写像類群、Goldman-Turaev Lie 双代数、柏原 Vergne 問題

河澄　響矢　(東京大学)*

概　要

Let Σ be a compact connected oriented surface with non-empty boundary and a framing f. Then a subset of the mapping class group of Σ, which includes the Torelli group, is naturally embedded into the (completed) Goldman-Turaev Lie bialgebra of Σ. A framed version of the Turaev cobracket vanishes on the image of the embedding. So we need a formal description of the Goldman-Turaev Lie bialgebra. In the genus 0 case, the set of expansions inducing a formal description of the bialgebra is naturally bijective to the set of solutions of the Kashiwara-Vergne problem in the formulation of Alekseev-Torossian [6]. In view of this bijection, we can formulate a Kashiwara-Vergne problem associated with (Σ, f). The set of its solutions is non-empty except some of the genus 1 cases. This talk is based on joint works with Anton Alekseev (U. Geneva), Yusuke Kuno (Tsuda U.) and Florian Naef (U. Geneva).

はじめに

本講演の前半は、久野雄介氏（津田塾大学）との共同研究、後半は、久野氏, Anton Alekseev 氏（Genève 大学）および Florian Naef 氏（Genève 大学）との共同研究に基づきます。

2009 年 11 月に私のセミナーの大学院生だった久野雄介氏が拡大第一 Johnson 準同型 [29] の Dehn twist における値の表示式を発見しました。その表示式は、函数 $\frac{1}{2}(\log x)^2$ が Dehn twist を表示していることを示唆しており、symplectic 展開を使わなければ成り立たないものでした。これには驚嘆すると同時に函数 $\frac{1}{2}(\log x)^2$ が神秘的に思われました。かねてから（symplectic 展開を含む）Magnus 展開を使った Johnson 準同型の拡張を研究テーマとしていた私は、彼の公式をすべての次数の拡大 Johnson 準同型に一般化するべく共同研究をはじめました。その共同研究の中で Goldman Lie 代数の存在が浮かび上がり、symplectic 展開による Goldman Lie 代数の形式表示（formal description）に到達しました。本講演の内容はここから始まります。

そこで分かってきたのは、写像類群の Johnson 準同型は、Torelli 群の完備 Goldman Lie 代数への埋め込みと理解されるべきであるということです。そして、埋め込みの像は (framed) Turaev 余括弧積の核に含まれることもわかりました。これが Turaev 余括弧積の tensot 表示を必要とする理由でした。このあたりまでの共同研究の結果は survey paper [22] にまとめてあります。また、日本語文献としては [18] があります。それ以来、久野氏とともに Turaev 余括弧積の tensor 表示を求める試みを続けていました

本研究は科研費 (課題番号:15H03617) の助成を受けたものである。
2010 Mathematics Subject Classification: 57N05; 17B60, 17B62, 20F34
キーワード：Johnson 準同型, 榎本佐藤 trace, 発散 cocycle, Schedler 余括弧積.
* 〒153-8914 東京都目黒区駒場 3-8-1　東京大学 大学院数理科学研究科
e-mail: kawazumi@ms.u-tokyo.ac.jp

が、その中で Alekseev-Torossian [6] の発散 cocycle が出てきました。同時に、framing の必要性も明らかになってきました。

2015 年 3 月に Anton Alekseev 氏が来日し、数学会年会でも講演しました。その際、ホストの河野俊丈氏にお願いして Alekseev 氏と議論する機会を得たのが Alekseev 氏および彼の大学院生の Florian Naef 氏との共同研究の始まりです。結果として、以下のことが分かりました [2] [3] [4] 。種数 0 曲面においては、(Alekseev-Torossian [6] の意味での) 柏原 Vergne 問題の解は Turaev 余括弧積の形式表示を与えます。これによって一般に、空でない境界をもつ framed compact 曲面のそれぞれに対して柏原 Vergne 問題が定式化され、その解の全体の集合は、(framed) Turaev 余括弧積の形式表示を与える special/symplectic 展開全体の集合と自然に一対一対応することになります。種数 1 での幾つかの例外を除き、これらの柏原 Vergne 問題の解の集合は空でありません。解の構成には Enriquez [9] の elliptic associator の構成法を参考にしました。したがって、Turaev 余括弧積は、種数 1 での幾つかの例外を除き、形式表示を持ちます。とくに、(framed) Turaev 余括弧積の定める Johnson 準同型像の制約条件は榎本佐藤 trace [8] による制約条件と同値であることが分かります。なお、我々とは独立に Massuyeau [27] は種数 0 曲面での (framed) Turaev 余括弧積の形式表示を Kontsevich 積分を使って与えています。

