

特別講演

Dispersive estimates for rotating fluids and stably stratified fluids

高田 了 (九州大学 大学院数理学研究院)*

1. 導入

3 次元全空間において, 非圧縮性粘性流体の運動を記述する次の Navier-Stokes 方程式 (1.1) および Boussinesq 方程式 (1.2) を考察する.

$$\begin{cases} \partial_t v + (v \cdot \nabla)v = \Delta v - \nabla q & t > 0, x \in \mathbb{R}^3, \\ \nabla \cdot v = 0 & t > 0, x \in \mathbb{R}^3, \end{cases} \quad (1.1)$$

$$\begin{cases} \partial_t v + (v \cdot \nabla)v = \Delta v - \nabla q + \eta e_3 & t > 0, x \in \mathbb{R}^3, \\ \partial_t \eta + (v \cdot \nabla)\eta = \Delta \eta & t > 0, x \in \mathbb{R}^3, \\ \nabla \cdot v = 0 & t > 0, x \in \mathbb{R}^3. \end{cases} \quad (1.2)$$

ここで, $v = (v_1(t, x), v_2(t, x), v_3(t, x))^T$, $q = q(t, x)$, $\eta = \eta(t, x)$ はそれぞれ流体の速度ベクトル, 圧力および温度を表す未知関数であり, $e_3 = (0, 0, 1)^T$ は鉛直方向の単位ベクトルを表す.

本講演では, 方程式系 (1.1), (1.2) の解をそれぞれ回転流および静水圧平衡の周りにおいて考察し, 回転と安定成層が有する分散性の解析とその初期値問題への応用を目標とする. まずは回転流について考察する. 方程式 (1.1) は次の定常解 (回転流) (v_Ω, q_Ω) を持つことが知られている:

$$v_\Omega(x) = \Omega e_3 \times x, \quad q_\Omega(x) = \frac{\Omega^2}{2}(x_1^2 + x_2^2).$$

ここで, $\Omega \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ は回転の角周波数であり, q_Ω は遠心力に対応した圧力項である. 回転行列 $O(t)$ を

$$O(t) = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とする. 方程式 (1.1) の解 (v, q) に対して,

$$u(t, x) = O(\Omega t)^T v(t, O(\Omega t)x) - v_\Omega(x), \quad p(t, x) = q(t, O(\Omega t)x) - q_\Omega(x)$$

と変換し, 回転流 (v_Ω, q_Ω) からの摂動 (u, p) を回転座標系において考察する. このとき, (u, p) は以下の Coriolis 力付き Navier-Stokes 方程式を満たすことが分かる.

$$\begin{cases} \partial_t u + (u \cdot \nabla)u = \Delta u - 2\Omega e_3 \times u - \nabla p & t > 0, x \in \mathbb{R}^3, \\ \nabla \cdot u = 0 & t > 0, x \in \mathbb{R}^3. \end{cases} \quad (1.3)$$

本研究は科研費 (課題番号:15H05436) の助成を受けたものである。

* 〒819-0395 福岡県福岡市西区元岡 744 九州大学 大学院数理学研究院
e-mail: takada@math.kyushu-u.ac.jp

次に、方程式 (1.2) について考察する．方程式 (1.2) は、静水圧平衡 $q'_s = \eta_s$ を満たす次の定常解 (v_s, η_s, q_s) を持つことが知られている：

$$v_s \equiv 0, \quad \eta_s(x_3) = a + bx_3, \quad q_s(x_3) = c + ax_3 + \frac{b}{2}x_3^2 \quad (a, b, c \in \mathbb{R}).$$

本講演では安定成層，すなわち $b = \eta'_s > 0$ の場合を考察する．以下，浮力周波数を $N = \sqrt{b}$ とする．方程式 (1.2) の解 (η, q) に対して，定常解 (η_s, q_s) からの摂動を，

$$\theta(t, x) = \eta(t, x) - \eta_s(x_3), \quad p(t, x) = q(t, x) - q_s(x_3)$$

とおく．このとき， (v, θ, p) は以下の方程式を満たすことが分かる．

$$\begin{cases} \partial_t v + (v \cdot \nabla)v = \Delta v - \nabla p + \theta e_3 & t > 0, x \in \mathbb{R}^3, \\ \partial_t \theta + (v \cdot \nabla)\theta = \Delta \theta - N^2 v_3 & t > 0, x \in \mathbb{R}^3, \\ \nabla \cdot v = 0 & t > 0, x \in \mathbb{R}^3. \end{cases} \quad (1.4)$$

