

時間周期磁場に対する散乱問題

川本 昌紀 (東京理科大学)*

Abstract

時間周期磁場に関する散乱問題は、1989年の Korotyaev の結果以降、大きな進展が得られていない研究分野であった。この問題は定磁場中の Schrödinger 方程式に対する散乱理論において多くの研究を行ってきた Gérard 氏と Laba 氏らが、自身らの著書 “Multiparticle quantum scattering in constant magnetic fields” に未解決問題の一つとして挙げている。

そこで、足立-川本では、時間周期磁場をパルス化して、問題を簡略化することでこの問題の解決を目指した。これは、パルス化した磁場の場合は、伝播子 propagator を具体的に書き下せるからである。本講演では、これらの結果について詳しく述べる。また、本講演は、足立匡義氏 (京都大学) との共同研究に基づく。

1. 電磁場中の散乱理論について

量子力学系に対する散乱理論 (以後、単に “散乱理論” と書く) は、20 世紀の後半から多くの物理学者、数学者によって盛んに研究されてきた研究分野で、現在までに膨大な研究がなされてきた。散乱理論において最大の難問と呼ばれた多体問題は Sigal-Soffer [22] によって 1987 年に証明された。その後、Gérard-Laba [9] [10] によって、定磁場の影響下での多体問題が証明され、Adachi-Tamura [4] [5] によって空間一様な定電場の影響下での多体問題が証明された。ここで Gérard-Laba の結果は全粒子が荷電している場合に限ったが、Adachi [1] は、1 粒子が荷電していない場合における多体問題を証明した。また定電場、定磁場の混合系の場合も、Skibsted [21] により考察され、多体問題が証明された。

電場や磁場が時間周期的な系については、電場が時間周期的かつ周期平均が 0 でない場合では、系が定電場に似ることに着目し、2 体問題が Møller [18] により証明され、Adachi [2] により多体問題が証明された。一方で、時間周期的な電場で周期平均が 0 の場合は、電場効果は消え、電場のない場合の問題に似ているにも関わらず、運動量がエネルギーに対し相対有界でなくなるなど、多くの困難が生じ、多体問題や固有値問題など、多くの問題が未解決の問題として残っている。散乱理論に関しては、2 体問題は Yajima [23] などにより証明され、3 体問題は Nakamura [20] により早く減衰するポテンシャルの仮定の下で証明された。また、Møller-Skibsted [19] により多体系に対するスペクトル理論 (Mourre 理論) は考察されたが、散乱理論に関して言えば Nakamura の結果以降、私の知る限り今現在も進展がないように思われる。また時間周期磁場に関しては、Korotyaev [15] による研究結果により、2 体問題の特殊な系については証明されたが、一般の時間周期磁場を扱われた研究は無く、もちろん 3 体以上の研究結果は特殊な場合においても皆無である。さらに、時間周期電場と時間周期磁場の混合系についても一切の研究結果がない。以上を踏まえ、我々はまず時間周期磁場に対する理論の整備を行い、2 体問題に関して散乱理論を考察した。

2000 Mathematics Subject Classification: 81Q05.

Keywords: Magnetic fields, scattering theory, time-periodic quantum system.

*e-mail: mkawa@rs.tus.ac.jp

2. パルス磁場と散乱

平面 $\mathbf{R}^2$ 上を動いている荷電粒子に、その平面に直交するような、時間に周期的な磁場 $\mathbf{B}(t) = (0, 0, B(t))$ を加えた量子力学系を考察する．粒子の位置を $x = (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$, 運動量を $p = -i\nabla = (-i\partial_1, -i\partial_2)$, 質量, 電荷をそれぞれ $m > 0$, $q \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ としたとき, この量子力学系は次のハミルトニアン $H_0(t)$

$$H_0(t) = \frac{1}{2m} (p - qA(t, x))^2, \quad A(t, x) = \frac{B(t)}{2} (-x_2, x_1).$$

と状態空間 $L^2(\mathbf{R}^2)$ で記述される．ここで, $A(t, x)$ は対称ゲージと呼ばれている．この粒子にポテンシャル V を加えたハミルトニアンを

$$H(t) = H_0(t) + V$$

と書く．ここで, V は実数値関数 $V(x)$ をかける掛け算作用素で, $V(x)$ は以下の仮定 (V1) 満たすとする:

