指定した成分数の2-因子と次数和条件

千葉　周也　(熊本大学)*

1. はじめに

グラフのハミルトン閉路に関する問題は理論と応用の両面において現在もなお活発な研究がなされている．実際，様々な方向への拡張が考案され，多くの結果が残され続けていることが何よりもの証拠であろう．本研究では，その中の一つとして「指定した成分数の2-因子」に焦点を当てる．特に，そのような2-因子に対する次数和条件について考察し，これまでに得られた結果や最近の成果の関係性をあらためて整理する．また，そこから見えてくるハミルトン閉路と指定した成分数の2-因子の現時点の“差”を明らかにしていきたい．

2. ハミルトン閉路に対する次数和条件

以下，本研究で扱うグラフはすべて有限かつ単純である．特に断りがない限り，“グラフ”は無向グラフのことを指すものとする．グラフ G の独立数と連結度をそれぞれ $\alpha(G)$ と $\kappa(G)$ で表し，独立 s 頂点次数和の最小値を $\sigma_s(G)$ とする．つまり，頂点 v の次数を $d_G(v)$ で表すとすると，$\alpha(G) \geq s$ のとき，

$$\sigma_s(G) = \min\left\{\sum_{v\in X} d_G(v):\ X \text{ は位数 } s \text{ の独立点集合}\right\};$$

$\alpha(G) < s$ のとき，$\sigma_s(G) = +\infty$ と定義する．グラフのすべての頂点を含む閉路を**ハミルトン閉路**と呼ぶ．

与えられたグラフにハミルトン閉路が存在するかどうかを判定する問題（ハミルトン閉路問題）はNP完全に属すことが知られている．従って，ハミルトン閉路の存在性に対する“より良い”十分条件に関する研究がその中心の一つとなっている．その中でも以下の結果はグラフ理論における古典的な定理の一つであり，この定理を出発点とした結果が数多く残されている（サーベイ論文[19]参照）．

定理 2.1 (Ore [24]). G を位数 $n \geq 3$ のグラフとする．このとき，$\sigma_2(G) \geq n$ ならば，G にハミルトン閉路が存在する．

一方，Chvátal, Erdős (1972) はハミルトン閉路の存在性に対して，独立数と連結度の関係を与えた．

定理 2.2 (Chvátal, Erdős [11]). G を位数 $n \geq 3$ のグラフとする．このとき，$\alpha(G) \leq \kappa(G)$ ならば，G にハミルトン閉路が存在する．

Bondy (1978) によって，Ore 条件をみたすグラフは Chvátal-Erdős 条件をみたすことが証明されている ([1])．従って，定理 2.2 は定理 2.1 よりも強いことになる．その

本研究は科研費（課題番号:17K05347, 17K05348）の助成を受けている．
2010 Mathematics Subject Classification: 05C70, 05C45, 05C38
キーワード：ハミルトン閉路, 2-因子, 点素な閉路, 次数和条件，独立数，連結度
* 〒860-8555 熊本市黒髪2-39-1　熊本大学大学院先端科学研究部（応用数理解析分野）
e-mail: schiba@kumamoto-u.ac.jp

後，Bondy (1980) は独立$\kappa(G)+1$頂点次数和を考えることで，定理 2.2の一般化を与えた．

定理 2.3 (Bondy [2])**.** Gを位数$n \geq 3$のグラフとする．このとき，$\sigma_{\kappa(G)+1}(G) > \frac{1}{2}(\kappa(G)+1)(n-1)$ならば，$G$にハミルトン閉路が存在する．

Yamashita (2008) は次数和に関する新しい不変量を導入することで，定理 2.3を改良した．グラフGの位数t以上の頂点部分集合Xに対して，

$$\Delta_t(X) = \max\left\{\sum_{x\in Y} d_G(x) : Y \subseteq X,\ |Y| = t\right\}$$

と定め，$s \geq t$に対して，

$$\sigma_t^s(G) = \min\left\{\Delta_t(X):\ X \text{は位数}\, s \,\text{の独立点集合}\right\}$$

と定義する．ただし，$\alpha(G) < s$のときは，$\sigma_t^s(G) = +\infty$とする．グラフGに対して，$\sigma_t^s(G) \geq t \cdot \frac{\sigma_s(G)}{s}$が成立することに注意せよ．

定理 2.4 (Yamashita [30])**.** Gを位数$n \geq 3$のグラフとする．このとき，$\sigma_2^{\kappa(G)+1}(G) \geq n$ならば，$G$にハミルトン閉路が存在する．