本講演では，方程式系 (1.3), (1.4) に対して，歪対称な線形項である Coriolis 力 $\Omega e_3 \times u$ および安定成層 $(\theta e_3, -N^2 v_3)^T$ が有する分散性の解析を目標とする．以下，先行研究および主結果を述べるために記号を導入する．全空間における Helmholtz 射影作用素を

$$\mathbb{P} = (\delta_{jk} + R_j R_k)_{1 \leq j, k \leq 3} \quad \text{または} \quad \mathbb{P} = \left(\frac{(\delta_{jk} + R_j R_k)_{1 \leq j, k \leq 3}}{0} \middle| \begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} \right)$$

によって定義する．ここで， $R_j = -\partial_{x_j}(-\Delta)^{-1/2}$ は Riesz 変換を表す．次に，Coriolis 力および安定成層に対応した歪対称定数行列 J_r, J_s をそれぞれ

$$J_r = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_s = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

とする．また，方程式 (1.4) において未知関数を $u = (v, \theta/N)^T$ とし， $\tilde{\nabla} = (\nabla, 0)^T$ とおく．Helmholtz 射影作用素を作用させることで，方程式 (1.3), (1.4) をそれぞれ次の形に書き換え，その初期値問題を考察する（以下，角周波数 Ω の係数は 1 とする）：

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u + \Omega \mathbb{P} J_r \mathbb{P} u + \mathbb{P}(u \cdot \nabla u) = 0, & \nabla \cdot u = 0, \\ u(0, x) = u_0(x), \end{cases} \quad (1.5)$$

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u + N \mathbb{P} J_s \mathbb{P} u + \mathbb{P}(u \cdot \tilde{\nabla} u) = 0, & \tilde{\nabla} \cdot u = 0, \\ u(0, x) = u_0(x) = (v_0(x), \theta_0(x)/N). \end{cases} \quad (1.6)$$

このとき直接計算により，歪対称な線形項 $\mathbb{P} J_r \mathbb{P}$ および $\mathbb{P} J_s \mathbb{P}$ の固有周波数はそれぞれ

$$\begin{aligned} \sigma \left[-\widehat{\mathbb{P} J_r \mathbb{P}} \right] &= \{\pm i p_r(\xi), 0\}, \quad p_r(\xi) = \frac{\xi_3}{|\xi|}, \\ \sigma \left[-\widehat{\mathbb{P} J_s \mathbb{P}} \right] &= \{\pm i p_s(\xi), 0, 0\}, \quad p_s(\xi) = \frac{|\xi_h|}{|\xi|}, \quad \xi_h = (\xi_1, \xi_2) \end{aligned}$$

で与えられる．対応する固有ベクトルを計算することで，線形作用素 $-\Delta + \Omega \mathbb{P} J_r \mathbb{P}$ および $-\Delta + N \mathbb{P} J_s \mathbb{P}$ から生成される半群に対して次の表示が得られる．

$$\begin{aligned} e^{t(\Delta - \Omega \mathbb{P} J_r \mathbb{P})} u_0 &= \frac{1}{2} e^{t\Delta} e^{i\Omega t p_r(D)} (I + \mathcal{R}) u_0 + \frac{1}{2} e^{t\Delta} e^{-i\Omega t p_r(D)} (I - \mathcal{R}) u_0 \\ e^{t(\Delta - N \mathbb{P} J_s \mathbb{P})} u_0 &= e^{t\Delta} e^{iN t p_s(D)} P_+ u_0 + e^{t\Delta} e^{-iN t p_s(D)} P_- u_0 + e^{t\Delta} P_0 u_0. \end{aligned}$$

ここで， I は 3×3 単位行列であり，

$$\begin{aligned} \mathcal{R} &= \begin{pmatrix} 0 & R_3 & -R_2 \\ -R_3 & 0 & R_1 \\ R_2 & -R_1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \widehat{P_j u_0}(\xi) = \langle \widehat{u_0}(\xi), a_j(\xi) \rangle_{\mathbb{C}^4} a_j(\xi) \quad (j = \pm, 0), \\ a_+(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2}|\xi_h||\xi|} \begin{pmatrix} i\xi_1\xi_3 \\ i\xi_2\xi_3 \\ -i|\xi_h|^2 \\ |\xi_h||\xi| \end{pmatrix}, \quad a_-(\xi) = \overline{a_+(\xi)}, \quad a_0(\xi) = \frac{1}{|\xi_h|} \begin{pmatrix} -\xi_2 \\ \xi_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (1.7)$$

