

Deformation/rigidity 理論と III 型フォンノイマン環

磯野 優介 (京都大学 数理解析研究所)*

概 要

Deformation/rigidity 理論とは、近年のフォンノイマン環論の中心的話題である。特に非従順な環の構造を解明する事を目的としており、その方面において極めて大きな進展を見せている。本講演では、この deformation/rigidity 理論における、私の近年の研究についてのサーベイ講演を行う。

目 次

1. フォンノイマン環とは	1
1.1. はじめに	1
1.2. 定義と例	2
1.3. 従順性について	4
2. Deformation/rigidity 理論	5
2.1. Popa の技術：同値な特徴付け	5
2.2. Popa の技術：どうやって使うか	6
3. Deformation/rigidity 理論と III 型フォンノイマン環	8
3.1. III 型フォンノイマン環と富田・竹崎理論	9
3.2. Popa の技術と富田・竹崎理論	11
3.3. 磯野の結果の紹介	12

1. フォンノイマン環とは

1.1. はじめに

フォンノイマン環論は、量子力学や群論への応用を念頭に、フォンノイマン (J. von Neumann) によって創始された理論である。フォンノイマンはその研究の中で、フォンノイマン環の研究の意義を数学・物理両方の視点から語っており、いち早くその重要性を認識していた。その後多くの研究者によって、数学・物理両方の視点から活発に研究が行われ、当初の予想を超える大きな進展が何度も訪れた。例えば非可換幾何学を提唱した A. Connes の研究、結び目の不変量をフォンノイマン環を用いて定義した V. Jones の研究、フォンノイマン環をランダム行列のある種の極限として捉えた D. Voiculescu の研究等はよく知られており、これらは研究分野の枠を超えた大きな影響を与えている。

本講演の主題である deformation/rigidity 理論は、2000 年以降に起きた新しいブレイクスルーである。いわゆる非従順フォンノイマン環の構造解明を目的に作られた理論で、離散群から作るフォンノイマン環が主な研究対象だ。もちろんフォンノイマン環としての構造研究が主たる目的だが、そのアイデアや手法は分野を超え、エルゴード理論や測度的群論等、群と測度空間を用いた研究にも影響を与えている。

本研究は「研究課題/領域番号 17K14201」の助成を受けたものである。

2010 Mathematics Subject Classification: 22D25, 22D40, 46L10, 46L36, 47L65

キーワード: von Neumann algebra, Tomita-Takesaki theory, compact quantum group

* 〒606-8502 京都市左京区北白川追分町 京都大学 数理解析研究所

e-mail: isono@kurims.kyoto-u.ac.jp

本講演の目的は、deformation/rigidity 理論における私の研究のサーベイを行う事である。私の研究は一言で言えば、deformation/rigidity 理論の III 型フォンノイマン環への適用である。III 型フォンノイマン環とは難しい構造を持つ環の事で、その研究には富田・竹崎理論と呼ばれる道具が必要となる。要するに私の研究は、既存の技術を改良して、もっと難しいクラスの環に適用してみよう、という類のものである。

講演の流れは以下の通りである。まず最初にフォンノイマン環の定義や例などを紹介し、次に従順性という概念について触れる。続いて deformation/rigidity 理論の紹介を行い、これらを踏まえて私の研究のサーベイを始める。証明等について詳しく述べる事はせず、定理の意義や証明のアイデアにのみ焦点を当てる。

1.2. 定義と例

この原稿では、 H はヒルベルト空間を意味する事にする。簡単のため、高々可算次元である事にしよう。対応する内積とノルムを $\langle \xi, \eta \rangle_H$, $\|\xi\|_H$, $(\xi, \eta \in H)$ のように書く。次に有界線形作用素のなす環を

$$\mathbb{B}(H) := \{T: H \rightarrow H \mid \text{有界線形作用素}\}$$

とする。有界とはノルム

$$\|T\| := \sup\{\|T\xi\|_H \mid \xi \in H, \|\xi\|_H \leq 1\}$$

が有限の値を取るという意味であり、これによって $\mathbb{B}(H)$ はノルムを持つ完備な環になる。ここで和は写像の和、積は写像の合成である。次に、ヒルベルト空間の構造を反映させるため、対合写像を考える。これは $T \in \mathbb{B}(H)$ に対して $T^* \in \mathbb{B}(H)$ を与える対応であり、その定義は

$$\langle T\xi, \eta \rangle_H = \langle \xi, T^*\eta \rangle_H, \quad \forall \xi, \eta \in H$$

で与えられる。Riesz の表現定理があるから、このような T^* はいつでも存在する。最後に、 $\mathbb{B}(H)$ は写像の空間だから、各点収束によって位相を入れる事が出来る。具体的には $T_\alpha \rightarrow T$ という収束を、

$$\|T_\alpha \xi - T\xi\|_H \rightarrow 0, \quad \forall \xi \in H$$

によって定める事で位相が定まる。

以上をまとめると、 $\mathbb{B}(H)$ は対合を持つノルム環であり、さらに各点収束の位相を持っているという事になる。作用素環とは、これらの構造を保つ $\mathbb{B}(H)$ の部分環であり、要するに作用素のなす環の事である。

定義 1.1. 部分環 $A \subset \mathbb{B}(H)$ が **フォンノイマン環** とは、 A が対合写像で閉じ（つまり $T \in A$ ならば $T^* \in A$ ）、かつ A が各点収束の位相で閉集合である事である。

注意 1.2. 部分環 A がノルム位相で閉集合の時は **C* 環** と言い、フォンノイマン環と合わせて **作用素環** と言う。ノルム位相は各点収束の位相より強いので、フォンノイマン環はいつも C* 環であるが、構造がかなり違うため独立に研究されている。

部分集合 $A \subset \mathbb{B}(H)$ に対して、その可換子環を

$$A' := \{x \in \mathbb{B}(H) \mid xa = ax, \forall a \in A\}$$

で定める．一般に $*$ -部分環 $A \subset \mathbb{B}(H)$ に対して， A がフォンノイマン環である事と $A = A''$ が成り立つ事は同値である．つまり，閉集合という位相的な条件を，代数的な条件で特徴付けられる．このような視点から，環の中心 $A \cap A'$ は研究上重要な意味を持っている．

定義 1.3. 中心が自明なフォンノイマン環を**因子環**と言う．これは環として単純である事（閉イデアルを持たない）と同値である．

下に，いくつかの基本的な例を挙げておく．本講演ではフォンノイマン環に焦点を当てるが， C^* 環の例も同様に紹介しておく．

例 1.4. I を単位閉区間， μ をその上のルベーグ測度とする．関数環 $L^\infty(I, \mu)$ を以下のように $\mathbb{B}(L^2(I, \mu))$ の中に入れられる：

$$L^\infty(I, \mu) \ni f \mapsto M_f \in \mathbb{B}(L^2(I, \mu)); \quad M_f g := fg, \quad (g \in L^2(I, \mu))$$