本稿を通して、曲面 Σ は向きづけられた連結 compact 2 次元 C^∞ 多様体で空でない境界をもつものとする。このような曲面は種数と境界成分数によって分類される。整数 $g, n \geq 0$ について種数 g と境界成分数 $n+1$ の向きづけられた連結 compact 曲面を $\Sigma_{g,n+1}$ と表す。これらの曲面の接束は自明で、基本群は自由群である。

また、$\mathbf{k}$ を標数 0 の体とする。一般に $\mathbf{k}$-結合代数 $\mathfrak{A}$ について $[\mathfrak{A}, \mathfrak{A}]$ を集合 $\{[a,b](= ab-ba);\ a, b \in \mathfrak{A}\}$ の生成する $\mathfrak{A}$ の vector 部分空間とし、商 vector 空間 $|\mathfrak{A}| := \mathfrak{A}/[\mathfrak{A}, \mathfrak{A}]$ を考える。a priori には $|\mathfrak{A}|$ に入っている代数構造は $\mathbf{k}$-vector 空間の構造だけである。言い換えると、結合代数 $\mathfrak{A}$ を交換子 $[-,-]$ によって Lie 代数と見なしたときの Lie 代数としての Abel 化が $|\mathfrak{A}|$ である。$\mathfrak{A}$ に位相が入っているときの $|\mathfrak{A}|$ は、$[\mathfrak{A}, \mathfrak{A}]$ の閉包による $\mathfrak{A}$ の商ということにする。いずれの場合も商写像を $|\cdot| : \mathfrak{A} \to |\mathfrak{A}|$, $a \mapsto |a|$, と表す。

目　次

1. Goldman Lie 代数の完備化と形式表示

1.1. Goldman Lie 代数

まず、曲面 $\Sigma = \Sigma_{g,n+1}$, $g, n \geq 0$, について Goldman Lie 代数の定義 [11] を思い出す。$\hat{\pi} = \hat{\pi}(\Sigma) := [S^1, \Sigma]$ を曲面 Σ における自由 loop の自由 homotopy 類全体の集合とする。Σ は連結だから、Σ の基本群 $\pi_1(\Sigma)$ の共役類全体の集合とみなすこともできる。

$|\cdot|:\pi_1(\Sigma)\to\hat{\pi}(\Sigma)$, $\gamma\mapsto|\gamma|$, を共役類をとる写像すなわち基本群の基点を忘れる写像とする。任意の α と $\beta\in\hat{\pi}(\Sigma)$ について、これらを表す写像 $S^1\amalg S^1\to\Sigma$ として高々横断的二重点しかもたない C^∞-はめ込みであるものをとり、同じ記号 α と β で表す。交点の全体 $\alpha\cap\beta$ は有限集合となる。このとき、Goldman 括弧積 $[\alpha,\beta]$ は

$$[\alpha,\beta]:=\sum_{p\in\alpha\cap\beta}\varepsilon_p(\alpha,\beta)|\alpha_p\beta_p|\in\mathbf{Z}\hat{\pi}$$