(V1) $V \in C(\mathbf{R}^2)$ で, ある定数 $\sigma > 0$ に対して, 定数 $C > 0$ が存在して

$$|V(x)| \leq C(1 + |x|)^{-\sigma}$$

を満たす．

今, $H_0(t)$ が生成する propagator を $U_0(t, 0)$, $H(t)$ が生成する propagator を $U(t, 0)$ と書くことにしよう．この時, ポテンシャルの有界性から, $U(t, 0)$ が一意に存在することが示される．本講演の最初の目標は, この $U_0(t, 0)$ の積分核を計算することである．しかしながら, 一般の時間周期磁場 $B(t)$ でこれを導くのは困難であった．そこで, まず初めに $B(t)$ をパルス化することを考えた．ここでパルス化された磁場とは以下のようなものである:

$$B(t) = \begin{cases} B & t \in I_B, \\ 0 & t \in I_0, \end{cases} \quad I_B := \bigcup_{n \in \mathbf{Z}} [nT, nT + T_B), \quad I_0 := \bigcup_{n \in \mathbf{Z}} [nT + T_B, (n+1)T),$$

ここで, $B > 0$, $0 < T_B < T$ は定数とする．すなわち, $t \in I_B$ で定磁場 $\mathbf{B} = (0, 0, B)$ が現れ (本講演では**磁場が on** と言う), また $t \in I_0$ で定磁場が消える (本講演では**磁場が off** と言う)．この場合, $B(t+T) = B(t)$, $\forall t$ となり, 時間周期的に磁場が on, off を繰り返す．さらに定磁場中のハミルトニアンを H_B , 自由 Schrödinger 作用素を H_0 すなわち

$$H_B := \frac{1}{2m} (p - qA(x))^2, \quad A(x) = \frac{B}{2} (-x_2, x_1),$$

$$H_0 := \frac{p^2}{2m}$$

とおけば, $H_0(t)$ は,

$$H_0(t) = \begin{cases} H_B & t \in I_B, \\ H_0 & t \in I_0 \end{cases}$$

となり, $U_0(t, 0)$ は

$$U_0(t, 0) = \begin{cases} e^{-i(t-nT)H_B} U_0(nT, 0) & t \in [nT, nT + T_B), \\ e^{-i(t-nT-T_B)H_0} e^{-iT_B H_B} U_0(nT, 0) & t \in [nT + T_B, (n+1)T). \end{cases}$$

となる. ここで一周期での磁場が off の時間を

$$T_0 := T - T_B$$

で定めると,

$$U_0(T, 0) = e^{-iT_0 H_0} e^{-iT_B H_B}, \quad U_0(nT, 0) = (U_0(T, 0))^n$$

となる. すなわち $U_0(t, 0)$ の積分核を求めるために, まず $U_0(T, 0)$ の積分核を求めることが重要となる. 式の煩雑を避けるため, 以下では,

$$\omega = \frac{qB}{m}, \quad \bar{\omega} = \frac{\omega}{2}, \quad \bar{\bar{\omega}} = \frac{\bar{\omega}}{2} = \frac{\omega}{4}.$$

と表記する. ここで, ω は Larmor 振動数と呼ばれている.

Lemma 2.1. $t \neq 0$ の時, $S_0^0(t; x)$ と $S_0^B(t; x, y)$ を

$$S_0^0(t; x) := \frac{1}{2\pi i t} e^{ix^2/(2t)},$$

$$S_0^B(t; x, y) := \frac{m|\bar{\omega}|}{2\pi i \sin(|\bar{\omega}|t)} e^{im|\bar{\omega}| \cot(|\bar{\omega}|t)x^2/2} e^{-im|\bar{\omega}|(\hat{R}(\bar{\omega}t)x) \cdot y / \sin(|\bar{\omega}|t)} e^{im|\bar{\omega}| \cot(|\bar{\omega}|t)y^2/2}$$

で定める. この時,

$$e^{-itH_0}\psi = \int_{\mathbf{R}^2} S_0^0(t; x-y)\psi(y)dy,$$

$$e^{-itH_B}\psi = \int_{\mathbf{R}^2} S_0^B(t; x, y)\psi(y)dy$$

が成立する. ここで,

$$\hat{R}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

である.

