. Math.*, **56**(2011), 69–97.

[28] A. M. Khludnev, V. A. Kovtunenko, *Analysis of Cracks in Solids*, WIT Press, Southampton-Boston, 2000.

[29] D. Knees, A. Schröder, Global spatial regularity for elasticity models with cracks, contact and other nonsmooth constraints, *Math. Methods Appl. Sci.* **35**(2012), 1859–1884.

[30] B. V. Kostrov, S. Das, *Principles of earthquake source mechanics*, Cambridge University Press, Cambridge, 1988.

[31] V. A. Kozlov, V. G. Maz'ya and J. Rossmann, *Elliptic boundary value problems in domains with point singularities*, Mathematical Surveys and Monographs 52, 1997.

[32] O. Ladyzhenskaya, N. Ural'tseva, *Linear and Quasilinear Elliptic Equations*, Academic Press, New York, 1968.

[33] L. D. Landau, E. M. Lifshitz, *Theory of Elasticity*, Pergamon, New York, 1986.

[34] N. P. Lazarev, H. Itou, N. V. Neustroeva, Fictitious domain method for an equilibrium problem of the Timoshenko-type plate with a crack crossing the external boundary at zero angle, *Japan J. Indust. Appl. Math.*, **33**(2016), 63–80.

[35] A. E. H. Love, *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1952.

[36] V. Maz'ya, S. Nazarov, B. Plamenevskii, Asymptotic Theory of Elliptic Boundary Value Problems in Singularly Perturbed Domains, vol. II., Birkhauser, Basel, 2000.

[37] N. I. Muskhelishvili, *Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity*, Noordhoff, Groningen, 1963.

[38] N. I. Muskhelishvili, *Singular Integral Equations*, Noordhoff, Groningen, 1972.

[39] K. Ohtsuka, M. Kimura, Differentiability of potential energies with a parameter and shape sensitivity analysis for nonlinear case: the p-Poisson problem, *Jpn. J. Ind. Appl. Math.*, **29**(2012), 23–35.

[40] K. R. Rajagopal, The elasticity of elasticity, *Z. Angew. Math. Phys.*, **58**(2007), 309–317.

[41] K. R. Rajagopal, On a new class of models in elasticity, *Math. Comput. Appl.*, **15**(2010), 506–528.

[42] J. R. Rice, Elastic fracture mechanics concepts for interfacial cracks, *J. Appl. Mech.*, **55**(l988), 98–103.

[43] G. C. Sih, *Mathematical theories of brittle fracture*, in: H. Liebowitz (ed.) Fracture vol. 2, New York: Academic, 1968, 67–190.

[44] H. Triebel, *Spaces of Besov-Hardy-Sobolev type*, Teubner-Texte zur Mathematik, Teubner, 1978.

[45] C. Truesdell, W. Noll, *The Non-linear Field Theories of Mechanics*, Springer, Berlin, 2004.

[46] A. Udias, R. Madariaga, E. Buforn, *Source Mechanisms of Earthquakes: Theory and Practice*, Cambridge University Press, Cambridge, 2014.