この同一視の元で包含関係 $L^\infty(I, \mu) \subset \mathbb{B}(L^2(I, \mu))$ を見ると，これはフォンノイマン環である．ここで I 上の連続関数のなす環 $C(I)$ は $L^\infty(I, \mu)$ の部分環であるが，これは C^* 環の例になっている．

注意 1.5. これらは可換な作用素環の例を与えているが，実は全ての可換作用素環は，概ね上の例のような形をしている．一般に作用素環は非可換だから，作用素環の研究はしばしば**非可換幾何学**，**非可換積分論**などと呼ばれる事もある．

例 1.6. サイズが $n \times n$ の行列の集まりを $\mathbb{M}_n$ と書く．行列のテンソルを無限回繰り返したもの

$$\mathbb{M}_n \otimes \mathbb{M}_n \otimes \mathbb{M}_n \otimes \cdots$$

を考えると，しかるべき完備化によって C^* 環やフォンノイマン環が出来る．このようにして出来るフォンノイマン環を**超有限フォンノイマン環**という．物理学で現れるフォンノイマン環は，全てこの形をしている．

例 1.7. 離散群 Γ を考える（離散群とは群に離散位相を入れたものである）．群の元をシンボルとした正規直交基底 $\{\delta_g\}_{g \in \Gamma}$ を持つヒルベルト空間を $\ell^2(\Gamma)$ と書く．（ L^2 関数の集まりと思ってもよい．）これに対して群 Γ の表現を

$$\lambda: \Gamma \rightarrow \mathbb{B}(\ell^2(\Gamma)); \quad g \mapsto \lambda_g, \quad \lambda_g \delta_h = \delta_{gh} \quad (h \in \Gamma)$$

で定める．これを Γ の**正則表現**という．群**フォンノイマン環** $L\Gamma$ とは，この表現の像が生成するフォンノイマン環の事である（群 C^* 環も同様に定義出来る）．表現 λ は，群環 $\mathbb{C}[\Gamma]$ の表現に線形に拡張出来るから，要するに $L\Gamma$ とは群環 $\mathbb{C}[\Gamma]$ の閉包である．

群の単位元 e に対応するベクトル $\delta_e \in \ell^2(\Gamma)$ を用いて，写像 $\tau(x) := \langle x\delta_e, \delta_e \rangle$ が $L\Gamma$ 上に定まる．これは非常に役に立つ写像で，いわゆるトレース条件 $\tau(xy) = \tau(yx)$ を満たしている．群環の上では，単位元の部分を取り出す写像 $\tau(\sum_g a_g \lambda_g) = a_e$ である．

例 1.8. 離散群 Γ を考え，これが測度空間 (X, μ) に非特異，本質的自由，エルゴード的に作用しているとする．非特異とは，零集合を零集合に移すという事で， $L^\infty(X, \mu)$ への作用に拡張出来る．本質的自由，エルゴード的は，単に良い作用を表すと思えばよい．この時，群の半直積と同様の視点で，**接合積フォンノイマン環** $L^\infty(X, \mu) \rtimes \Gamma$ を作

る事が出来る．詳細な定義は述べないが， $L^\infty(X, \mu)$ と $L\Gamma$ のコピーによって生成されていて，以下の条件を満たすものである：

$$\lambda_g f \lambda_g^* = \alpha_g(f), \quad g \in \Gamma, f \in L^\infty(X, \mu).$$

ここで α は与えられた作用である．この方法で，群からは作れないような様々な性質を持ったフォンノイマン環を作る事が出来る．

部分環 $L^\infty(X, \mu) \subset L^\infty(X, \mu) \rtimes \Gamma$ を **Cartan 部分環** と言う（注．本当は抽象的な定義がある）．この部分環の位置を特定する事で，群作用の情報をある程度取り出す事が出来る．

1.3. 従順性について

物理学で現れるフォンノイマン環は，必ず例 1.6 で見た超有限フォンノイマン環の形をしている．だから，この環を数学的に特徴付け分類するというのが，初期のフォンノイマン環論における重要な問題だった．この問題は，多くの人達の努力と A. Connes の大活躍のおかげで完遂出来た．その際に得られたいくつかの同値条件を合わせて，**従順性** という言葉が使われている．以下に詳しく紹介しよう．

定理 1.9 ([Co75]). フォンノイマン環 $M \subset \mathbb{B}(H)$ に対して，次の条件は全て同値である．

- (AFD) M の有限次元部分フォンノイマン環の上昇列 $N_n \subset M$ ($n \in \mathbb{N}$) が存在して， $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} N_n \subset M$ が各点収束の位相で稠密である．
- (injective) 射影 $E: \mathbb{B}(H) \rightarrow M$ が存在する．ここで射影とは， $\|E\| = 1$ かつ $E|_M = \text{id}_M$ という条件を満たす線形写像である．
- (semidiscrete) 任意の $n \in \mathbb{N}$, $x_1, \dots, x_n \in M$, $y_1, \dots, y_n \in M'$ に対して

$$\left\| \sum_{i=1}^n x_i y_i \right\| \leq \left\| \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i \right\|_{\min}.$$

ここで $\|\cdot\|_{\min}$ は $M \otimes_{\mathbb{C}} M'$ に定まる極小テンソルノルム（完備化して C^* 環になるようなノルムで最小なもの）である．

- (Schwartz property) 各 $T \in \mathbb{B}(H)$ に対して

$$\overline{\text{co}}\{uTu^* \mid u \text{ は } M \text{ のユニタリ}\} \cap M' \neq \emptyset.$$

ここで $\overline{\text{co}}$ は，各点収束の位相で凸閉包を取った集合である．

因子環や群フォンノイマン環に対しては，これをもっとはっきりした形で以下のように述べる事が出来る．（一つ目の系は Krieger, Haagerup の仕事と合わせて完成した．）

系 1.10 ([Co75, Kr75, Ha85]). 従順な因子環は完全に分類出来る．特に物理学で現れるフォンノイマン環は一つしかない．

系 1.11. 従順な離散群から作られるフォンノイマン環は，本質的に一つしかない．特に $L\Gamma$ が因子環ならば，それはただ一つの超有限フォンノイマン環に同型である．

注意 1.12. $L\Gamma$ が因子環であるための必要十分条件は、 Γ が **ICC**(infinite conjugacy class) 条件を満たす事である：任意の（単位元でない） $g \in \Gamma$ に対して $\{hgh^{-1} \mid h \in \Gamma\}$ が無限集合である事。

注意 1.13. 離散群 Γ が**従順**とは、左平行移動不変な有限加法的測度が Γ 上にとれる事である。有限群、可換群、可解群等多くの例があるが、系 1.11 によれば出てくる環は全て（本質的に）同じである。要するに、群環から閉包をとって $L\Gamma$ を作った瞬間に、群のほとんど全ての情報を忘れていているという事である。これは、フォンノイマン環論の難しさと面白さを同時に表しているように思う。対応する因子環が一つしかないという結果は、研究の多くの場面で肯定的に使われている事に注意しておく。また、Deformation/rigidity 理論による発展のおかげで、非従順群の場合は事情が全く異なる事が分かっている。