と定義する． $\{a_\pm(\xi), a_0(\xi)\}$ はそれぞれ $-\widehat{\mathbb{P} J_s \mathbb{P}}$ の固有値 $\{\pm i p_s(\xi), 0\}$ に対する固有ベクトルである．また，時間発展作用素 $e^{\pm i\Omega t p_r(D)}$ および $e^{\pm iN t p_s(D)}$ は次で定義される Fourier 乗法作用素である：

$$e^{\pm i\Omega t p_r(D)} f(x) = \int_{\mathbb{R}^3} e^{ix \cdot \xi \pm i\Omega t p_r(\xi)} \widehat{f}(\xi) d\xi, \quad p_r(\xi) = \frac{\xi_3}{|\xi|}, \quad (1.8)$$

$$e^{\pm iN t p_s(D)} f(x) = \int_{\mathbb{R}^3} e^{ix \cdot \xi \pm iN t p_s(\xi)} \widehat{f}(\xi) d\xi, \quad p_s(\xi) = \frac{|\xi_h|}{|\xi|}. \quad (1.9)$$

2. 先行研究および主結果

まずは Coriolis 力付き Navier-Stokes 方程式 (1.5) に関する先行研究を述べる．Babin-Mahalov-Nicolaenko [1] は周期境界条件 $\mathbb{T}^3$ において (1.5) を考察し，任意の初期速度場 $u_0 \in H^s(\mathbb{T}^3)$ ($s > 1/2$) に対してある $\Omega_0 = \Omega_0(u_0)$ が存在し， $|\Omega| \geq \Omega_0$ ならば (1.5) は時間大域的な一意解 $u \in C([0, \infty); H^s(\mathbb{T}^3)) \cap L^2(0, \infty; H^{s+1}(\mathbb{T}^3))$ をもつことを証明した．周期境界条件下においては，Resonant 方程式のより詳細な解析が Kishimoto-Yoneda [15] によって与えられている．全空間 $\mathbb{R}^3$ においては，Chemin-Desjardins-Gallagher-Grenier [5] により， $u_0 \in \dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$ に対して上記と同様の時間大域的適切性が証明されており，そこでは Coriolis 力の分散性が証明の鍵となる．また初期速度場 $u_0 \in \dot{H}^s(\mathbb{R}^3)$ ($1/2 < s < 3/4$) に対する時間大域的適切性，およびそれを保証する最小の回転速度 Ω_0 に対する初期値のノルム $\|u_0\|_{\dot{H}^s}$ での特徴付けが [11] で与えられている．また，角周波数 $\Omega \in \mathbb{R}$ に関する一様な可解性についても数多くの研究があり，Giga-Inui-Mahalov-Saal [8], Hieber-Shibata [9], Konieczny-Yoneda [18], Ito-Kato [14] および [12] などが知られている．これらの結果は，通常の Navier-Stokes 方程式でのスケール不変な空間において，小さな初期値に対する時間大域的適切性を与えている．時間局所適切性に関しては，遠方で減衰しない初期値に対しては Sawada [21], Giga-Inui-Mahalov-Matsui [7], 初期値 $u_0 \in \dot{H}^s(\mathbb{R}^3)$ ($1/2 < s < 5/4$) に対しては [13] で考察されており，特に [13] では最大存在時刻 T が回転速度 $|\Omega|$ に応じて大きく取れることを証明している．

次に, Boussinesq 方程式 (1.6) に関する先行研究を述べる. Charve [3, 4] は方程式 (1.6) を Coriolis 力 $-\Omega e_3 \times v$ 付きで考察し, その時間大域的適切性を証明した. [3, 4] においては, 固有射影 (1.7) を用いて $\tilde{\nabla} \cdot u_0 = 0$ を満たす初期速度場を $u_0 = P_+ u_0 + P_- u_0 + P_0 u_0$ と分解し, $P_\pm u_0 \in \dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$, $P_0 u_0 \in H^{\frac{1}{2}+\varepsilon}(\mathbb{R}^3)$ ($\varepsilon > 0$) を満たす任意の初期速度場 u_0 に対してある $N_0 = N_0(u_0)$ と $\Omega_0 = \Omega_0(u_0)$ が存在し, $N \geq N_0$ かつ $|\Omega| \geq \Omega_0$ ならば (1.6) は時間大域的な一意解 $u \in L^\infty(0, \infty; \dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)) \cap L^2(0, \infty; \dot{H}^{\frac{3}{2}}(\mathbb{R}^3))$ をもつことが証明された. Koba-Mahalov-Yoneda [16] においては, N および Ω に関する一様な時間大域的適切性が, 小さな初期値 $u_0 \in \dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)$ に対して証明されている. また概周期的な初期値に対する長時間可解性が Ibrahim-Yoneda [10] によって与えられている. 周期境界条件下においては, Babin-Mahalov-Nicolaenko [2] によって時間大域的適切性が示されている.