さらに，$\sigma_t^{\kappa(G)+1}(G)$という条件を考えた場合，$t = 2$のときが最良の条件であることが示されている．これはハミルトン閉路の存在性に対して “2頂点の次数和” が重要であることを意味している．

さて，次節以降では「指定した成分数の2-因子」に焦点を当て，次数和条件がどのように変化するかを見ていくことにする．また，一般のグラフだけでなく二部グラフや有向グラフ上のそのような2-因子の存在性に対する次数和条件についても考察する．

3. 指定した成分数の2-因子に対する次数和条件

各成分が閉路であるようなグラフGの全域部分グラフをGの**2-因子**という．従って，ハミルトン閉路は “成分数1の2-因子” と言い換えることができる．ハミルトン閉路問題とは対称的に，2-因子の存在性は必要十分条件が知られており ([27])，マッチング問題に帰着することで高速に求めることができる ([21])．さらに，ハミルトン閉路と2-因子のより詳細な “差” を調べるために，特定の制約を付加した2-因子の研究も活発に行われている．その中の一つとして「指定した成分数の2-因子（成分数kの2-因子）」を考えることができるが，そのような2-因子の存在性判定問題はハミルトン閉路問題と同等以上に難しい．従って，存在性に対する “より良い” 十分条件の考察が重要であり，それがまたハミルトン閉路という特別な場合との差を測る一つの尺度になる．

3.1. Ore型条件

1997年にBrandt, Chen, Faudree, Gould, Lesniakによって発表された以下の結果は非常に興味深いものである．

定理 3.1 (Brandt et al. [3])**.** kを正整数とし，Gを位数$n \geq 4k$のグラフとする．このとき，$\sigma_2(G) \geq n$ならば，Gに成分数kの2-因子が存在する．

この定理により，定理 2.1 の Ore 条件はハミルトン閉路のみならず，あらゆる数の成分から構成される 2-因子の存在性を保証することになる．また，完全二部グラフ $K_{(n-1)/2,(n+1)/2}$ から次数和条件の最良性が分かるので，ハミルトン閉路と成分数 $k\ (\geq 2)$ の 2-因子の間には Ore 型条件において差がないと言える．しかしながら，複数個の閉路を扱っている分，定理 3.1 の証明は定理 2.1 のものよりもはるかに複雑であることに注意されたい．以下は定理 3.1 の証明方針である．

ステップ 1. k 個の点素な閉路の存在性を示す．

ステップ 2. k 個の点素な閉路を成分数 k の 2-因子へと拡張する．

定理 3.1 の位数条件 “$n \geq 4k$” は，ステップ 1 にのみ使用されている．実際，Brandt et al. は Justesen ([16]) の結果のためにその位数条件を設定した（[3, Lemma1] の証明を参照せよ）．後に，Enomoto (1998) と Wang (1999) がそれぞれ独立に Justesen の結果を改善している．

定理 3.2 (Enomoto [13], Wang [28])**.** k を正整数とし，G を位数 $3k$ 以上のグラフとする．このとき，$\sigma_2(G) \geq 4k-1$ ならば，G に k 個の点素な閉路が存在する．

この定理を用いると，定理 3.1 の位数条件は “$n \geq 4k-1$” に改善できることが分かる．また，完全二部グラフ $K_{2k-1,2k-1}$ が位数条件の最良性を示している．

系 3.3 (Brandt et al. [3], Enomoto [13], Wang [28])**.** k を正整数とし，G を位数 $n \geq 4k-1$ のグラフとする．このとき，$\sigma_2(G) \geq n$ ならば，G に成分数 k の 2-因子が存在する．

これらの結果により，位数の十分大きいグラフの最小次数がその位数の半分以上あれば成分数 k の 2-因子が存在することになるが，もし与えられたグラフ上にハミルトン閉路の存在性がすでに分かっているのであれば，その最小次数条件を改善できることが知られている（下の結果以外に [14, 26] も参照せよ）．ここで，$\delta(G)$ はグラフ G の最小次数を表す．

定理 3.4 (DeBiasio et al. [12])**.** k を正整数，ε を $0 < \varepsilon < 1/10$ をみたす実数とし，G をハミルトン閉路をもつ位数 $n \geq 3k/\varepsilon$ のグラフとする．このとき，$\delta(G) \geq (2/5+\varepsilon)n$ ならば，G に成分数 k の 2-因子が存在する．