従順性は、フォンノイマン環論において最も重要な概念である。フォンノイマン環が従順な時は、すでに見たように著しく良い振る舞いをし、しかも完全な分類が可能である。そして環が従順でない時は、その振る舞いはコントロール出来ず、体系的な研究が出来ない。このような対比は専門家にとって常識であり、非従順環に対する理解は限定的だった。そしてこの常識を覆したのが、次節に紹介する deformation/rigidity 理論なのである。

2. Deformation/rigidity 理論

Deformation/rigidity 理論とは、非従順環を研究するための新しい理論である。非従順群やその群作用から作るフォンノイマン環を、これまでと全く異なる視点から研究する事が出来る。その研究の核となるのが、S. Popa によって導入された **intertwining technique**（通称 **Popa の技術**）である。この節では、Popa の技術と、その基本的な使い方について紹介する。

2.1. Popa の技術：同値な特徴付け

まずフォンノイマン環 M とその部分環 $A, B \subset M$ を固定しよう。Popa の技術とは、非常に大雑把に言えば、「 A が B に埋め込まれる」という代数的な情報を、「解析的な収束の条件」に置き換えるものである。

詳しく述べるため、以下のように記号を用意する。まず M はトレース写像 $\tau: M \rightarrow \mathbb{C}$ を持つとする。つまり $\tau(xy) = \tau(yx)$ を満たす線形写像の事で、例 1.7 等を想定している。次に M の新しいノルムを $\|x\|_{2,\tau} := \tau(x^*x)^{1/2}$ で定める。このノルムによる位相は、 M の単位閉球の上で各点収束の位相に一致する。最後に M から B への射影 $E_B: M \rightarrow B$ を固定する（ τ を用いて作る事が出来る）。この状況で以下の定理が成立する。

定理 2.1 ([Po01, Po03]). 次の二つの条件は同値である。

1. 二つの射影 $p \in A, q \in B$ と、 $*$ -準同型 $\theta: pAp \rightarrow qBq$ 、さらにある元 $x \in qMp$ があって次を満たす：

$$\theta(a)x = xa, \quad \forall a \in pAp.$$

2. 次のようなユニタリ元の列 $(u_n)_n \in M$ は存在しない：全ての $x, y \in M$ に対して

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|E_B(y^*u_nx)\|_{2,\tau} = 0.$$

これらが成り立つ時, $A \preceq_M B$ と書く.

注意 2.2. 条件 1 の $x \in M$ を **intertwiner** という. これは θ と id_{pAp} を結ぶことからその名がついている. これを上手く探してくる所が証明の肝なので, この定理はよく intertwining technique と呼ばれている. もし $x \in M$ がユニタリ元 u だったとすると, 条件が $\theta(a) = uau^*$ となるから, 写像 θ はユニタリ共役写像である. これは, A が B に (M のユニタリ共役を経由して) 埋め込まれるという事だ. 条件 1 はこの一般化なので, M の中で A が B に弱く埋め込まれるという事である. 条件を弱める事で, 使い勝手の良い条件 2 と同値になるという点は重要である.

実際の研究では, 以下のように良い部分環を考える事で, さらなる力を発揮する. これは部分環が互いにユニタリ共役で移りあうための, 極めて扱いやすい十分条件を提供してくれる.

系 2.3. M を例 1.8 の接合積フォンノイマン環, 部分環 $A, B \subset M$ がそれぞれ Cartan 部分環とする. もし定理 2.1 の条件 2 が成り立てば, あるユニタリ $u \in M$ があって $uAu^* = B$ となる.

2.2. Popa の技術 : どうやって使うか

では実際に使ってみよう. 突然だが $\Gamma := \mathbb{Z}^2 \rtimes \text{SL}(2, \mathbb{Z})$ とする. これはとても興味深い群で, 包含 $\mathbb{Z}^2 \subset \Gamma$ は相対性質 (T) を満たし, さらに群 $\text{SL}(2, \mathbb{Z})$ は Haagerup 性を満たす. 群の細かい性質は気にしない事にして, ここで重要な事は次の二点だ.

- これらの性質は, フォンノイマン環 $L\Gamma$ に対しても類似の性質として現れる.
- 一般に性質 (T) と Haagerup 性は同時に成り立たないが, 今はいずれも相対的な性質なので, 同時に成り立っている.

では, これを上の定理 2.1 と組み合わせてみよう.

準備 1 : Haagerup 性と deformation

まず $\text{SL}(2, \mathbb{Z})$ の Haagerup 性から次のような良い写像 (いわゆる positive definite map) の族 $\varphi_i: \text{SL}(2, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{C}$ が作れる :

$$\forall s \in \text{SL}(2, \mathbb{Z}), \quad \varphi_i(s) \rightarrow 1 \quad (\text{as } i \rightarrow \infty).$$

これらの写像は Γ の上に ($\mathbb{Z}^2$ 上で id として) 拡張される. さらにこれらの写像を, 群環 $\mathbb{C}[\Gamma]$ の上に $\varphi_i(\sum_{g \in \Gamma} a_g g) := \sum_{g \in \Gamma} a_g \varphi_i(g)$ として拡張する. これが実は, 対応するフォンノイマン環 $L\Gamma$ の上にまで伸ばせて, 以下を満たす :

$$\varphi_i: L\Gamma \rightarrow L\Gamma \quad \text{s.t.} \quad \|\varphi_i(x) - x\|_{2,\tau} \rightarrow 0, \quad x \in L\Gamma.$$

一般に, このように $\text{id}_{L\Gamma}$ に収束する良い写像 (いわゆる completely positive map) の族を **deformation** と言う. 特に今は Haagerup 性から作ったので, 最初の写像 $\varphi_i: \text{SL}(2, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{C}$ の段階で, $\varphi_i \in C_0(\text{SL}(2, \mathbb{Z}))$, すなわち次を仮定出来る :

$$\forall i, \quad \varphi_i(s) \rightarrow 0 \quad \text{as } s \rightarrow \infty.$$

ここで $s \rightarrow \infty$ とは, どんな有限部分集合 $F \subset \text{SL}(2, \mathbb{Z})$ に対しても, 途中からずっと $s \notin F$ が成り立つように, s を遠くに飛ばすという意味である. この条件をフォンノイマン環 $L\Gamma$ の情報に翻訳すると, 次の補題が得られる.