以下, 本講演の主結果を述べる. まずは時間発展作用素 (1.8), (1.9) に対する分散型評価について考察する. 相関数 $p_r(\xi)$ および $p_s(\xi)$ は共に斉次 0 次関数であることから, Littlewood-Paley 分解とスケーリングにより, 問題は以下の周波数を局在化した作用素の減衰評価に帰着される:

$$U_r^\pm(t)f(x) = \int_{\mathbb{R}^3} e^{ix \cdot \xi \pm it p_r(\xi)} \psi(\xi) \hat{f}(\xi) d\xi, \quad p_r(\xi) = \frac{\xi_3}{|\xi|}, \quad (2.1)$$

$$U_s^\pm(t)f(x) = \int_{\mathbb{R}^3} e^{ix \cdot \xi \pm it p_s(\xi)} \psi(\xi) \hat{f}(\xi) d\xi, \quad p_s(\xi) = \frac{|\xi_h|}{|\xi|}, \quad (t, x) \in \mathbb{R}^{1+3}. \quad (2.2)$$

ここで, $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ は $\text{supp } \psi \subset \{2^{-2} \leq |\xi| \leq 2^2\}$ および $\psi(\xi) = 1$ ($2^{-1} \leq |\xi| \leq 2$) を満たすカットオフ関数とする. 先行研究の Dutrifoy [6] および [13] においては, $U_r^\pm(t)$ に対する時間減衰評価として,

$$\|U_r^\pm(t)f\|_{L^\infty} \leq C \left\{ \frac{\log(e + |t|)}{1 + |t|} \right\}^{\frac{1}{2}} \|f\|_{L^1}$$

が知られていた. 本講演では, 上記の減衰評価を改良した以下の定理を示す.

定理 2.1. ある正定数 $C = C(\psi)$ が存在して,

$$\|U_r^\pm(t)f\|_{L^\infty} \leq C(1 + |t|)^{-1} \|f\|_{L^1}$$

が全ての $t \in \mathbb{R}$ と $f \in L^1(\mathbb{R}^3)$ に対して成立する. また減衰率 -1 は最適である.

また, 時間発展作用素 $U_s^\pm(t)$ に対しては以下の時間減衰評価が成立する.

定理 2.2. ある正定数 $C = C(\psi)$ が存在して,

$$\|U_s^\pm(t)f\|_{L^\infty} \leq C(1 + |t|)^{-\frac{1}{2}} \|f\|_{L^1}$$

が全ての $t \in \mathbb{R}$ と $f \in L^1(\mathbb{R}^3)$ に対して成立する. また減衰率 $-1/2$ は最適である.

次に, 上記の評価の初期値問題への応用を考察する. まずは Coriolis 力付き Navier-Stokes 方程式 (1.5) に関する結果を述べる. 最適な時間減衰評価 (定理 2.1) を用いることで, 先行研究 [11] ($u_0 \in \dot{H}^s(\mathbb{R}^3)$, $1/2 < s < 3/4$) を改良した以下の定理を得る.

定理 2.3. 指数 (s, p, q) は以下の条件を満たすものとする：

$$\frac{1}{2} < s < \frac{9}{10}, \quad \frac{1}{3} + \frac{s}{9} \leq \frac{1}{p} < \frac{7}{12} - \frac{s}{6},$$

$$\max \left\{ 0, \frac{1}{2p} + \frac{s}{2} - \frac{1}{2} \right\} < \frac{1}{q} < \frac{5}{8} - \frac{3}{2p} + \frac{s}{4}, \quad \frac{3}{4} - \frac{3}{2p} \leq \frac{1}{q} < \frac{5}{4} - \frac{5}{2p}.$$

このとき、ある正定数 $\delta = \delta(s, p, q)$ が存在して、

$$\|u_0\|_{\dot{H}^s} \leq \delta |\Omega|^{\frac{1}{2}(s-\frac{1}{2})} \quad (2.3)$$