指定した成分数の 2-因子に関する結果の証明は，定理 3.1 と同様の方針（ステップ 1・ステップ 2）が用いられていることが多い．従って，“証明の方針” においてもこの定理は興味深いものと言えるだろう．実際，以下の問題について考察することで，定理 3.1 の別証明を与える可能性がある．

問題 3.5. 定理 3.4 を Ore 型条件に改良できるだろうか．

3.2. Chvátal-Erdős 型・Bondy 型・Yamashita 型条件

前述の定理 2.1 と定理 3.1 の関係性を考慮して，Chen, Gould, Kawarabayashi, Ota, Saito, Schiermeyer (2007) は Chvátal-Erdős 型条件において同様のことを予想している（[17, Problems 1.1, 1.2] も参照せよ）．

予想 3.6 (Chen et al. [5]). 任意の正整数kに対して，kのみに依存する自然数$n(k)$が存在し，$\alpha(G) \le \kappa(G)$をみたす位数$n(k)$以上のすべてのグラフGに成分数kの2-因子が存在する．

この予想に対して，Chen et al. は以下を証明した．

定理 3.7 (Chen et al. [5]). k, αを正整数とし，Gを$\alpha(G) = \alpha$をみたす位数nのグラフとする．このとき，$n \ge k \cdot r(\alpha + 4, \alpha + 1)$ かつ $\alpha \le \kappa(G)$ならば，Gに成分数kの2-因子が存在する．ここで，$r(m, n)$はラムゼー数を表す．

Kaneko, Yoshimoto ([17]) とSaito, Yoshimoto ([25]) は，上記予想の$k = 2$の場合にアプローチしている．また，論文[6]の中で関連した結果が得られているが，予想 3.6は一般には完全解決されていない．従って，ハミルトン閉路と成分数k (≥ 2)の2-因子の間にはChvátal-Erdős型条件において大きな差が存在する．

ここで，定理 2.2の証明方針について見てみることにしよう．Chvátal-Erdősによる“閉路の拡張法（ステップ 2）” のアイデアは以下の通りである．

1. グラフG上の閉路Cを$G - C$の成分Hの近傍によって有限個の区間に分割する．
2. 異なる区間内とHの頂点の隣接関係を調べることで閉路Cを拡張する（もし閉路Cを拡張できないとすると，各区間とHの頂点が独立点集合を形成することになり，Chvátal-Erdős条件に矛盾する.）

この議論における “閉路C” を “k個の点素な閉路$C_1, \ldots, C_k$” に置き換えてみると，成分数kの2-因子の存在性に対して次のことが容易に得られる．

命題 3.8. kを正整数とし，Gをk個の点素な閉路をもつグラフとする．このとき，$\alpha(G) \le \lceil \kappa(G)/k \rceil$ならば，$G$に成分数$k$の2-因子が存在する．

従って，もしk個の点素な閉路の存在性がすでに分かっているのであれば，$\alpha(G) \ge \lceil \kappa(G)/k \rceil + 1$が成立しているとしてよい．また，定理 2.3や定理 2.4を考慮すると，この関係式をみたすグラフに対して次数和条件を与えることがより自然のように思われる．この考察をもとに，我々は成分数kの2-因子の存在性に対して以下のYamashita型条件を与えた．

定理 3.9 ([8]). kを正整数とし，Gを位数$n \ge 5k - 2$のグラフとする．このとき，$\sigma_2^{\lceil \kappa(G)/k \rceil + 1}(G) \ge n$ならば，$G$に成分数$k$の2-因子が存在する．

この定理は定理 2.4と定理 3.1の共通の一般化になっている（第6節の図 1も参照せよ）.

系 3.10 ([8]). kを正整数とし，Gを位数$n \ge 5k - 2$のグラフとする．

(i) $\sigma_{\lceil \kappa(G)/k \rceil + 1}(G) > \frac{1}{2}(\lceil \kappa(G)/k \rceil + 1)(n - 1)$ならば，$G$に成分数$k$の2-因子が存在する.（従って，$\sigma_2(G) \ge n$ならば，$G$に成分数$k$の2-因子が存在する.）

(ii) $\alpha(G) \le \lceil \kappa(G)/k \rceil$ならば，$G$に成分数$k$の2-因子が存在する．

定理 3.9の位数条件 “$n \ge 5k - 2$” は，定理 3.1に対する状況と同様に，ステップ 1のために設定している．実際は，系 3.10のBondy型・Chvátal-Erdős型条件において，位数条件を “$n \ge 4k - 1$” に改善することができる（[7]を参照せよ）.