補題 2.4. もしユニタリ元の列 $(u_n)_n \subset L\Gamma$ が

$$\forall x, y \in L\Gamma, \quad \lim_n \|E_{L\mathbb{Z}^2}(y^* u_n x)\|_{2,\tau} = 0$$

を満たしていれば、上で作った *deformation* $\{\varphi_i\}_i$ は次を満たす：

$$\forall i, \quad \lim_n \|\varphi_i(u_n)\|_{2,\tau} = 0.$$

この補題の $(u_n)_n \subset L\Gamma$ が満たす仮定は、条件 $s \rightarrow \infty$ に対応していて、結論は $\lim_{s \rightarrow \infty} \varphi_i(s) = 0$ に対応している。これらの対応は、いわゆるフーリエ展開をする事によって簡単に正当化出来るのだが、ここでは触れない事にする。証明はフォンノイマン環論の基礎を知っていれば難しくない。最後に、この補題の仮定は、定理 2.1 の条件 2 と同じ形をしている事に注意しておく。

準備 2：相対性質 (T) と rigidity

包含 $\mathbb{Z}^2 \subset \Gamma$ は相対性質 (T) を満たすから、フォンノイマン環の包含 $L\mathbb{Z}^2 \subset L\Gamma$ も類似の性質を満たす。これは、次の形で述べられる：

補題 2.5. もし $L\Gamma$ 上に *deformation* $\{\psi_j\}_j$ があれば、部分環 $L\mathbb{Z}^2$ 上での収束は、次の意味で一様収束になる：

$$\sup\{\|\psi_j(a) - a\|_{2,\tau} \mid a \in L\mathbb{Z}^2, \|a\| \leq 1\} \rightarrow 0 \quad \text{as } j \rightarrow \infty.$$

これは **rigidity** と呼ばれるものの一種で、性質 (T) を用いた研究でよく見かける形の現象である。ここで、 $\sup$ の中にある条件 $\|a\| \leq 1$ は、 $\|\cdot\|_{2,\tau}$ ではなく通常的作用素としてノルムである事に注意する。また、この補題の主張はフォンノイマン環の情報のみを使っており、群の情報は一切出てきていない事にも注意する。(厳密にはトレース写像 τ の構成に群の情報を使っているが、今見ている $L\Gamma$ はトレース写像を一つしか持たない環なので、これも環の情報から定まっていると思ってよい。)

Deformation/rigidity の使い方

さて、上の二つを組み合わせよう。後で定理 2.1 を使う事を想定して、 $B := L\mathbb{Z}^2 \subset L\Gamma =: M$ と書こう。そしていきなりだが、自己同型 $\pi \in \text{Aut}(M)$ を固定して、 $A := \pi(L\mathbb{Z}^2)$ とする。相対性質 (T) は環の性質として理解出来ると言ったので、 $A \subset M$ もやはり相対性質 (T) を満たしており、補題 2.5 が適用出来る。だから、上のように $\text{SL}(2, \mathbb{Z})$ の Haagerup 性から作った *deformation* $\{\varphi_i\}_i$ を用意すると、 $\{\varphi_i\}_i$ は A 上で一様収束している事になる。ここで *deformation* $\{\varphi_i\}_i$ が $\varphi_i \in C_0(\text{SL}(2, \mathbb{Z}))$ から作った特別なものだった事を思い出そう。この条件は補題 2.4 の形に翻訳してあった。では、これらの事実を使って次を示そう。

定理 2.6 ([Po01]). この時、定理 2.1 の条件 $A \preceq_M B$ が成り立つ。

証明. これが成り立たないと仮定すると、定理 2.1 の条件 2 によって

$$\forall x, y \in L\Gamma, \quad \lim_n \|E_A(y^* u_n x)\|_{2,\tau} = 0$$

となるユニタリ元の列 $(u_n)_n \subset M$ が取れる。すると補題 2.4 が使えて

$$\forall i, \quad \lim_n \|\varphi_i(u_n)\|_{2,\tau} = 0$$

が成り立つ事になる．一方で，補題 2.5 が包含 $A \subset M$ と $\{\varphi_i\}_i$ に対して使えるので， $\{\varphi_i\}_i$ は A 上で一様収束している．今任意の $\varepsilon > 0$ を固定すると，この一様収束によって，ある番号 i_0 が存在して，

$$\|u_n - \varphi_{i_0}(u_n)\|_{2,\tau} < \varepsilon, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

となる（注． u_n はユニタリなので， $\|u_n\| = 1$ である）．次にこの番号 i_0 について，補題 2.4 の条件からある番号 n_0 があって，

$$\|\varphi_{i_0}(u_{n_0})\|_{2,\tau} < \varepsilon$$

となる．あとはこれらを組み合わせると，

$$1 = \|u_{n_0}\|_{2,\tau} \leq \|u_{n_0} - \varphi_{i_0}(u_{n_0})\|_{2,\tau} + \|\varphi_{i_0}(u_{n_0})\|_{2,\tau} < 2\varepsilon$$

となり， ε は任意なので矛盾する．以上によって定理 2.1 の条件 $A \preceq_M B$ が示された．□

実は $L(\mathbb{Z}^2) = B \subset M = L\Gamma$ は，例 1.8 の意味で Cartan 部分環である．これは，Pontryagin 双対 $L^\infty(\mathbb{T}^2, \text{Haar}) \simeq L\mathbb{Z}^2$ 等から理解する事が出来る．よって， $A, B \subset M$ はいずれも Cartan 部分環であり，系 2.3 から次を得る．

系 2.7. 任意の自己同型 $\pi \in \text{Aut}(M)$ に対して，あるユニタリ元 $u \in M$ があって

$$u\pi(B)u^* = B$$

を満たす．つまり M の全ての自己同型は，(ユニタリ共役の違いを無視すれば) 部分環 $B \subset M$ を保つ．

例 1.8 の最後に触れたように，Cartan 部分環の位置が特定出来れば，群作用の情報がある程度復元出来る．詳しくは触れないが，軌道同値関係と呼ばれる情報が取り出せて，これを既知の結果と組み合わせる事で次が得られる．

系 2.8. フォンノイマン環 $L\Gamma$ の基本群は自明である．

フォンノイマン環の**基本群**とは，フォンノイマンの初期の論文に現れた不変量である．フォンノイマン環論で最も重要な問題は環の分類であるが，現在までに定義出来た不変量はこの基本群のみである．よって非常に重要な研究対象なのだが，フォンノイマンの初期の研究以来，ほとんど理解が進んでいなかった．基本群に対する新しい計算方法を提案した今回の Popa の仕事は，まさに歴史的発見であると言える．

この革命的仕事の後，Popa はさらなる理論の改良を重ね，基本群に限らず大きな結果を量産していく事になる．これが deformation/rigidity 理論の始まりである．これまで見てきたように，群やその作用と関係が深い理論であるが，一方で最も重要な定理 2.1 は一般的な定理である．だからこそ，群やその作用の研究に留まらない可能性を持っており，そしてだからこそ大きな進展をもたらす事が出来たのである．

3. Deformation/rigidity 理論と III 型フォンノイマン環

この章では，いよいよ私の研究について解説する．まず最初に，富田・竹崎理論や量子群などいくつかの概念を先に解説し，その後私の研究の紹介に入る．

3.1. III型フォンノイマン環と富田・竹崎理論

前章では、群フォンノイマン環 $L\Gamma$ についての話が主だった。この場合、フォンノイマン環はトレース写像 $\tau: L\Gamma \rightarrow \mathbb{C}$ を持っており、これは極めて有効な道具として機能していた。しかし、フォンノイマン環はいつもトレースを持っているとは限らない。