を満たす任意の $\Omega \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ と任意の初期速度場 $u_0 \in \dot{H}^s(\mathbb{R}^3)$ ($\nabla \cdot u_0 = 0$) に対して、(1.5) は時間大域的一意解 $u \in C([0, \infty); \dot{H}^s(\mathbb{R}^3)) \cap L^q(0, \infty; \dot{W}^{s,p}(\mathbb{R}^3))$ をもつ。

注意 2.4. 定理 2.3 における条件 (2.3) より、任意の初期速度場 $u_0 \in \dot{H}^s(\mathbb{R}^3)$ に対して、

$$\Omega_0 = (\delta^{-1} \|u_0\|_{\dot{H}^s})^{\frac{2}{s-1/2}}$$

とおくと、 $|\Omega| \geq \Omega_0$ ならば (1.5) に時間大域的一意解 u が存在することが従う。また定理 2.1 での減衰評価の改良により、初期速度場の低周波部分に対する制限が、先行研究 [11] での $s < 3/4$ から $s < 9/10$ まで拡張されることが分かる。

Boussinesq 方程式 (1.6) に対しては、以下の定理が成立する。

定理 2.5. $1/2 < s \leq 5/8$ とする。このとき、ある正定数 $\delta_1 = \delta_1(s)$ と δ_2 が存在して、

$$\|P_+ u_0\|_{\dot{H}^s} + \|P_- u_0\|_{\dot{H}^s} \leq \delta_1 N^{\frac{1}{2}(s-\frac{1}{2})}, \quad \|P_0 u_0\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}} \leq \delta_2 \quad (2.4)$$

を満たす任意の $N > 0$ と任意の初期速度場 $u_0 \in \dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3) \cap \dot{H}^s(\mathbb{R}^3)$ ($\tilde{\nabla} \cdot u_0 = 0$) に対して、(1.6) は時間大域的一意解 $u \in C([0, \infty); \dot{H}^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^3)) \cap L^4(0, \infty; \dot{W}^{\frac{1}{2},3}(\mathbb{R}^3))$ をもつ。

注意 2.6. 定理 2.5 における条件 (2.4) を元の初期値 (v_0, θ_0) に関して書き直すと、以下ようになる：

$$\left\| (-\Delta_h)^{-\frac{1}{2}} (-\Delta)^{-\frac{1}{2}} \partial_{x_j} \partial_{x_3} v_{0,j} \right\|_{\dot{H}^s} \leq \delta'_1 N^{\frac{1}{2}(s-\frac{1}{2})} \quad (j = 1, 2),$$

$$\left\| (-\Delta_h)^{\frac{1}{2}} (-\Delta)^{-\frac{1}{2}} v_{0,3} \right\|_{\dot{H}^s} \leq \delta'_1 N^{\frac{1}{2}(s-\frac{1}{2})}, \quad \|\theta_0\|_{\dot{H}^s} \leq \delta'_1 N^{\frac{1}{2}(s-\frac{1}{2})+1},$$

$$\left\| (-\Delta_h)^{-\frac{1}{2}} (\partial_{x_1} v_{0,2} - \partial_{x_2} v_{0,1}) \right\|_{\dot{H}^{\frac{1}{2}}} \leq \delta_2.$$

ここで、 $\delta'_1 = \delta'_1(s)$ は δ_1 以下のある正定数である。従って、安定成層の強さを表す浮力周波数 $N > 0$ に応じて、(1.6) の時間大域的適切性を保証する初期温度擾乱 θ の $\dot{H}^s$ -ノルムが大きく取れることが従う。

3. 分散型評価の証明の概略

本節では、定理 2.1, 2.2 に対する証明の概略を与える。証明における大きな違いとして、回転に関する相関数 $p_r(\xi) = \xi_3/|\xi|$ は $\{2^{-2} \leq |\xi| \leq 2^2\}$ において滑らかであるのに対し、安定成層に関する相関数 $p_s(\xi) = |\xi_h|/|\xi|$ は $\{\xi_h = 0\}$ において特異性をもつことが挙げられる。まずは回転流体に関する定理 2.1 を考察する。この場合、相関数 $p_r(\xi)$ が $C^\infty(\{2^{-2} \leq |\xi| \leq 2^2\})$ に属することから、以下の Littman の定理が適用出来る：

定理 3.1 ([20], [22, Corollary 3.2, page 334]). $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ とし, $p \in C^\infty(\text{supp } \psi; \mathbb{R})$ は $\text{supp } \psi$ 上で $\text{rank } \nabla^2 p(\xi) \geq k$ を満たすとする. このとき, ある正定数 $C = C(d, \psi, p)$ が存在して,

$$\left| \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix \cdot \xi + itp(\xi)} \psi(\xi) d\xi \right| \leq C(1 + |t|)^{-\frac{k}{2}}$$

が全ての $(t, x) \in \mathbb{R}^{1+d}$ に対して成立する.