以下の表はこれまでの条件をまとめたものであり，各条件におけるハミルトン閉路と成分数 k (≥ 2) の 2-因子の現時点の差が見て取れる．

	ハミルトン閉路	成分数 k の 2-因子
Ore 型	$\sigma_2 \geq n$ 定理 2.1	$\sigma_2 \geq n$ 定理 3.1
Chvátal-Erdős 型	$\alpha \leq \kappa$ 定理 2.2	$\alpha \leq \lceil \kappa/k \rceil$ 系 3.10
Bondy 型	$\sigma_{\kappa+1} > \frac{1}{2}(\kappa+1)(n-1)$ 定理 2.3	$\sigma_{\lceil\kappa/k\rceil+1} > \frac{1}{2}(\lceil\kappa/k\rceil+1)(n-1)$ 系 3.10
Yamashita 型	$\sigma_2^{\kappa+1} \geq n$ 定理 2.4	$\sigma_2^{\lceil\kappa/k\rceil+1} \geq n$ 定理 3.9

表 1: 次数和条件の比較

4. 二部グラフ上の指定した成分数の 2-因子に対する次数和条件

4.1. Moon-Moser 型条件

Moon, Moser (1963) は定理 2.1 の “二部グラフ版” について考察し，二部グラフにおけるより自然な次数和条件を与えた．G を二部グラフとし，A と B をその部集合とする．$|A| = |B|$ のとき，G は**均等である**という．二部グラフ G における “非隣接 2 頂点次数和” の最小値 $\sigma_{1,1}(G)$ を以下で定義する．

$$\sigma_{1,1}(G) = \min \Big\{ d_G(u) + d_G(v) : u \in A, v \in B, uv \notin E(G) \Big\}.$$

ただし，G が完全二部グラフのときは，$\sigma_{1,1}(G) = +\infty$ とする．（二部グラフ G に対して，$\sigma_{1,1}(G) \geq \sigma_2(G) \geq 2\delta(G)$ が成立することに注意せよ．）

定理 4.1 (Moon, Moser [22]). G を位数 $2n \geq 4$ の均等二部グラフとする．このとき，$\sigma_{1,1}(G) \geq n+1$ ならば，G にハミルトン閉路が存在する．（従って，$\sigma_2(G) \geq n+1$ ならば，G にハミルトン閉路が存在する．また，$\delta(G) \geq (n+1)/2$ ならば，G にハミルトン閉路が存在する．）

前節までの話の流れから定理 4.1 の Moon-Moser 条件は成分数 k (≥ 2) の 2-因子の存在性も保証するのではないか？と考えるのは自然であろう．実際，Chen, Faudree, Gould, Jacobson, Lesniak (2000) はこの観点から研究を進め，最小次数条件に関して肯定的な結果を与えた．ここで，部集合が A, B の二部グラフ G に対して，$\delta_{1,1}(G) = \min \big\{ d_G(u) + d_G(v) : u \in A, v \in B \big\}$ と定義する．

定理 4.2 (Chen et al. [4]). k を正整数とし，G を位数 $2n$ の均等二部グラフとする．ただし，$n \geq \max\{51, k^2/2+1\}$ である．このとき，$\delta_{1,1}(G) \geq n+1$ ならば，G に成分数 k の 2-因子が存在する．（従って，$\delta(G) \geq (n+1)/2$ ならば，G に成分数 k の 2-因子が存在する．）

一方，Li, Wei, Yang (2001) は定理 4.1 よりもわずかに強い “Ore 型” 条件が成分数 k の 2-因子の存在性を保証することを示した．

定理 4.3 (Li et al. [20]). kを正整数とし，Gを位数$2n \geq 4k+2$の均等二部グラフとする．このとき，$\sigma_2(G) \geq n+2$ならば，Gに成分数kの2-因子が存在する．

しかしながら，これらの定理はMoon-Moser条件 "$\sigma_{1,1}(G) \geq n+1$" が成分数kの2-因子の存在性を保証するのか？という問いに完全には答えていなかった．そこで，我々は以下の解答を与えた．

定理 4.4 ([10]). kを正整数とし，Gを位数$2n$の均等二部グラフとする．ただし，$n \geq 12k+2$である．このとき，$\sigma_{1,1}(G) \geq n+1$ならば，Gに成分数kの2-因子が存在する．