フォンノイマン環のタイプ

一般にフォンノイマン環はI型、II型、III型の3つのタイプに分類出来る。I型は可換環や行列環、II型はI型ではないがトレース写像を持つ環、そしてIII型はトレース写像を持たない環だ。すでに見たように、離散群と良い関係があるのはII型環である。一方で、物理学で現れるフォンノイマン環はいつもIII型であり、II型、III型ともに重要な研究対象となっている。

一般にIII型環は、II型環よりも研究が難しい。トレース写像とはある種の可換性を意味するのだから、これは当然の事であろう。III型環を研究する道具として、1960年代から始まったのが富田・竹崎理論である。

フォンノイマン環の標準表現

一般にはトレース写像があるか分からないので、しょうがないからフォンノイマン環 M と、トレース条件を満たすか分からない線形写像 $\varphi: M \rightarrow \mathbb{C}$ の組を考える (faithful, normal, positive という条件がいつでも仮定出来る)。群フォンノイマン環 $L\Gamma$ がヒルベルト空間 $\ell^2(\Gamma)$ に作用するように、フォンノイマン環 M が自然に作用するヒルベルト空間 $L^2(M, \varphi)$ を以下のように構成出来る。

まず M 上に内積を

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_\varphi: M \times M \ni (x, y) \mapsto \varphi(y^*x) \in \mathbb{C}$$

で定める。これが well-defined かつ非退化である事は、上で仮定した φ の条件から分かる。これを用いて M を完備化したヒルベルト空間を $L^2(M, \varphi)$ (または単に $L^2(M)$) と書こう。包含写像を $\Lambda_\varphi: M \rightarrow L^2(M)$ と書くと、 M の (左からの) 作用が

$$x\Lambda_\varphi(a) := \Lambda_\varphi(xa), \quad x, a \in M$$

で定まる。この方法で $M \subset \mathbb{B}(L^2(M))$ となる。このヒルベルト空間への作用を、 M の標準表現と言う。実は表現が φ の取り方によらない事や、 $L\Gamma$ の時はちょうど $\ell^2(\Gamma)$ になる事などが知られている。

注意 3.1. (トレース条件の使い方) もし φ がトレース条件 $\varphi(xy) = \varphi(yx)$ ($x, y \in M$) を満たすとする、 M の右からの作用

$$x\Lambda_\varphi(a) := \Lambda_\varphi(ax), \quad x, a \in M$$

も同様に定まる。この時は、環構造とヒルベルト空間の構造を組み合わせた研究が出来るようになる。代表的なものは、ヒルベルト空間の射影定理を用いてフォンノイマン環の中から適当な不動点を探してくる方法である。こういう議論は一般には成り立たず、III型環の難しさの一つにもなっている。例えば、定理 2.1 の証明でもこのような方法が使われており、だからこそIII型環への理解が追い付いていないという状況になっている。

富田・竹崎理論

フォンノイマン環 M と写像 φ を上のように考え、標準表現 $L^2(M)$ を固定する。この時反線形作用素

$$S_\varphi: M \ni x \mapsto x^* \in M$$

を、 $L^2(M)$ の上の閉作用素に拡張する事が出来る。これが有界であるという条件は、 $\varphi(x^*x)$ と $\varphi(xx^*)$ があまり離れていないという意味になる。つまりこの作用素は、 φ がどのくらいトレースと近いか、という情報を持っているという事である。(例えば φ がトレース写像ならば、これは等長である。) 富田・竹崎理論とは、「トレース条件を満たさない事から来る困難」を、この非有界作用素 S_φ の情報を用いて記述する理論である。以下では、本稿に必要な情報のみに絞って説明する。富田・竹崎理論の詳細については [Ta83] を見よ。

さて S_φ は閉作用素なので、極分解を取って

$$S_\varphi = J_\varphi \Delta_\varphi, \quad \Delta_\varphi = (S_\varphi^* S_\varphi)^{\frac{1}{2}}$$

としよう。ここで Δ_φ は自己共役、正、線形かつ閉作用素であり、 J_φ は等長、全射、反線形作用素である。 Δ_φ をモジュラー作用素、 J_φ をモジュラー共役作用素と言う。 S_φ の情報はこの二つの作用素が持っている。 Δ_φ は自己共役かつ正なので、 Δ_φ^{it} ($t \in \mathbb{R}$) というユニタリの族を考える事が出来る。この時、富田の定理によって

$$\Delta_\varphi^{it} M \Delta_\varphi^{-it} = M, \quad t \in \mathbb{R}$$

が成り立つので、各 $t \in \mathbb{R}$ に対して

$$\sigma_t^\varphi: M \ni x \mapsto \Delta_\varphi^{it} x \Delta_\varphi^{-it} \in M$$

は自己同型である。ここから $\mathbb{R}$ の M への作用が定まるので、これをモジュラー作用と言う。

モジュラー作用は多くの情報を持っている。特に重要な点として、モジュラー作用が自明である事と φ がトレース条件を満たす事は同値である。ここから例えば、

$$M_\varphi := \{x \in M \mid \sigma_t^\varphi(x) = x, \forall t \in \mathbb{R}\}$$

という部分フォンノイマン環（これを φ の可換子環と言う）の上では φ はトレース条件を満たす。この部分環がどのくらいの大きさかは分からないが、ある程度大きければ研究に役立つ。例えば

$$M'_\varphi \cap M := \{x \in M \mid xy = yx, \forall y \in M_\varphi\} \subset M_\varphi$$

を満たすくらい大きければかなり役に立つ。全ての III 型因子環がこれを満たす写像 φ を持つか、というのは有名未解決問題である (Connes' bicentralizer problem)。

次にこのモジュラー作用素を用いて、富田・竹崎理論で最も重要な定理である竹崎双対性について説明する。モジュラー作用によって $\mathbb{R}$ が M に作用しているので、例 1.8 と同様の方法で、接合積 $M \rtimes \mathbb{R}$ を作る事が出来る。こうやって作った新しいフォンノイマン環は、実はモジュラー作用素が自明になるように調節出来るので、必ずトレー

ス写像を持つ（ただし無限値を許すような写像になる）。この接合積フォンノイマン環を M の連続核と呼ぶ。連続核の構成には写像 φ を用いるが、実は結果的に出来るフォンノイマン環は写像 φ の選び方によらない事が知られている。竹崎双対性とは、このようにして作った連続核から、元の M を復元出来るという定理である。

詳しく述べるためには、相対作用の概念が必要となる。構成方法から、 $M \rtimes \mathbb{R}$ の中には $L\mathbb{R}$ のコピーが入っているが、Pontryagin 双対性から $L\mathbb{R} \simeq L^\infty(\widehat{\mathbb{R}}) = L^\infty(\mathbb{R})$ である。 $L^\infty(\mathbb{R})$ には $\mathbb{R}$ が平行移動で自然に作用するので、これを相対作用と呼ぶ。この作用は、自然に連続核 $M \rtimes \mathbb{R}$ の上に拡張出来る。

定理 3.2 (竹崎双対性). 連続核と双対作用で作った接合積フォンノイマン環 $(M \rtimes \mathbb{R}) \rtimes \mathbb{R}$ は、自然に $M \otimes \mathbb{B}(L^2(\mathbb{R}))$ と同型である。特に M が III 型ならば、 M と同型である。