H_B に対するこの結果は, Avron-Herbst-Simon [6], Adachi-Kawamoto [3]などを参照して頂きたい. この補題と振動積分による計算を施せば, $U_0(T, 0)$ の積分核 $\tilde{S}_0(T; x, y)$ が

$$\tilde{S}_0(T; x, y) = \frac{1}{2\pi i c_1 \theta_1} e^{ix^2/(2\theta_1)} e^{-i(\hat{R}(\phi_1)x) \cdot y / (c_1 \theta_1)} e^{i\sigma_1 y^2 / (2\theta_1)},$$

となることが証明出来る. ここで $c_1, \sigma_1, \theta_1, \phi_1$ は定数で後の (2) 式で与える定数 $L_{11}, L_{12}, L_{21}, L_{22}$ などを用いて,

$$\theta_1 = \frac{L_{12}}{L_{22}}, \quad c_1 = L_{22}, \quad \sigma_1 = \frac{L_{11}}{L_{22}}, \quad \phi_1 = \bar{\omega} T_B.$$

で表される．これにより， $U_0(nT, 0) = (U_0(T, 0))^n$ の積分核 $\tilde{S}_0(nT; x, y)$ は次のような形でかけると予想出来る．

$$\tilde{S}_0(nT; x, y) = \frac{1}{2\pi i c_n \theta_n} e^{ix^2/(2\theta_n)} e^{-i(\hat{R}(\phi_n)x) \cdot y / (c_n \theta_n)} e^{i\sigma_n y^2 / (2\theta_n)}. \quad (1)$$

この時， $c_n, \sigma_n, \theta_n, \phi_n$ が満たすべき漸化式は以下となる：

$$\begin{aligned} \frac{1}{\theta_{n+1}} &= \left(1 - \frac{1}{c_1^2 \sigma_1}\right) \frac{1}{\theta_1} + \frac{1}{(c_1 \sigma_1)^2 (\theta_1 / \sigma_1 + \theta_n)}, \\ \frac{1}{c_{n+1} \theta_{n+1}} &= \frac{1}{c_1 \sigma_1 c_n (\theta_1 / \sigma_1 + \theta_n)}, \\ \frac{\sigma_{n+1}}{\theta_{n+1}} &= \left(\sigma_n - \frac{1}{c_n^2}\right) \frac{1}{\theta_n} + \frac{1}{c_n^2 (\theta_1 / \sigma_1 + \theta_n)}, \\ \phi_{n+1} &= \phi_1 + \phi_n. \end{aligned}$$

上の漸化式では ϕ_n, θ_n が単独である．また，単純な計算から $\phi_n = n\bar{\omega}T_B$ が分かる．そこで θ_n を求めよう． θ_n の漸化式を計算すれば，

$$\begin{aligned} \frac{1}{\theta_{n+1}} &= \frac{L_{21}\theta_n + L_{22}}{L_{11}\theta_n + L_{12}}, \\ L_{11} &= \cos(|\bar{\omega}|T_B) - |\bar{\omega}|T_0 \sin(|\bar{\omega}|T_B), \\ L_{12} &= \frac{1}{m|\bar{\omega}|} (|\bar{\omega}|T_0 \cos(|\bar{\omega}|T_B) + \sin(|\bar{\omega}|T_B)), \\ L_{21} &= -m|\bar{\omega}| \sin(|\bar{\omega}|T_B), \\ L_{22} &= \cos(|\bar{\omega}|T_B) \end{aligned} \quad (2)$$

となる．この漸化式を解くために， $\alpha_{\pm}$ を方程式

$$\alpha = \frac{L_{11}\alpha + L_{12}}{L_{21}\alpha + L_{22}}$$

の解として導入する．この方程式の判別式 D は，

$$D = \lambda_0^2 - 1, \quad \lambda_0 := \frac{L_{11} + L_{22}}{2} = \cos(|\bar{\omega}|T_B) - \frac{1}{2}|\bar{\omega}|T_0 \sin(|\bar{\omega}|T_B),$$

となる．ここで

$$\lambda_{\pm} := \lambda_0 \pm \sqrt{\lambda_0^2 - 1}, \quad \mu_n := \frac{\lambda_+^n - \lambda_-^n}{\lambda_+ - \lambda_-} = \frac{\lambda_+^n - \lambda_-^n}{2\sqrt{\lambda_0^2 - 1}} \quad (3)$$