この定理の次数和条件はすべてのkに対して最良である．従って，一般のグラフの場合と同様に，二部グラフにおいてもハミルトン閉路と成分数k (≥ 2)の2-因子の間には非隣接2頂点次数和条件において差がないと言える．

以下は定理 4.4の証明方針である．ここで，グラフGの辺部分集合Mで，互いに頂点を共有しないものをGの**マッチング**と呼ぶ．特に，Gの各頂点がMに属す一つの辺の端点になっているとき，Mを**完全マッチング**と呼ぶ．

ステップ 1. $G - \bigcup C_i$が完全マッチングを含むようなk個の点素な閉路$C_1, \ldots, C_k$の存在性を示す．

ステップ 2. ステップ 1のk個の点素な閉路を成分数kの2-因子へと拡張する．

ステップ 2で閉路を因子へ拡張するために，ステップ 1では閉路外が完全マッチングを含むように設定している．また，第5.2節で示されるように，ステップ 1における点素な閉路は，有向グラフ上の点素な有向閉路と密接な関係がある．これは二部グラフにおける問題が一般のグラフの場合に比べて難しい問題であることを示唆している．

4.2. 二部グラフにおける独立数

二部グラフにおけるChvátal-Erdős型条件はどうなるだろうか．そもそも二部グラフにおける独立数や連結度をどのように定義すべきだろうか．Ordaz, Amar, Raspaud (1996) は二部グラフ上のハミルトン閉路に対して，以下の "独立数" と最小次数の関係を与えている．ここで，部集合がA, Bの二部グラフGに対して，$\alpha_{\mathrm{BIP}}(G)$を以下で定義する．

$$\alpha_{\mathrm{BIP}}(G) = \max\Big\{|X| : X \text{ は } |X \cap A| = |X \cap B| \text{ をみたす独立点集合}\Big\}.$$

定理 4.5 (Ordaz et al. [23]). Gを位数$2n \geq 4$の均等二部グラフとする．このとき，$\alpha_{\mathrm{BIP}}(G) \leq 2\delta(G) - 4$ならば，$G$にハミルトン閉路が存在する．従って，$\alpha_{\mathrm{BIP}}(G) \leq 2\kappa(G) - 4$ならば，$G$にハミルトン閉路が存在する．

Ore条件とChvátal-Erdős条件の関係性とは異なり，定理 4.1のMoon-Moser条件をみたす二部グラフが定理 4.5の条件をみたすとは限らないことに注意されたい．しかしながら，これまでの話の流れを考慮すると，以下の問題は自然であり，そこから新たな展開の可能性が十分に期待できるように思われる．

問題 4.6. 二部グラフにおける成分数kの2-因子に対する "独立数$\alpha_{\mathrm{BIP}}(G)$" と連結度の関係を与えよ．また，定理 4.5の条件は成分数kの2-因子の存在性を保証するだろうか．

5. 有向グラフ上の指定した成分数の2-因子に対する次数和条件

5.1. Woodall型条件

Woodall (1972) は有向グラフにおける**有向ハミルトン閉路**（すべての頂点を含む有向閉路）の存在性に対して次数和条件を与えた．有向グラフ D に対して，“非隣接2頂点次数和” の最小値 $\sigma_{1^+,1^-}(D)$ を以下で定義する．ここで，$A(D)$ は D の弧集合を表し，$d_D^+(v)$ と $d_D^-(v)$ のそれぞれは頂点 v の出次数と入次数を表す．

$$\sigma_{1^+,1^-}(D) = \min\Big\{d_D^+(u) + d_D^-(v) : u, v \in V(D), u \neq v, (u, v) \notin A(D)\Big\}.$$

ただし，D が完全有向グラフのときは，$\sigma_{1^+,1^-}(D) = +\infty$ とする．

定理 5.1 (Woodall [29]). D を位数 $n \geq 2$ の有向グラフとする．このとき，$\sigma_{1^+,1^-}(D) \geq n$ ならば，D に有向ハミルトン閉路が存在する．

この定理はOreの定理 (定理 2.1) の一般化になっている．

注意 5.2. G を位数 n のグラフとし，$D(G)$ を G の各辺 uv を2つの弧 (u, v) と (v, u) に置き換えることで G から得られる有向グラフとする．このとき，$D(G)$ の定め方より

1. 次の (i)–(iii) は同値である:
   (i) $(u, v) \in A(D(G))$，(ii) $(v, u) \in A(D(G))$，(iii) $uv \in E(G)$.（特に，$\sigma_2(G) = \sigma_{1^+,1^-}(D(G))$ が成立する.）
2. $D(G)$ 上の長さ l (≥ 3) の有向閉路は G 上の長さ l の閉路に対応している．