によって定義される。ここで $\varepsilon_p(\alpha,\beta)\in\{\pm1\}$ は局所交叉数であって交点 p における α の速度ベクトルと β のそれとが右手系をなすとき $+1$, 左手系をなすとき -1 と定める。α_p および $\beta_p\in\pi_1(\Sigma,p)$ はそれぞれ α および β が定める p を基点とする based loop である。これらを $\pi_1(\Sigma,p)$ において積をとり、その上で基点 p の情報を忘れたものが $|\alpha_p\beta_p|$ である。 $\mathbf{Z}\hat{\pi}$ は集合 $\hat{\pi}=\hat{\pi}(\Sigma)$ の生成する自由 Abel 群である。Goldman [11] は、この括弧積が代表元のとり方によらず、$\mathbf{Z}\hat{\pi}$ に Lie 代数の構造を定めることを証明した。そこで $\mathbf{Z}\hat{\pi}=\mathbf{Z}\hat{\pi}(\Sigma)$ を曲面 Σ の Goldman Lie 代数と呼ぶ。

1.2. Goldman Lie 代数の完備化

ここから $\mathbf{Z}\hat{\pi}$ の代わりに、標数 0 の体 $\mathbf{k}$ に係数をもつ自由 vector 空間 $\mathbf{k}\hat{\pi}$ を考える。境界成分に番号をつける: $\partial\Sigma=\coprod_{j=0}^{n}\partial_j\Sigma$, $\partial_j\Sigma\approx S^1$. 基点 $*\in\partial_0\Sigma$ をとる。基本群 $\pi:=\pi_1(\Sigma,*)$ の群環 $\mathbf{k}\pi$ について $|\mathbf{k}\pi|=\mathbf{k}\hat{\pi}$ がなりたつことに注意する。記号 $|\cdot|$ は商写像としても基点を忘れる写像としても同じ写像を表している。元 $\gamma\in\pi$ について $\frac{1}{2}(\log\gamma)^2$ などを考えるためには、群環 $\mathbf{k}\pi$ に filtration を入れて完備化する必要がある。各 $j\geq1$ について境界成分 $\partial_j\Sigma$ に曲面 $\Sigma_{g_j,1}$, $g_j\geq1$, $1\leq j\leq n$, を貼付けたものを $\tilde{\Sigma}$ とする。$\tilde{g}:=g+\sum_{j=1}^{n}g_j\geq1$ について $\tilde{\Sigma}=\Sigma_{\tilde{g},1}$ となる。$\tilde{\pi}:=\pi_1(\tilde{\Sigma},*)$ とする。包含準同型 $\iota:\pi=\pi_1(\Sigma,*)\to\tilde{\pi}=\pi_1(\tilde{\Sigma},*)$ と、添加 ideal $I\tilde{\pi}:=\mathrm{Ker}\,(\mathbf{k}\tilde{\pi}\to\mathbf{k},\ \sum_{\gamma\in\tilde{\pi}}a_\gamma\gamma\mapsto\sum a_\gamma)$ をつかって $F^p(\mathbf{k}\pi):=\iota^{-1}((I\tilde{\pi})^p)$, $p\geq0$, と定義する。$F^p(\mathbf{k}\pi)$ は貼付ける曲面 $\Sigma_{g_j,1}$ のとり方によらない。$F^p(\mathbf{k}\pi)$ の $\mathbf{k}\hat{\pi}=|\mathbf{k}\pi|$ における像を $|F^p(\mathbf{k}\pi)|$ と表す。例えば、非分離的単純閉曲線と定数 loop との差は $|F^1(\mathbf{k}\pi)|$ に属し、境界に沿う閉曲線や分離的単純閉曲線と定数 loop との差は $|F^2(\mathbf{k}\pi)|$ に属する。包含準同型 ι は単射であるから $\bigcap_{p=0}^{\infty}F^p(\mathbf{k}\pi)=0$ である。群環 $\mathbf{k}\pi$ の完備化を $\widehat{\mathbf{k}\pi}:=\varprojlim_{p\to\infty}\mathbf{k}\pi/F^p(\mathbf{k}\pi)$ によって定義し、Goldman Lie 代数 $|\mathbf{k}\pi|=\mathbf{k}\hat{\pi}$ の完備化を $\widehat{\mathbf{k}\hat{\pi}}:=\varprojlim_{p\to\infty}\mathbf{k}\hat{\pi}/|F^p(\mathbf{k}\pi)|$ によって定義する。群環 $\mathbf{k}\pi$ には余積 $\Delta:\mathbf{k}\pi\to\mathbf{k}\pi\otimes\mathbf{k}\pi$ が、任意の $\gamma\in\pi$ について $\Delta(\gamma)=\gamma\otimes\gamma$ をみたすものとして定義されており、これによって $\mathbf{k}\pi$ は Hopf 代数となるが、この余積の連続拡張により、完備化 $\widehat{\mathbf{k}\pi}$ は完備 Hopf 代数となる。ここで $\gamma\in\pi$ について $\frac{1}{2}(\log\gamma)^2\in\widehat{\mathbf{k}\pi}$ である。$(\log\gamma)^2$ は $(\gamma-1)\in F^1(\mathbf{k}\pi)$ の冪級数だからである。したがって $|\frac{1}{2}(\log\gamma)^2|\in\widehat{\mathbf{k}\hat{\pi}}$ が定義される。他方、Goldman 括弧積は $\Big[|F^p(\mathbf{k}\pi)|,|F^q(\mathbf{k}\pi)|\Big]\subset|F^{p+q-2}(\mathbf{k}\pi)|$ を充たすので、$\widehat{\mathbf{k}\hat{\pi}}$ に Lie 代数の構造が誘導される。この Lie 代数を完備 Goldman Lie 代数とよぶことにする。同時に完備次数商 $\mathrm{gr}(\mathbf{k}\hat{\pi}):=\prod_{p=0}^{\infty}|F^p(\mathbf{k}\pi)|/|F^{p-1}(\mathbf{k}\pi)|$ にも Lie 代数の構造が定義される。Goldman Lie 代数の形式表示の問題とは、これら 2 つの Lie 代数が同型になるか?という問題である。