とおけば，例えば $D > 0$ の場合は，

$$\theta_n = \frac{L_{12}\mu_n}{L_{22}\mu_n - \mu_{n-1}}$$

と具体的に計算できる．判別式 D の条件は，磁場が off の時間によって書き直せる．物理的な直感からも，以下のように書き直すのが適切であろう：

$$T_{0,\text{cr}} := \frac{\cos(|\bar{\omega}T_B|)}{|\bar{\omega}|\sin(|\bar{\omega}T_B|)},$$

$$T_0 \geq T_{0,\text{cr}} \Rightarrow \lambda_0 + 1 \leq 0, \quad \text{i.e.} \quad D = \lambda_0^2 - 1 \geq 0,$$

$$0 < T_0 < T_{0,\text{cr}} \Rightarrow (\lambda_0 + 1)(\lambda_0 - 1) < 0, \quad \text{i.e.} \quad D = \lambda_0^2 - 1 < 0.$$

この $T_{0,\text{cr}}$ を用いて以下の定理を得る．

Theorem 2.2 (Adachi-'K). propagator $U_0(nT, 0)$ の積分核は (1) 式で表され，それぞれの係数は $T_0 \neq T_{0,\text{cr}}$ の場合，

$$\theta_n = \frac{L_{12}\mu_n}{L_{22}\mu_n - \mu_{n-1}}, \quad c_n = L_{22}\mu_n - \mu_{n-1}, \quad \sigma_n = \frac{L_{11}\mu_n - \mu_{n-1}}{L_{22}\mu_n - \mu_{n-1}}, \quad \phi_n = n\bar{\omega}T_B$$

$T_0 = T_{0,\text{cr}}$ の場合，

$$\theta_n = \frac{nL_{12}}{nL_{22} - (n-1)\lambda_0}, \quad c_n = \lambda_0^{n-1} \{nL_{22} - (n-1)\lambda_0\},$$

$$\sigma_n = \frac{nL_{11} - (n-1)\lambda_0}{nL_{22} - (n-1)\lambda_0}, \quad \phi_n = n\bar{\omega}T_B$$

と書ける．

Remark 2.3. 実際には [3] では，任意の $t \in \mathbf{R}$ に対して $U_0(t, 0)$ の積分核を構成した．しかしながら $t \neq nT$ の場合には式が煩雑になるため割愛する．

この定理から $L^\infty - L^1$ 評価：

$$\|U_0(nT, 0)\psi\|_{L^\infty(\mathbf{R}^2)} \leq |2\pi c_n \theta_n|^{-1} \|\psi\|_{L^1(\mathbf{R}^2)} \quad (4)$$

が直ちに得られる．ここで，

$$c_n \theta_n = \begin{cases} L_{12}\mu_n & T_0 \neq T_{0,\text{cr}}, \\ L_{12}n\lambda_0^{n-1} & T_0 = T_{0,\text{cr}} \end{cases}$$

に注意する．まず $T_0 < T_{0,\text{cr}}$ の場合を考えよう．この場合， $\lambda_0^2 < 1$ より，(3) 式から $\lambda_\pm \in \mathbf{C}$ かつ $|\lambda_\pm| < 1$ となる．よって (4) 式の右辺の変数は nT に関する振動関数の逆数となる．これは $e^{-i(nT)H_B}$ における $L^\infty - L^1$ 評価と深く関係している．実際，この場合の $U_0(T, 0)$ のスペクトルは，固有値のみからなる事も示す事が出来る ([3])．次に $T_0 = T_{0,\text{cr}}$ の場合を考察する．このとき， $L^\infty - L^1$ 評価 (4) 式は， n^{-1} のオーダーで減衰する．これは， $e^{-i(nT)H_0}$ の場合の挙動と非常に良く似ている．すなわち，以下の事が言える：

● 磁場が off の時間が $T_{0,\text{cr}}$ より短い $\Rightarrow$ 磁場の影響が勝ち，粒子は定磁場中のそれと似た挙動を示す．

● 磁場の off の時間が丁度 $T_{0,\text{cr}}$ の場合 $\Rightarrow$ 磁場の影響がかき消され，粒子は磁

場がない場合と似た挙動を示す.