従って，もしグラフ G が Ore 条件をみたすならば，有向グラフ $D(G)$ は定理 5.1 の Woodall条件をみたす．さらに，$D(G)$ における有向ハミルトン閉路の存在性は G におけるハミルトン閉路の存在性を意味する．よって，定理 5.1 は定理 2.1 よりも強いことが分かる．

我々は，定理 2.1 と定理 3.1 及び定理 2.1 と定理 5.1 の関係性を考慮して，Woodall 条件が以下の2-因子の存在性を保証することを示した．ここで，有向グラフ D に対して，各成分が有向閉路であるような D の全域有向部分グラフを**有向2-因子**と呼ぶ．

定理 5.3 ([9]). k を正整数とし，D を位数 $n \geq 12k + 3$ の有向グラフとする．このとき，$\sigma_{1^+,1^-}(D) \geq n$ ならば，D に各閉路の長さが3以上である成分数 k の有向2-因子が存在する．

注意 5.2 と同様の議論により，定理 5.3 は定理 3.1 よりも強いことが分かる．従って，定理 5.3 は定理 3.1 と定理 5.1 の共通の一般化になっている（第6節の図 1 も参照せよ）．

5.2. 二部グラフ上の完全マッチングを含む2-因子

前節で紹介した有向ハミルトン閉路の結果は二部グラフ上の完全マッチングを含むハミルトン閉路と関係がある．実際，Las Vergnas (1972) は定理 5.1 を以下のように言い換えている．ここで，グラフ G と G の完全マッチング M に対して，M に関する交互閉路を **M-閉路**と呼び，M の辺をすべて含むハミルトン閉路を **M-ハミルトン閉路**と呼ぶことにする．

定理 5.4 (Las Vergnas [18]). G を位数 $2n \geq 4$ の均等二部グラフとし，M を G の完全マッチングとする．このとき，$\sigma_{1,1}(G) \geq n+2$ ならば，G に M-ハミルトン閉路が存在する．

以下のことから定理 5.1 と定理 5.4 の同値性が分かる．

注意 5.5 ([15, 31] 等も参照せよ). D を位数 n の有向グラフとし，G を以下の (1)–(3) の手順に従って得られるグラフとする．

(1) D の各頂点 v を 2 つの頂点 v_A と v_B に分割する

(2) D の各弧 (u,v) を辺 u_Av_B に置き換える

(3) 辺集合 $M = \{v_Av_B : v \in V(D)\}$ を追加する

このとき，G は $\{v_A : v \in V(D)\}$ と $\{v_B : v \in V(D)\}$ を部集合とする位数 $2n$ の均等二部グラフであり，M は G の完全マッチングになることが分かる．

逆に，G を A, B を部集合とする位数 $2n$ の均等二部グラフ，M を G の完全マッチングとし，以下の (1')–(2') の手順に従って得られるグラフを D とすると，D は位数 n の有向グラフになることが分かる．

(1') G の M 以外の各辺 u_Av_B（$u_A \in A, v_B \in B$）を弧 (u,v) に置き換える

(2') M の各辺を 1 頂点に縮約する

上記それぞれの変形において，

1. 次の (i)–(ii) は同値である：
   (i) $(u,v) \in A(D)$，(ii) $u_Av_B \in E(G)$.（特に，$\sigma_{1^+,1^-}(D) = \sigma_{1,1}(G) - 2$ が成立する.）

2. D 上の長さ l (≥ 2) の有向閉路は G 上の長さ $2l$ の M-閉路に対応している．

従って，定理 5.3 も次のように言い換えることができる．ここで，グラフ G と G の完全マッチング M に対して，M の辺をすべて含む G の 2-因子を **M-2-因子**と呼ぶ．

定理 5.6 ([9]). k を正整数，G を位数 $2n$ の均等二部グラフとし，M を G の完全マッチングとする．ただし，$n \geq 12k+3$ である．このとき，$\sigma_{1,1}(G) \geq n+2$ ならば，G に各閉路の長さが 6 以上である成分数 k の M-2-因子が存在する．

注意 5.5 より，第 4.2 節で紹介した問題 4.6 は有向グラフ上の指定した成分数の有向 2-因子に対する “独立数” と連結度の関係への足掛かりとなるだろう．この意味でも問題 4.6 は興味深いものと言える．