上記の定理 3.1 より, 定理 2.1 に関しては $\{2^{-2} \leq |\xi| \leq 2^2\}$ 上で $\text{rank } \nabla^2 p_r(\xi) \geq 2$ となることを示せば良い. 実際, 直接計算により,

$$\nabla^2 p_r(\xi) = \frac{1}{|\xi|^5} \begin{pmatrix} \xi_3(3\xi_1^2 - |\xi|^2) & 3\xi_1\xi_2\xi_3 & \xi_1(3\xi_3^2 - |\xi|^2) \\ 3\xi_1\xi_2\xi_3 & \xi_3(3\xi_2^2 - |\xi|^2) & \xi_2(3\xi_3^2 - |\xi|^2) \\ \xi_1(3\xi_3^2 - |\xi|^2) & \xi_2(3\xi_3^2 - |\xi|^2) & -3\xi_3|\xi_h|^2 \end{pmatrix}$$

であり, $\det \nabla^2 p_r(\xi) = \frac{(\xi_1^2 + \xi_2^2)\xi_3}{|\xi|^9}$ となる. 従って, 相関数 $p_r(\xi)$ は $\{\xi_h = 0\} \cup \{\xi_3 = 0\}$ において退化するが, いずれの場合も,

$$\nabla^2 p_r(0, \xi_3) = \frac{1}{|\xi_3|^5} \begin{pmatrix} -\xi_3^3 & 0 & 0 \\ 0 & -\xi_3^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \nabla^2 p_r(\xi_h, 0) = \frac{1}{|\xi_h|^3} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\xi_1 \\ 0 & 0 & -\xi_2 \\ -\xi_1 & -\xi_2 & 0 \end{pmatrix}$$

となることから, 円環の性質を用いることで $\text{rank } \nabla^2 p_r(\xi) \geq 2$ が従う.

一方, 安定成層に関する相関数 $p_s(\xi) = |\xi_h|/|\xi|$ は $\{\xi_h = 0\}$ において特異性をもち, 定理 3.1 を直接適用することは出来ない. 実際, 形式的に計算すると,

$$\det \nabla^2 p_s(\xi) = -\frac{\xi_3^4}{|\xi|^9 |\xi_h|}$$

となり, $\{\xi_h = 0\}$ において特異性, $\{\xi_3 = 0\}$ において退化性が生じる. そこで, 異方的 Littlewood-Paley 分解を用いて積分領域を特異部分と退化部分に分けることを考える. $\psi_h \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$, $\psi_3 \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ を $\text{supp } \psi_h \subset \{2^{-1} \leq |\xi_h| \leq 2\}$, $\text{supp } \psi_3 \subset \{2^{-1} \leq |\xi_3| \leq 2\}$ かつ

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} \psi_h(2^j \xi_h) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \psi_3(2^k \xi_3) = 1 \quad (\xi_h \neq 0, \xi_3 \neq 0)$$

を満たす関数とする. これらを用いて $U_s^\pm(t)$ における積分領域を次のように分解する:

$$\begin{aligned} U_s^\pm(t)f(x) &= \sum_{j,k \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}^3} e^{ix \cdot \xi \pm itp_s(\xi)} \psi_h(2^j \xi_h) \psi_3(2^k \xi_3) \psi(\xi) \widehat{f}(\xi) d\xi \\ &= \left(\sum_{|j|, |k| \leq 3} + \sum_{\substack{|k| \leq 3, \\ j \geq 4}} + \sum_{\substack{|j| \leq 3, \\ k \geq 4}} \right) \int_{\mathbb{R}^3} e^{ix \cdot \xi \pm itp_s(\xi)} \psi_h(2^j \xi_h) \psi_3(2^k \xi_3) \psi(\xi) \widehat{f}(\xi) d\xi \\ &=: I_1(t, x) + I_2(t, x) + I_3(t, x). \end{aligned}$$

I_1 が正則部分 ($\det \nabla^2 p_s(\xi) \neq 0$), I_2 が特異部分, I_3 が退化部分に対応する. ここでは, I_3 に対する評価の概要を述べる. 問題となるのは $\{\xi_3 = 0\}$, すなわち $k \rightarrow \infty$ の場合のみであるから, 十分大きな $k_0 \in \mathbb{N}$ に対して,

$$\sum_{k \geq k_0} \left| \int_{\mathbb{R}^3} e^{ix \cdot \xi \pm itp_s(\xi)} \psi_h(\xi_h) \psi_3(2^k \xi_3) d\xi \right| \leq C(1 + |t|)^{-\frac{1}{2}}$$