1.3. Goldman Lie 代数の形式表示

曲面 Σ の homology 群を $H:=H_1(\Sigma;\mathbf{k})$ と表す。境界成分の homology 類を $z_j:=[\partial_j\Sigma]\in H$, $0\leq j\leq n$, と表す。これらの生成する H の $\mathbf{k}$-vector 部分空間を $H^{(2)}$

とし、$H = H^{(1)}$ として H に filtration を入れる。H の生成する完備自由結合代数を $\widehat{T} = \widehat{T}(H) := \prod_{k=0}^{\infty} H^{\otimes k}$ とする。$\widehat{T}$ には通常の完備 Hopf 代数の構造が入る。つまり、余積 $\Delta : \widehat{T} \to \widehat{T} \hat{\otimes} \widehat{T}$ は、任意の $X \in H$ について $\Delta(X) = X \otimes 1 + 1 \otimes X$ を充たす連続代数準同型であり、antipode $\iota : \widehat{T} \to \widehat{T}$ は、任意の $X \in H$ について $\iota(X) = -X$ を充たす連続代数反準同型である [1]。$|\widehat{T}|$ は各成分への巡回群作用の coinvariants に他ならない: $|\widehat{T}| = \prod_{k=0}^{\infty} (H^{\otimes k})_{\mathbf{Z}/k}$. ここで巡回群 $\mathbf{Z}/k$ は $H^{\otimes k}$ の成分入れ替えとして作用している。上述の H の filtration は $\widehat{T}$ および $|\widehat{T}|$ の上の filtration を定める。随伴する完備次数商 $\mathrm{gr}(\widehat{T})$ は完備次数商 $\mathrm{gr}(\mathbf{k}\pi)$ と自然に同型である。これを $A = A^{(g,n+1)} := \prod_{p=1}^{\infty} F^p(\widehat{T})/F^{p+1}(\widehat{T}) = \mathrm{gr}(\widehat{T}) = \mathrm{gr}(\mathbf{k}\pi)$ と表す。A には完備 Hopf 代数の構造が $\widehat{T}$ から誘導される。A は $(H^{(1)}/H^{(2)}) \oplus H^{(2)}$ の生成する完備 tensor 代数に位相同型である。このとき group-like element の全体 $\mathrm{Grp}(A) := \{a \in A;\ \Delta(a) = a \hat{\otimes} a,\ a \neq 0\}$ は乗法に関して群をなす。これは、指数函数と対数函数を通じて、Lie-like element 全体の集合、すなわち $(H^{(1)}/H^{(2)}) \oplus H^{(2)}$ の生成する完備自由 Lie 代数 $L = L^{(g,n+1)} := \{u \in A;\ \Delta(u) = u \otimes 1 + 1 \otimes u\}$ と一対一対応している: $\exp : L \xrightarrow{\cong} \mathrm{Grp}(A)$, $u \mapsto \exp(u) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} u^k$, $\log : \mathrm{Grp}(A) \xrightarrow{\cong} L$, $a \mapsto \log(a) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} (a-1)^k$.