6. おわりに

本稿では，ハミルトン閉路と指定した成分数の 2-因子の “差” を次数和条件の観点から考察してきた．特に，非隣接 2 頂点次数和条件を考えた場合は,（二部グラフや有向グラフにおいても）ハミルトン閉路に対する条件自体が成分数 k の 2-因子の存在性を保証することが分かった（定理 3.1, 4.4, 5.3, 5.6）．これは，ハミルトン閉路問題でよく使用される crossing や insertion の手法が成分数 k の 2-因子問題にも上手く適用できたためである．

一方，第2節と第3.2節で紹介したように，独立数や連結度に関するChvátal-Erdős型条件が存在すると，それを考慮した次数和条件によってその拡張を考えることができる（定理 3.9，系 3.10(i)）．しかしながら，現在のその次数和条件は成分数kに依存している（表 1参照）．ハミルトン閉路に対するChvátal-Erdős型条件が成分数kの2-因子の存在性を保証すると予想されているが（予想 3.6），それに対する良い証明法が現時点では見つかっていない．証明法の模索という意味では，命題 3.8（系 3.10(ii)）の条件を少しずつ改善していくことも一つの策のように思われる．今後は，Chvátal-Erdős型条件を中心に，次数和条件以外の条件における両者の関係性の解明に努めていく予定である．

最後に，本稿で紹介した定理（の一部）の関係図をまとめておく．

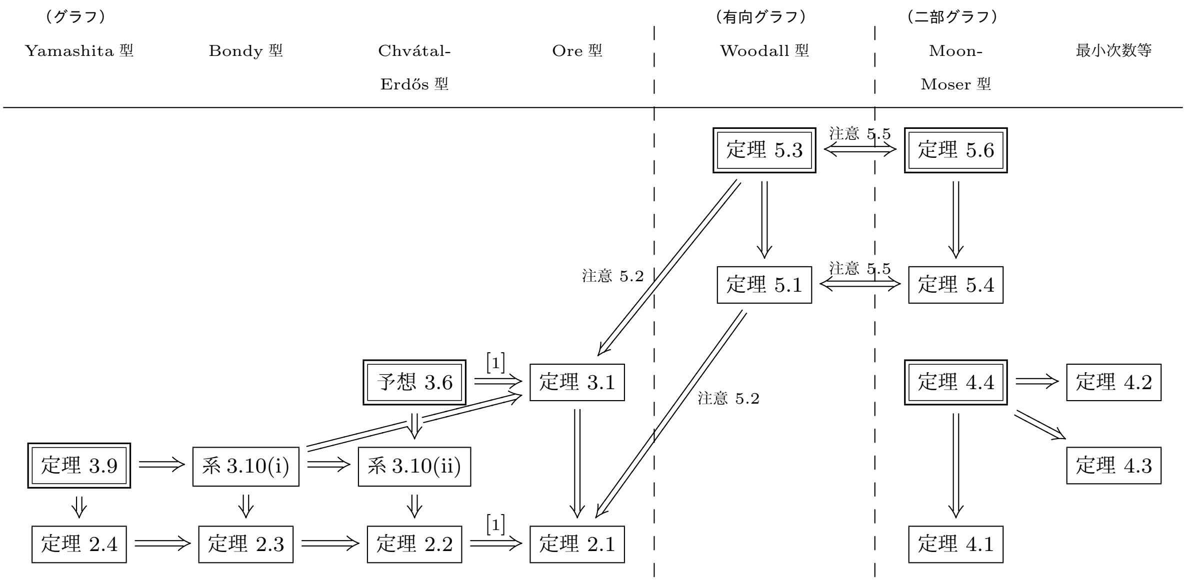

図 1: 定理の関係性

参考文献

[1] J.A. Bondy, *A remark on two sufficient conditions for hamilton cycles*, Discrete Math. **22** (1978) 191–193.

[2] J.A. Bondy, "Longest paths and cycles in graphs with high degree," Research Report CORR 80-16, Department of Combinatorics and Optimization, University of Waterloo, Waterloo, Ontario, Canada, 1980.

[3] S. Brandt, G. Chen, R. Faudree, R.J. Gould, L. Lesniak, *Degree conditions for 2-factors*, J. Graph Theory **24** (1997) 165–173.

[4] G. Chen, R.J. Faudree, R.J. Gould, M.S. Jacobson, L. Lesniak, *Cycles in 2-factors of balanced bipartite graphs*, Graphs and Combin. **16** (2000) 67–80.