では, $T_0 > T_{0,\text{cr}}$ の場合はどうなるか. この時, $\lambda_0 < -1$ から, $|\lambda_-| > 1$ かつ $|\lambda_+| < 1$ が容易に分かる. よって, $L_{12} \neq 0$ すなわち

$$T_0 \neq T_{0,\text{res}} := -\frac{\sin(|\bar{\omega}|T_B)}{|\bar{\omega}| \cos(|\bar{\omega}|T_B)}$$

であり, かつ n が十分大きい場合には

$$\|U_0(nT, 0)\psi\|_{L^\infty(\mathbf{R}^2)} \leq \frac{1}{2\pi|\mu_n L_{12}|} \|\psi\|_{L^1(\mathbf{R}^2)} \leq Ce^{-\nu n} \|\psi\|_{L^1(\mathbf{R}^2)}, \quad \exists \nu > 0$$

となり分散型評価が指数減衰する特殊な系が現れる.

この事実を用いて, 以下の命題を得る:

Proposition 2.4. $T_0 > T_{0,\text{cr}}$ かつ $T_0 \neq T_{0,\text{res}}$ とする. この時, 任意の $\theta > 0$, $\psi \in L^2(\mathbf{R}^2)$ に対して, ある定数 $C > 0$ が存在して,

$$\int_{\mathbf{R}} \|(1 + |x|)^{-\theta} U_0(t, 0)(1 + |x|)^{-\theta} \psi\|_{L^2(\mathbf{R}^2)} dt \leq C \|\psi\|_{L^2(\mathbf{R}^2)}$$

が成立する.

証明の概略を述べる: Remark 2.3 で述べたように, 一般の $t \in \mathbf{R}$ で証明するのは少し面倒である. よってここでは, $t \rightarrow t_n = nT$ の場合, すなわち,

$$\sum_{n \in \mathbf{Z}} \|(1 + |x|)^{-\theta} U_0(nT, 0)(1 + |x|)^{-\theta} \psi\|_{L^2(\mathbf{R}^2)} \leq C \|\psi\|_{L^2(\mathbf{R}^2)} \quad (5)$$

を示す. Riesz-Thorin の補間定理により $p \geq 2$, $q = p/(p-1)$ に対して,

$$\|U_0(nT, 0)\psi\|_{L^p(\mathbf{R}^2)} \leq Ce^{-2\nu n(1/2-1/p)} \|\psi\|_{L^q(\mathbf{R}^2)}.$$

ここで Kato [14] によって得られた評価式から,

$$\|(1 + |x|)^{-\theta} U_0(nT, 0)(1 + |x|)^{-\theta} \psi\|_{L^2(\mathbf{R}^2)} \leq Ce^{-2\nu n/p} \|(1 + |x|)^{-\theta}\|_{L^p(\mathbf{R}^2)}^2 \|\psi\|_{L^2(\mathbf{R}^2)}$$

ここで $p \geq 2$ は自由に選べるので, $\theta > 0$ が十分小さい場合でも $p\theta > 2$ を満たすよう p を十分大きく選べば, (5) が示される.

最後に, この特殊な系 $T_0 > T_{0,\text{cr}}$ の場合において散乱理論, すなわち, 波動作用素の存在と漸近完全性についての結果を紹介する. 一般に時間に依存する系はエネルギーが保存しない. しかしながら本研究における系は時間周期的であるため, 一周期のエネルギーを一つのエネルギーと思えばエネルギーは保存する. 時間周期的な系については, [8], [11], [12], [17], [23]などを参照されたい. 拡張されたヒルベルト空間 $\mathcal{H} := L^2(\mathbf{T}; L^2(\mathbf{R}^2))$, $\mathbf{T} = \mathbf{R}/T\mathbf{Z}$ をおく. ここで $\tilde{\psi} \in \mathcal{H}$, $\tilde{\psi}(t) = \tilde{\psi}(t; \cdot)$ に対して, 作用素 $\mathcal{L}_0^\sigma, \mathcal{L}^\sigma$ を以下で定める:

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_0^\sigma \tilde{\psi})(t) &= U_0(t, t - \sigma) \tilde{\psi}(t - \sigma), \\ (\mathcal{L}^\sigma \tilde{\psi})(t) &= U(t, t - \sigma) \tilde{\psi}(t - \sigma). \end{aligned}$$

この時, $\mathcal{L}_0^\sigma, \mathcal{L}^\sigma$ は $\mathcal{H}$ 上の強連続 1 パラメータユニタリ群となる. よって Stone の定理から $\mathcal{H}$ 上の自己共役作用素 $\hat{H}_0, \hat{H}$ で

$$e^{-i\sigma\hat{H}_0}\tilde{\psi} = \mathcal{L}_0^\sigma\tilde{\psi}, \quad e^{-i\sigma\hat{H}}\tilde{\psi} = \mathcal{L}^\sigma\tilde{\psi}$$

となるものがただ一つ存在する. この $\hat{H}_0$ を $U_0(t, 0)$ から生成される Floquet ハミルトニアンと呼ぶ. Floquet ハミルトニアンに対して, 以下の補題は重要である:

Lemma 2.5. [例えば Yajima [24]] $f \in \mathcal{H}$ に対して, $\hat{H}f = \lambda f$ を仮定する. この時, $f(t)$ は $L^2(\mathbf{R}^2)$ -値の連続関数で $f(t) = e^{i\lambda t}U(t, 0)f(0)$, 特に $U(T, 0)f(0) = e^{-i\lambda T}f(0)$. 逆に $U(T, 0)\varphi = e^{-iT\lambda}\varphi$ を仮定すると, $f(t) := e^{it\lambda}U(t, 0)\varphi \in \mathcal{D}(\hat{H})$ であり, かつ $\hat{H}f = \lambda f$.

Lemma 2.6 (Kitada-Yajima [17], Enss-Veselić [8]).

$$L^2(\mathbf{R}^2) = L_c^2(U(T, 0)) \oplus L_p^2(U(T, 0))$$

ここで, $L_c^2(U(T, 0))$ と $L_p^2(U(T, 0))$ はそれぞれ $U(T, 0)$ の連続スペクトル部分空間, 点スペクトル空間である.

先ほどの Lemma 2.5 と合わせて, 系の束縛状態は Floquet ハミルトニアン $\hat{H}$ の点スペクトルにより決定される事が分かる. さらに, Floquet ハミルトニアンと散乱を繋ぐのが以下のいわゆる Howland-Yajima method (Howland [11] [12], Yajima [23]) である.

Lemma 2.7 (Howland [11] [12], Yajima [23]).

$$\mathcal{W}^\pm := s-\lim_{\sigma \rightarrow \pm\infty} e^{i\sigma\hat{H}} e^{-i\sigma\hat{H}_0}$$

の存在と $\text{Ran}(\mathcal{W}^\pm) = \mathcal{K}_{\text{ac}}(\hat{H})$ を仮定. ここで $\mathcal{K}_{\text{ac}}(\hat{H}) \subset \mathcal{H}$ は $\hat{H}$ の絶対連続スペクトル部分空間である. このとき, もしも通常の意味での波動作用素

$$W^\pm := s-\lim_{t \rightarrow \pm\infty} U(t, 0)^* U_0(t, 0)$$

が存在するならば, 漸近完全性

$$\text{Ran}(W^\pm) = L_{\text{ac}}^2(U(T, 0))$$

が成立する. ここで, $L_{\text{ac}}^2(U(T, 0)) \subset L^2(\mathbf{R}^2)$ は $U(T, 0)$ の絶対連続スペクトル部分空間である.

これらを踏まえ, 以下の主結果を得る:

Theorem 2.8 (Adachi-'K [3]). ポテンシャル V は (V1) を満たしているとする. さらに, 磁場が on, off の時間 T_B, T_0 は以下の条件を満たすとする:

$$\begin{aligned} (T0) \quad & 0 < |\bar{\omega}|T_B < \pi, \\ (T1) \quad & T_0 > T_{0,\text{cr}}, \\ (T2) \quad & T_0 \neq T_{0,\text{res}}, \text{ if } \pi/2 < |\bar{\omega}|T_B < \pi \end{aligned}$$