を示せば良い．変数変換 $\xi_3 \mapsto 2^{-k}\xi_3$ により,

$$\int_{\mathbb{R}^3} e^{ix \cdot \xi \pm it p_s(\xi)} \psi_h(\xi_h) \psi_3(2^k \xi_3) d\xi = 2^{-k} \int_{\mathbb{R}^3} e^{i(x_h, 2^{-k} x_3) \cdot \xi \pm it p_s(\xi_h, 2^{-k} \xi_3)} \psi_h(\xi_h) \psi_3(\xi_3) d\xi$$

とする．このとき, 相関数 $p_s(\xi_h, 2^{-k}\xi_3)$ に関して Taylor 展開より,

$$2^{2k} \{1 - p_s(\xi_h, 2^{-k}\xi_3)\} = 2^{2k} \left\{ 1 - \left(1 + 2^{-2k} \frac{\xi_3^2}{|\xi_h|^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \right\} = \frac{1}{2} \frac{\xi_3^2}{|\xi_h|^2} + \mathcal{E}_k(\xi),$$

$$\|\mathcal{E}_k\|_{C^N(\text{supp } \psi_h \otimes \psi_3)} \leq C_N 2^{-2k} \quad (N \in \mathbb{N} \cup \{0\})$$

が成立する．更に, 相関数 $p_0(\xi) = \frac{1}{2} \frac{\xi_3^2}{|\xi_h|^2}$ に関して, $\text{supp } \psi_h \otimes \psi_3$ 上で,

$$\det \nabla^2 p_0(\xi) = \frac{\xi_3^4}{|\xi_h|^{10}} \neq 0$$

であることが分かる．従って, 停留位相評価の小さな摂動に関する安定性を用いることで, 十分大きな $k_0 \in \mathbb{N}$ に対して,

$$\begin{aligned} & \sum_{k \geq k_0} \left| \int_{\mathbb{R}^3} e^{ix \cdot \xi \pm it p_s(\xi)} \psi_h(\xi_h) \psi_3(2^k \xi_3) d\xi \right| \\ &= \sum_{k \geq k_0} 2^{-k} \left| \int_{\mathbb{R}^3} e^{i(x_h, 2^{-k} x_3) \cdot \xi \pm it p_s(\xi_h, 2^{-k} \xi_3)} \psi_h(\xi_h) \psi_3(\xi_3) d\xi \right| \\ &= \sum_{k \geq k_0} 2^{-k} \left| e^{\pm it} \int_{\mathbb{R}^3} e^{i(x_h, 2^{-k} x_3) \cdot \xi \mp i 2^{-2k} t \{1 - p_s(\xi_h, 2^{-k} \xi_3)\}} \psi_h(\xi_h) \psi_3(\xi_3) d\xi \right| \\ &= \sum_{k \geq k_0} 2^{-k} \left| \int_{\mathbb{R}^3} e^{i(x_h, 2^{-k} x_3) \cdot \xi \mp i 2^{-2k} t \{p_0(\xi) + \mathcal{E}_k(\xi)\}} \psi_h(\xi_h) \psi_3(\xi_3) d\xi \right| \\ &\leq C \sum_{k \geq k_0} 2^{-k} \min \left\{ 1, (1 + 2^{-2k} |t|)^{-\frac{3}{2}} \right\} \\ &\leq C \sum_{k \geq k_0} \min \left\{ 2^{-k}, 2^{2k} (1 + |t|)^{-\frac{3}{2}} \right\} \\ &\leq C (1 + |t|)^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

が得られる． $I_2(t, x)$ に関しても同様の議論を用いることで, 十分大きな $j_0 \in \mathbb{N}$ に対して,

$$\sum_{j \geq j_0} \left| \int_{\mathbb{R}^3} e^{ix \cdot \xi \pm it p_s(\xi)} \psi_h(2^j \xi_h) \psi_3(\xi_3) d\xi \right| \leq C (1 + |t|)^{-\frac{3}{2}}$$

を示すことが出来る．また $I_1(t, x)$ の積分領域は $\det \nabla^2 p_s(\xi) \neq 0$ となる正則部分であるから, 通常の停留位相評価から $(1 + |t|)^{-\frac{3}{2}}$ の減衰が得られる．以上により, 定理 2.2 の時間減衰評価が証明される．