この定理によって、III 型フォンノイマン環 M を研究する事は、II 型フォンノイマン環 $M \rtimes \mathbb{R}$ とその上の $\mathbb{R}$ 作用の組を研究する事と同じになる。これは、原理的には II 型環の研究だけで III 型環の事が全て分かるという定理であり、富田・竹崎理論の集大成とも呼ぶべき大定理である。

注意 3.3. 実際の研究では、II 型環の上の作用（特に局所コンパクト群の作用）は非常に難しく、なんでも簡単に分かるというわけではない。例えば Connes の従順環の分類定理でも、竹崎相対性を認めた上で、II 型環の作用の研究に多くの難しさが残っていた。しかし竹崎相対性なしにこのような研究をする事はそもそも不可能であり、その重要性は今後も変わる事はないであろう。

3.2. Popa の技術と富田・竹崎理論

すでに見たように、deformation/rigidity 理論の核となる技術は定理 2.1 である。これは環の埋め込みという代数的な条件を、扱いやすいノルムの条件に変換する重要な技術なのであった。この時、フォンノイマン環 M はトレース写像を持っている必要があるので、III 型フォンノイマン環には直接適用出来ない。

そこで、我々の考える基本的問題は次のものである。

問題 3.4. III 型フォンノイマン環 M とその部分環 $A, B \subset M$ に対しても、 $A \preceq_M B$ を定式化し、定理 2.1 と同じ特徴付けを与える事は出来るか？

この方面についての最初の結果は、次のものである。

定理 3.5 ([CH08]). フォンノイマン環 M が II 型で、無限値を許すようなトレース写像 Tr を持つ場合でも、定理 2.1 と同様の条件が成立する。その際、条件 1 の射影 $p \in A$, $q \in B$ は $\text{Tr}(p), \text{Tr}(q) < \infty$ となるようにして考える。

フォンノイマン環 M が III 型の時、その連続核 $M \rtimes \mathbb{R}$ は II 型なのだが、対応するトレース写像は必ず無限値を許す写像になる。この定理は、主にこの $M \rtimes \mathbb{R}$ を想定して述べられている。実際、論文 [CH08] で初めて、連続核を用いて Popa の技術を適用するという視点が用いられた。これは非常に有効で、いくつかの問題について肯定的な結論が得られた。

次に現れた視点は、以下のものである。

定理 3.6 ([HV12, Ue12]). フォンノイマン環 M が III 型でも、部分環 B がトレース写像を持てば定理 2.1 と同様の条件が成立する。

これは全体の環 M に制限がないのが良い所で、特に Popa の技術を使う際に連続核に行く必要がない。実際の研究ではどこかで連続核は現れるのだが、少なくとも Popa の技術を使う際には必要ないという事だ。一方で、 B がトレース写像を持つというのは強い制約だし、実は A もそうでないと実用性がない。例えば A, B が可換な時などは、非常に役に立つ定理であり、系 2.7 の視点とも相性が良い。

これらの定理は、deformation/rigidity 理論を III 型フォンノイマン環に適用する際の最も基本的な道具である。これらを元に、多くの重要な定理が III 型フォンノイマン環に対しても示されている。

3.3. 磯野の結果の紹介

では最後に、実際に私が得た結果について解説しよう。私は 2012 年の修士論文以来ずっと、deformation/rigidity 理論と 富田・竹崎理論 についての研究を行っている。2014 年までは自由量子群フォンノイマン環と呼ばれる具体例の研究を、その後は Popa の技術など必要な道具についての研究を主に行った。

自由量子群フォンノイマン環

量子群について解説するのは本稿の趣旨とは違うので、ここでは必要最小限に留める。作用素環論における **コンパクト量子群** [Wo95] とは、フォンノイマン環 M (C^* 環でもよい) と $*$ -準同型 $\Delta: M \rightarrow M \otimes M$ の組であって、ある条件を満たすものの事だ。写像 Δ は **余積** と呼ばれ、群の積に対応する。例えばコンパクト群 G の場合は

$$M = L^\infty(G), \quad \Delta(f)(x, y) = f(xy) \quad (x, y \in G, f \in L^\infty(G))$$

を考える事に対応しており、出てくるフォンノイマン環は可換である。量子群は、これを非可換フォンノイマン環にまで拡張したものとみなせばよい。双対定理の視点からは離散群の双対を含むべきだが、これは $M = L\Gamma$ と $\Delta(g) = g \otimes g$ を考えるとよい。

量子群の最も基本的な例は、いわゆるリー群の q -変形である。しかしこれらから出てくるフォンノイマン環は全て従順なので、フォンノイマン環論からは面白くない（フォンノイマン環論の道具で研究すべき対象でない、という意味である）。一方、量子群論においてはもっと複雑な構造を持つものも知られており、中でも興味深い例が **自由量子群** である。自由量子群とは、ユニタリ群 $U(n)$ の量子群版であり、その双対の構造が自由群に似ている事からその名前がついている。

きちんと定義してみよう。まずユニタリ群 $U(n)$ を可換 C^* 環 $C(U(n))$ の視点で見てみる。関数 $u_{i,j} \in C(U(n))$ を、行列の (i, j) 成分を取り出す関数とすると、 $C(U(n))$ は $u_{i,j}$ 達で生成されており、行列 $u := (u_{i,j})_{i,j}$ は $u^*u = uu^* = 1$ を満たすユニタリ行列である。これらの条件を用いて、 $C(U(n))$ を次のように捉えなおす事が出来る。

- もし可換 C^* 環 A が生成元 $\{v_{i,j}\}_{i,j=1}^n$ を持ち、かつ $(v_{i,j})_{i,j}$ がユニタリとすると、必ず $C(U(n))$ から A への $*$ -準同型が $u_{i,j}$ を $v_{i,j}$ に移すように存在する。

これは $C(U(n))$ の普遍性を表している。これを元に A の部分を非可換環に変えたものが自由量子群である。非可換になる都合上、ユニタリの部分がやや複雑になる。

定義 3.7 ([VW95]). 行列 $F \in GL(n, \mathbb{C})$ を固定する。自由量子群とは $\{u_{i,j}\}_{i,j=1}^n$ で生成されており、次の条件を満たすただ一つの C^* 環の事である。

- $(u_{i,j})_{i,j}$ と $F(u_{i,j}^*)_{i,j}F^{-1}$ はユニタリである。

- もし C^* 環 A が生成元 $\{v_{i,j}\}_{i,j=1}^n$ を持ち、かつ $(v_{i,j})_{i,j}$ と $F(v_{i,j}^*)_{i,j}F^{-1}$ がユニタリとすると、 A への $*$ -準同型が $u_{i,j}$ を $v_{i,j}$ に移すように存在する。

この環を、 $C(U(n))$ 上の類似で $C(U(F)^+)$ と書く事にしよう。普遍性から写像

$$\Delta: C(U(F)^+) \ni u_{i,j} \mapsto \sum_{k=1}^n u_{i,k} \otimes u_{k,j} \in C(U(F)^+) \otimes C(U(F)^+)$$