この時, 波動作用素は漸近的に完全である. すなわち,

$$\text{Ran}(W^\pm) = L_{\text{ac}}^2(U(T, 0))$$

3. 証明の流れ

主定理の証明のかなり大雑把な概略を説明する．Howland-Yajima method と，Kato's smooth perturbation method (Kato [14]) により，我々が示すべき問題は，大きく分けて，以下の3つとなる．

1. 相対コンパクト性を示す, i.e., $V(\hat{H} + i)^{-1}$ が $\mathcal{K}$ 上, コンパクト作用素の証明
2. 極限吸収原理を示す, i.e., $\rho_1 = |V|^{1/2}\text{sign}(V)$, $\rho_2 = |V|^{1/2}$, $\tilde{\psi} \in \mathcal{K}$ に対して, $\exists \Gamma \subset \mathbf{R}$,

$$\sup_{\lambda \in \Gamma, \pm\mu > 0} \left\| \rho_1(\hat{H} - \lambda - i\mu)^{-1} \rho_2 \tilde{\psi} \right\|_{\mathcal{K}} \leq C \left\| \tilde{\psi} \right\|_{\mathcal{K}}$$

を証明する．

3. 波動作用素 $W^\pm$ の存在を示す．

まず 3 について考える．Cook-Kuroda method と稠密性の議論により波動作用素 $W^\pm$ の存在は，任意の $\psi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^2)$ に対して

$$\int_0^\infty \|VU_0(t, 0)\psi\|_{L^2(\mathbf{R}^2)} dt \leq C$$

を示すことで証明される．このとき 命題 2.4 から $\theta = \sigma$ ととれば，

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \|VU_0(t, 0)\psi\|_{L^2(\mathbf{R}^2)} dt \\ & \leq C \int_0^\infty \|(1 + |x|)^{-\sigma} U_0(t, 0)(1 + |x|)^{-\sigma}\|_{\mathcal{B}(L^2(\mathbf{R}^2))} \|(1 + |x|)^\sigma \psi\|_{L^2(\mathbf{R}^2)} dt \\ & \leq C \end{aligned}$$

となる．ここで，分散型評価が指数減衰することから $\sigma > 0$ はいくらでも小さくとれる．よって波動作用素の存在が非常に弱い減衰に対して証明出来る．

次に 2. 極限吸収原理について考える．おおよその流れは， $\hat{H}_0$ に関する極限吸収原理を示し，その後 Kato-Kuroda [16] による抽象的散乱理論の結果を用いて $\hat{H}$ 極限吸収原理に拡張する． H_0 に関する極限吸収は $\text{Im}z > 0$ の場合の Floquet ハミルトニアン of the レゾルベントの積分表示 ($\text{Im}z < 0$ の場合も同様に出来る)

$$\begin{aligned} \rho_1(\hat{H}_0 - z)^{-1} \rho_2 \tilde{\psi} = i \Bigg\{ & \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^T e^{i(t+nT-s)z} \rho_1 U_0(t + nT, s) (\rho_2 \tilde{\psi})(s) ds \\ & + \int_0^t e^{i(t-s)z} \rho_1 U_0(t, s) (\rho_2 \tilde{\psi})(s) ds \Bigg\} \end{aligned}$$

と，命題 2.4 などを用いれば示す事が出来る．

最後に 1. 相対コンパクト性については，上式のレゾルベントの積分表示と $U_0(t, 0)$ の積分核を用いて示すことが出来る．この証明の際には，積分核が具体的に書けることが大きなアドバンテージとなる．

4. Remarks

Remark 4.1. 本研究ではパルス磁場のみを扱って考察したが、仮に Hill 方程式

$$f''(t) + \left(\frac{qB(t)}{2m} \right)^2 f(t) = 0$$

の独立解が具体的に書ける場合では、積分核自体は、一般の時間周期磁場の場合でも具体的に求める事が出来る。

Remark 4.2. 分散型評価が指数減衰する系は Bony-Carles-Häfner-Michel [7] などにより散乱理論が考察されている。この際のポテンシャルの減衰は、

$$|V(x)| \leq C(\log(1 + |x|))^{-1-\varepsilon}$$

で証明されている。また、このポテンシャルが波動作用素が存在するギリギリのクラスであることも Ishida [13] の結果より分かる。残念ながら、我々の手法では、 $\log$ 減衰ポテンシャルは扱うのは困難であった。