尚, 本講演の内容は, Youngwoo Koh 氏 (Kongju National University), および Sanghyuk Lee 氏 (Seoul National University) との共同研究 [17, 19] に基づくものである．

参考文献

- [1] A. Babin, A. Mahalov, and B. Nicolaenko, *Global regularity of 3D rotating Navier-Stokes equations for resonant domains*, Indiana Univ. Math. J. **48** (1999), 1133–1176.
- [2] A. Babin, A. Mahalov, and B. Nicolaenko, *Fast singular oscillating limits and global regularity for the 3D primitive equations of geophysics*, M2AN Math. Model. Numer. Anal. **34** (2000), 201–222.
- [3] F. Charve, *Global well-posedness and asymptotics for a geophysical fluid system*, Comm. Partial Differential Equations **29** (2004), 1919–1940.
- [4] ———, *Global well-posedness for the primitive equations with less regular initial data*, Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6) **17** (2008), 221–238.
- [5] J.-Y. Chemin, B. Desjardins, I. Gallagher, and E. Grenier, *Mathematical geophysics*, The Clarendon Press Oxford University Press, Oxford, 2006.
- [6] A. Dutrifoy, *Examples of dispersive effects in non-viscous rotating fluids*, J. Math. Pures Appl. (9) **84** (2005), 331–356.
- [7] Y. Giga, K. Inui, A. Mahalov, and S. Matsui, *Navier-Stokes equations in a rotating frame in $\mathbb{R}^3$ with initial data nondecreasing at infinity*, Hokkaido Math. J. **35** (2006), 321–364.
- [8] Y. Giga, K. Inui, A. Mahalov, and J. Saal, *Uniform global solvability of the rotating Navier-Stokes equations for nondecaying initial data*, Indiana Univ. Math. J. **57** (2008), 2775–2791.
- [9] M. Hieber and Y. Shibata, *The Fujita-Kato approach to the Navier-Stokes equations in the rotational framework*, Math. Z. **265** (2010), 481–491.
- [10] S. Ibrahim and T. Yoneda, *Long-time solvability of the Navier-Stokes-Boussinesq equations with almost periodic initial large data*, J. Math. Sci. Univ. Tokyo **20** (2013), 1–25.
- [11] T. Iwabuchi and R. Takada, *Global solutions for the Navier-Stokes equations in the rotational framework*, Math. Ann. **357** (2013), 727–741.
- [12] ———, *Global well-posedness and ill-posedness for the Navier-Stokes equations with the Coriolis force in function spaces of Besov type*, J. Funct. Anal. **267** (2014), 1321–1337.
- [13] ———, *Dispersive effect of the Coriolis force and the local well-posedness for the Navier-Stokes equations in the rotational framework*, Funkcial. Ekvac. **58** (2015), 365–385.
- [14] H. Ito and J. Kato, *A remark on a priori estimate for the Navier-Stokes equations with the Coriolis force*. arXiv:1512.01814.
- [15] N. Kishimoto and T. Yoneda, *Global solvability of the rotating Navier-Stokes equations with fractional Laplacian in a periodic domain*. arXiv:1702.07443.
- [16] H. Koba, A. Mahalov, and T. Yoneda, *Global well-posedness of the rotating Navier-Stokes-Boussinesq equations with stratification effects*, Adv. Math. Sci. Appl. **22** (2012), 61–90.
- [17] Y. Koh, S. Lee, and R. Takada, *Dispersive estimates for the Navier-Stokes equations in the rotational framework*, Adv. Differential Equations **19** (2014), 857–878.
- [18] P. Konieczny and T. Yoneda, *On dispersive effect of the Coriolis force for the stationary Navier-Stokes equations*, J. Differential Equations **250** (2011), 3859–3873.
- [19] S. Lee and R. Takada, *Dispersive estimates for the stably stratified Boussinesq equations*. to appear in Indiana Univ. Math. J.
- [20] W. Littman, *Fourier transforms of surface-carried measures and differentiability of surface averages*, Bull. Amer. Math. Soc. **69** (1963), 766–770.
- [21] O. Sawada, *The Navier-Stokes flow with linearly growing initial velocity in the whole space*, Bol. Soc. Parana. Mat. (3) **22** (2004), 75–96.
- [22] E. M. Stein and R. Shakarchi, *Functional analysis*, Princeton Lectures in Analysis, vol. 4, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2011. Introduction to further topics in analysis.