が定まるので、これは (C^* 環としての) 量子群の条件を満たす。すると量子群の一般論から Haar 測度にあたるものが作れて、 $L^\infty(U(F)^+)$ が定義出来る。これが**自由量子群フォンノイマン環**である。 (L^∞ という記号を用いているが、非可換である。)

この環は、リー群の q -変形で作ったものとはかなり異なる性質を持っており、特にその双対である離散量子群の構造が自由群 $\mathbb{F}_n$ とよく似ている。そのような視点から、自由群フォンノイマン環 $L\mathbb{F}_n$ と類似の性質が成り立つ事が期待されていたのだが、主に次の理由により簡単には研究出来なかった：

- 群ではなく量子群であるため、群の時の道具が使えない事。
- 多くの場合に III 型環になってしまうため、自由群フォンノイマン環 $L\mathbb{F}_n$ の研究に使っていた道具が使えない事。

我々の主題はもちろん二つ目の方であるから、最初の問題についてはここではあまり触れない事にする。ただし、自由量子群の (量子群としての) 研究は興味深く、近年の量子群論の中心的話題の一つである事に注意しておく。

磯野の研究 1：自由量子群フォンノイマン環の構造定理

では、私が実際に証明した定理を紹介していこう。基本的には、自由群フォンノイマン環 $L\mathbb{F}_n$ に対して示された重要な定理を、自由量子群フォンノイマン環 $L^\infty(U(F)^+)$ に対しても証明した、という内容である。行列 $F \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ ($n \geq 2$) に対して、 $L^\infty(U(F)^+)$ はいつも因子環であり、ほとんどの場合 III 型になる事に注意しておく。

まずは最初の定理である。

定理 3.8 ([Is12, Is13]). 任意 $F \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ ($n \geq 2$) に対して、 $L^\infty(U(F)^+)$ は *Cartan* 部分環を持たない。特にここから、接合積フォンノイマン環とは同型にならない。

例 1.8 で見たように、Cartan 部分環とは群作用から作る接合積フォンノイマン環が必ず持っているものである。だからこの定理は、環の構造定理であると同時に、分類定理の一種とみなす事も出来る。Cartan 部分環を持たない環を探す事は、重要な未解決問題だったのだが、それは Voiculescu によって解決した [Vo95]。その際に示された最初の例が、自由群フォンノイマン環 $L\mathbb{F}_n$ である。証明は自由確率論に基づいていたため、フォンノイマン環論のみを用いた証明が望まれていた。そして 2007 年に、小沢・Popa によって、deformation/rigidity 理論の枠組みで新たな証明が与えられた [OP07]。それを推し進める形で、多くの新しい例も発見され、それらの中には III 型環の例もあった。量子群から作った例としては定理 3.8 が初めてであり、後述するように、証明に使われた技術も新しいものを含んでいる。

では、次の結果を紹介するためにいくつか定義をしよう。フォンノイマン環 M, N が **stable 同型** とは $M \otimes \mathbb{B}(\ell^2) \simeq N \otimes \mathbb{B}(\ell^2)$ である時に言う。この時 $M \sim_{\mathrm{stab}} N$ と書こう。テンソル積の同型類を考える時は、この stable 同型を使うのが自然である。

定義 3.9. フォンノイマン環 M が **prime** とは、 M が非自明なテンソル積に分解しない事である。具体的には、もし $M \sim_{\text{stab}} M_1 \otimes M_2$ ならば、 M_1 か M_2 は I 型である。

定義 3.10. Prime フォンノイマン環の族 $\mathcal{C}$ を考える。 $\mathcal{C}$ が一意テンソル分解性質を満たすとは、任意有限個の $M_1, \dots, M_m$ に対して、テンソル積 $M := M_1 \otimes \dots \otimes M_m$ が非自明なテンソル分解を持たない事である。具体的には以下のようにする：

もし $N_1, \dots, N_n \in \mathcal{C}$ に対して $M \sim_{\text{stab}} N_1 \otimes \dots \otimes N_n$ ならば、実は $m = n$ で、適当に順番を並び替える事で、全ての i について $M_i \sim_{\text{stab}} N_i$ であるように出来る。

注意 3.11. もし全ての M_i が II 型ならば、 N_i は任意のフォンノイマン環でよい。しかし III 型の時には技術的仮定が必要になるので、簡単のため N_i も $\mathcal{C}$ から選んでいる。

Prime フォンノイマン環の例を探す事は、やはり重要な未解決問題だったが、Popa [Po83], Ge [Ge96] によって解決した。やはり自由群フォンノイマン環 LF_n がその最初の例である。その後小沢によるブレイクスルー [Oz03] があり、非常に簡単で強力な証明が得られた。その小沢の証明と、deformation/rigidity 理論の技術を組み合わせる事で、一意テンソル分解性質を満たす最初の例が小沢・Popa によって得られた [OP03]。その後も多くの例が見つかったのだが、III 型の例は見つかっていなかった。

以下の私の結果が、III 型環に対する初めての例である。

定理 3.12 ([Is14]). $n \geq 2$ と行列 $F \in GL(n, \mathbb{C})$ を動かして得られる自由量子群因子環の族を $\mathcal{C}$ とすると、これは一意テンソル分解性質を満たす。

定理 3.8, 3.12 の証明について

小沢によって定義された性質 (AO) という概念がある。これはすでに述べた小沢のブレイクスルー論文 [Oz03] で用いられており、フォンノイマン環の構造を調べる上で重要な概念になっている。特に、その証明の中で必ず C^* 環論が使われる点が興味深い。

定理 3.8, 3.12 の証明の核となるアイデアは、自由量子群因子環の連続核に対して、性質 (AO) の類似を証明する事である。自由量子群因子環そのものが性質 (AO) を満たす、というのはすでに知られていた [Ve04, VV05, VV08]。その証明に立ち返り、そこでの現象とモジュラー作用の関係を調べ、連続核の上での類似の現象を証明した。そこで主に使われたのは、やはり C^* 環論の基本的な道具である。

この核となるアイデアを使うと、定理 3.8 の方は比較的簡単に証明出来る。実際、論文 [PV12] のアイデアを少し改良して、連続核で再現すればよい。一方、定理 3.12 の方はさらに多くの議論が必要で、証明はかなり複雑で面倒な形になってしまった。実際、連続核を使ってテンソルを調べるのは大変で、より直接的な証明を探すべきである。それは後に定理 3.14 で見つかった。

磯野の研究 2 : Popa の技術の新しい定式化

次に、Popa の技術の新しい定式化について解説する。これらはいずれも、定理 3.5, 3.6 よりも扱いやすい形の定式化である。またこれらの定式化のもとで、連続核を使わない証明が出来るという点も理論的に重要である。

定理 3.13 ([HI15]). フォンノイマン環 M が III 型でも、部分環 A がトレース写像を持てば定理 2.1 と同様の条件が成立する。

ここから次の定理が示せる。これは定理 3.12 の改良版である。

定理 3.14 ([HI15]). 一意テンソル分解定理を満たすさらなる例が作れる. さらにその証明は, 連続核を使わない新しい証明である.