Remark 4.3. $T_0 = T_{0,\text{cr}}$ の場合の完全性は、3次元以上の場合は [15] の手法を真似することで可能であると思われるが、2次元の場合は [15], [3] の両論文でも一切扱われていない。

References

- [1] Adachi, T.: On spectral and scattering theory for N-body Schrödinger operators in a constant magnetic field, Rev. in Math. Phys., **2**, 199-240 (2002)
- [2] Adachi, T.: Asymptotic completeness for N-body quantum systems with long-range interactions in a time-periodic electric field, Comm. Math. Phys., **275**, 443-477 (2007)
- [3] Adachi, T., Kawamoto, M.: Quantum scattering in a periodically pulsed magnetic field, A. H. P., **17**, 2409-2438, (2016)
- [4] Adachi, T., Tamura, H.: Asymptotic completeness for long-range many particle systems with Stark effect, J. Math. Sci. Univ. Tokyo, **2**, 77-116 (1995)
- [5] Adachi, T., Tamura, H.: Asymptotic completeness for long-range many particle systems with Stark effect, II, Comm. Math. Phys. **174**, 537-559 (1996)
- [6] Avron, J.E., Herbst, I.W., Simon, B.: Schrödinger operators with magnetic fields. I. General interactions. Duke Math. J. **45**, 847—883 (1978)
- [7] Bony, J. F., Carles, R., Häfner, D., Michel, L.: Scattering theory for the Schrödinger equation with repulsive potential, J. Math. Pures Appl. **84**, 509-579 (2005)
- [8] Enss, V., Veselić, K.: Bound states and propagation states for time-dependent hamiltonians, Ann. de l'I. H. P., sect. A **39**, 159-191 (1983)
- [9] Gérard, C., Łaba, I.: Scattering theory for N-particle systems in constant magnetic fields, Duke Math. J., **76**, 433-465 (1994)
- [10] Gérard, C., Łaba, I.: Scattering theory for N-particle systems in constant magnetic fields, II, Comm. in P.D.E., **20**, 1791-1830 (1996)
- [11] Howland, J.S.: Scattering theory for time-dependent Hamiltonians. Math. Ann. **207**, 315-335 (1974)

- [12] Howland, J.S.: Scattering theory for Hamiltonians periodic in time. *Indiana Univ. Math. J.* **28**, 471-494 (1979)
- [13] Ishida, A.: The borderline of the short-range condition for the repulsive Hamiltonian, *J. Math. Anal. and Appl.*, **438**, 267-273 (2016)
- [14] Kato, T.: Wave operators and similarity for some non-selfadjoint operators. *Math. Ann.* **162**, 258-279 (1966)
- [15] Korotyaev, E. L.: On scattering in an external, homogeneous, time-periodic magnetic field, *Math. USSR-Sb.* **66**, 499-522 (1990)
- [16] Kato, T., Kuroda, S. T.: The abstract theory of scattering. *Rocky Mt. J. Math.* **1**, 127-171 (1971)
- [17] Kitada, H., Yajima, K.: Bound states and scattering states for time periodic hamiltonians, *Ann. de l'I. H. P., sect. A* **39**, 145-157 (1983)
- [18] Møller, J. S.: Two-body short-range systems in a time-periodic electric field, *Duke Math. J.*, **105**, (2000)
- [19] Møller, J. S., Skibsted, E.: Spectral theory of time-periodic many-body systems, *Adv. in Math.*, **188**, 137-221 (2004)
- [20] Nakamura, S.: Asymptotic completeness for three-body Schrödinger equations with time-periodic potentials, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo. Sect. IA, Math.*, **33**, 379-402 (1986)
- [21] Skibsted, E.: Asymptotic completeness for particles in combined constant electric and magnetic fields, II, *Duke Math. J.*, **89**, (1997)
- [22] Sigal, I. M., Soffer, A.: The N-particle scattering problem: asymptotic completeness for short-range quantum system, *Ann. of Math.* **125**, 35-108 (1987)
- [23] Yajima, K.: Schrödinger equations with potentials periodic in time. *J. Math. Soc. Jpn.* **87**, 729-743 (1977)
- [24] Yajima, K.: Resonances for the AC-Stark effect, *Comm. Math. Phys.*, **87**, 331-352 (1982)