[5] G. Chen, R.J. Gould, K. Kawarabayashi, K. Ota, A. Saito, I. Schiermeyer, *The Chvátal-Erdős condition and 2-factors with a specified number of components*, Discuss. Math. Graph Theory **27** (2007) 401–407.

[6] G. Chen, A. Saito, S. Shan, *The existence of a 2-factor in a graph satisfying the local Chvátal-Erdős condition*, SIAM J. Discrete Math. **27** (2013) 1788–1799.

[7] S. Chiba, *On degree sum conditions for 2-factors with a prescribed number of cycles*, preprint. (Available at arXiv:1705.02819.)

[8] S. Chiba, *On the difference between hamilton cycles and 2-factors with a prescribed number of cycles*, to appear in Electr. Notes Discrete Math.

[9] S. Chiba, T. Yamashita, "二部グラフ上の完全マッチングを含む 2-因子と有向グラフ上の有向 2-因子," 2016 年度応用数学合同研究集会予稿集, pp.122–129.

[10] S. Chiba, T. Yamashita, *A note on degree sum conditions for 2-factors with a prescribed number of cycles in bipartite graphs*, accepted in Discrete Math.

[11] V. Chvátal, P. Erdős, *A note on hamiltonian circuits*, Discrete Math. **2** (1972) 111–113.

[12] L. DeBiasio, M. Ferrara, T. Morris, *Improved degree conditions for 2-factors with k cycles in hamiltonian graphs*, Discrete Math. **320** (2014) 51–54.

[13] H. Enomoto, *On the existence of disjoint cycles in a graph*, Combinatorica **18** (1998) 487–492.

[14] R.J. Faudree, R.J. Gould, M.S. Jacobson, L. Lesniak, A. Saito, *A note on 2-factors with two components*, Discrete Math. **300** (2005) 218–224.

[15] R. Haggkvist, "On F-Hamiltonian graph," Graphs Related Topics, Academic Press, New York (1979) pp.219–231.

[16] P. Justesen, *On independent circuits in finite graphs and a conjecture of Erdős and Pósa*, Annals of Discrete Math. **41** (1989) 299–306.

[17] A. Kaneko, K. Yoshimoto, *A 2-factor with two components of a graph satisfying the Chvátal-Erdős condition*, J. Graph Theory **43** (2003) 269–279.

[18] M. Las Vergnas, Ph.D. Thesis, University of Paris, 1972.

[19] H. Li, *Generalizations of Dirac's theorem in Hamiltonian graph theory–a survey*, Discrete Math. **313** (2013) 2034–2053.

[20] X. Li, B. Wei, F. Yang, *A degree condition of* 2*-factors in bipartite graphs*, Discrete Applied Math. **113** (2001) 311-318.

[21] H. Meijer, Y. Húñez-Rodríguez, D. Rappaport, *An algorithm for computing simple k-factors*, Inform. Process. Lett. **109** (2009) 620–625.

[22] J.W. Moon, L. Moser, *On Hamiltonian bipartite graphs*, Israel J. Math. **1** (1963) 163–165.

[23] O. Ordaz, D. Amar, A. Raspaud, *Hamiltonian properties and the bipartite independence number*, Discrete Math. **161** (1996) 207–215.

[24] O. Ore, *Note on hamilton circuits*, Amer. Math. Monthly **67** (1960) 55.

[25] A. Saito, K. Yoshimoto, "The Chvátal-Erdős condition and a 2-factor with two components in a graph," 日本数学会 2016 年度年会応用数学分科会アブストラクト, pp.57–58.

[26] G. Sárközy, *On 2-factors with k cycles*, Discrete Math. **308** (2008) 1962–1972.

[27] W.T. Tutte, *A short proof of the factor theorem for finite graphs*, Canadian J. Math. **6** (1954) 347–352.

[28] H. Wang, *On the maximum number of independent cycles in a graph*, Discrete Math. **205** (1999) 183–190.

[29] D.R. Woodall, *Sufficient conditions for cycles in digraphs*, Proc. Lond. Math. Soc. **24** (1972) 739–755.

[30] T. Yamashita, *On degree sum conditions for long cycles and cycles through specified vertices*, Discrete Math. **308** (2008) 6584–6587.

[31] Z.B. Zhang, X. Zhang, X. Wen, *Directed hamilton cycles in digraphs and matching alternating hamilton cycles in bipartite graphs*, SIAM J. Discrete Math. **27** (2013) 274–289.