次に, 定理 3.13 とは異なる視点として, 超積を用いる定式化を考える事も出来る. 超積とは, 有界点列からなる空間に適当な同一視を入れて作るものだが, フォンノイマン環の超積はもっと複雑である. 環構造を入れるために, 適切な部分集合を見なければならぬ点が面倒で, その扱いは一般に難しい. これについては [AH12] で詳しく議論されている.

以下の定理では, 条件 $A' \cap M \preceq_M L^\infty(X, \mu)$ の代わりに, 超積 M^ω を用いた条件が使われている. この定理を使って例えば, 完全因子環の新しい例を与える事が出来る. この証明もやはり, 連続核を一切使わずに行う事が出来る.

定理 3.15 ([HI16]). Γ を自由群とし, これが測度空間 (X, μ) に非特異に作用しているとして接合積 $M := L^\infty(X, \mu) \rtimes \Gamma$ を考える. この時, 部分フォンノイマン環 $A \subset M$ (良い射影 $E_A: M \rightarrow A$ を仮定する) に対して, 以下のどちらかが成立する.

1. $A' \cap M^\omega \subset L^\infty(X, \mu)^\omega$;
2. A は従順な直和因子を持つ.

定理 3.13, 3.14, 3.15 の証明について

定理 3.13 では, 部分環 A がトレースを持つと仮定するので, $E_A: M \rightarrow A$ という射影を合成すると, A 上でトレース条件を満たす線形写像が作れる. 証明の肝は, 定理 2.1 の証明に出てくる basic construction を扱う際に, その上での operator valued weight と上の線形写像を合成する点である. この条件のもとで, 注意 3.1 で述べた, 平均を取るという問題をクリア出来る. また, ここでは深くは述べないが, Connes' bicentralizer problem についてのある定理を示しており, それは定理 3.14 の証明の中で使われる. 具体的には, もしこの条件を満たさない環があるとすれば, その中からもっと特別な構造を持った部分環で, やはりこの条件を満たさないものが取れる, という定理である. これも, [AH12] での発展を元にした結果の一つであり, 証明は難しくないものの, 結論は極めて非自明である.

定理 3.15 は超積を用いる方法だが, そのような視点自体は II 型環の時にすでに現れていた. Popa の技術を超積に変えた際の具体的な違いは, ユニタリの列が一般の有界点列に変わる点である. II 型の時の証明はそれでもよいのだが, III 型の場合には問題が起きる. これは, Popa の spectral gap 論法と呼ばれる議論を III 型環で再現する事で, 上手く乗り越える事が出来た.

参考文献

- [AH12] H. Ando and U. Haagerup, *Ultraproducts of von Neumann algebras*. J. Funct. Anal. **266** (2014), no. 12, 6842–6913.
- [CH08] I. Chifan and C. Houdayer, *Bass-Serre rigidity results in von Neumann algebras*, Duke Math. J. **153** (2010), 23–54.
- [Co75] A. Connes, *Classification of injective factors*. Ann. of Math. (2) **104** (1976), 73–115.
- [Ge96] L. Ge, *Applications of free entropy to finite von Neumann algebras*. Amer. J. Math. **119** (1997), no. 2, 467–485.
- [Ha85] U. Haagerup, *Connes' bicentralizer problem and uniqueness of the injective factor of type III₁*. Acta Math. **158** (1987), no. 1-2, 95–148.

- [HV12] C. Houdayer and S. Vaes, *Type III factors with unique Cartan decomposition*, J. Math. Pures Appl. **100** (2013), 564–590.
- [HI15] C. Houdayer and Y. Isono, *Unique prime factorization and bicentralizer problem for a class of type III factors*. Adv. Math. **305** (2017), 402–455.
- [HI16] C. Houdayer and Y. Isono, *Bi-exact groups, strongly ergodic actions and group measure space type III factors with no central sequence*. Comm. Math. Phys. **348** (2016), no. 3, 991–1015.
- [Is12] Y. Isono, *Examples of factors which have no Cartan subalgebras*. Trans. Amer. Math. Soc. **367** (2015), 7917–7937.
- [Is13] Y. Isono, *On bi-exactness of discrete quantum groups*. Int. Math. Res. Not. IMRN 2015, no. 11, 3619–3650.
- [Is14] Y. Isono, *Some prime factorization results for free quantum group factors*. J. Reine Angew. Math. **722** (2017), 215–250.
- [Kr75] W. Krieger, *On ergodic flows and the isomorphism of factors*. Math. Ann. **223** (1976), 19–70.
- [Oz03] N. Ozawa, *Solid von Neumann algebras*. Acta Math. **192** (2004), 111–117.
- [OP03] N. Ozawa and S. Popa, *Some prime factorization results for type II_1 factors*. Invent. Math. **156** (2004), 223–234.
- [OP07] N. Ozawa and S. Popa, *On a class of II_1 factors with at most one Cartan subalgebra*. Ann. of Math. (2), **172** (2010), 713–749.
- [Po83] S. Popa, *Orthogonal pairs of $*$ -subalgebras in finite von Neumann algebras*. J. Operator Theory **9** (1983), no. 2, 253–268.
- [Po01] S. Popa, *On a class of type II_1 factors with Betti numbers invariants*, Ann. of Math. **163** (2006), 809–899.
- [Po03] S. Popa, *Strong rigidity of II_1 factors arising from malleable actions of w -rigid groups I*. Invent. Math. **165** (2006), 369–408.
- [PV12] S. Popa and S. Vaes, *Unique Cartan decomposition for II_1 factors arising from arbitrary actions of hyperbolic groups*. J. Reine Angew. Math. **694** (2014), 215–239.
- [Ta83] 竹崎正道, 作用素環の構造, 岩波書店, 1983年. ISBN 4-00-005398-1.
- [Ue12] Y. Ueda, *Some analysis on amalgamated free products of von Neumann algebras in non-tracial setting*, J. London Math. Soc. **88**, No.1 (2013), 25–48.
- [Ve04] R. Vergnioux, *Orientation of quantum Cayley trees and applications*. J. Reine Angew. Math. **580** (2005), 101–138.
- [VV08] S. Vaes and N. Vander Vennet, *Poisson boundary of the discrete quantum group $\widehat{A_u(F)}$* . Compos. Math., **146**(4):1073–1095, 2010.
- [VV05] S. Vaes and R. Vergnioux, *The boundary of universal discrete quantum groups, exactness, and factoriality*. Duke Math. J. **140** (2007), 35–84.
- [VW95] A. Van Daele and S. Wang, *Universal quantum groups*. Internat. J. Math. **7** (1996), 255–263.
- [Vo95] D. Voiculescu *The analogues of entropy and of Fisher’s information measure in free probability theory III. The absence of Cartan subalgebras*. Geom. Funct. Anal. **6** (1996), 172–199.
- [Wo95] S.L. Woronowicz, *Compact quantum groups*. In Symétries quantiques (Les Houches, 1995), North-Holland, Amsterdam, 1998, pp. 845–884.