群準同型 $\theta : \pi \to \mathrm{Grp}(A)$ が group-like expansion であるとは、その線型拡張 $\theta : \mathbf{k}\pi \to A$ がfiltration を保ち、随伴する次数商 $\mathrm{gr}(\theta) : \mathrm{gr}(\mathbf{k}\pi) \to \mathrm{gr}(A) = A = \mathrm{gr}(\mathbf{k}\pi)$ が恒等写像であることをいう。このとき、$\theta : \mathbf{k}\pi \to A$, $\sum a_\gamma \gamma \mapsto \sum a_\gamma \theta(\gamma)$, は filtration を保つ完備 Hopf 代数の同型$\theta : \widehat{\mathbf{k}\pi} \xrightarrow{\cong} A$ を誘導し、filtration を保つ $\mathbf{k}$-vector 空間の同型$\theta : \widehat{\mathbf{k}\hat{\pi}} \xrightarrow{\cong} |A|$ を誘導する。group-like expansion θ の誘導する同型$\mathrm{gr}(\mathbf{k}\hat{\pi}) \cong |A|$ はθ のとり方によらず、これにより $|A|$ には括弧積が誘導され、 $|A|$ は Lie 代数となる。$|A|/\mathbf{k}|1|$ は、$\Sigma = \Sigma_{g,1}$ のとき A の連続 symplectic 導分のなす Lie 代数、すなわち Kontsevich の associative wor(l)d [23] に同型であり、$\Sigma = \Sigma_{0,n+1}$ のとき special derivation Lie 代数 [12] [1] に自然に同型である。一般の場合の括弧積は [22] Theorem 7.4 に述べてある。

形式表示すなわち適切なθであって、それが誘導する同型$\theta : \widehat{\mathbf{k}\hat{\pi}} \xrightarrow{\cong} |A|$ がGoldman 括弧積と Turaev 余括弧積を保つものを見いだすことが本講演の最終目標である。そのためには、曲面 $\Sigma_{g,n+1}$ の位相に適合した group-like expansion すなわち、special/symplectic expansion を考える必要がある [2]。これを定義するために、曲面 $\Sigma = \Sigma_{g,n+1}$ を種数 0 の部分曲面 $S_0 \cong \Sigma_{0,n+2}$ と種数 g で連結な境界を持つ部分曲面 $S_1 \cong \Sigma_{g,1}$ に分割する [3]。つまり $S_0 \cong \Sigma_{0,n+2}$ において$\partial S_0 = \coprod_{j=1}^{n+1} \partial_j S_0$ と番号付けし、$\partial_1 S_0$ に $S_1 \cong \Sigma_{g,1}$ を貼り付けたものをΣ とみなす。$\partial_j \Sigma = \partial_{j+1} S_0$ とする。曲面の分解 $\Sigma = S_0 \cup S_1$ は、包含準同型 $H_1(S_1; \mathbf{k}) \to H = H^{(1)}$ が同型 $H_1(S_1; \mathbf{k}) \xrightarrow{\cong} H^{(1)}/H^{(2)}$ を誘導することから、homology 群の分解$H \cong (H^{(1)}/H^{(2)}) \oplus H^{(2)}$ を与え、完備 Hopf 代数 $\widehat{T}$ と A との同型を与える。基本群 $\pi = \pi_1(\Sigma, *)$, $* \in \partial_0 \Sigma$, の自由生成系 $\{\alpha_i, \beta_i\}_{i=1}^{g} \cup \{\gamma_j\}_{j=1}^{n}$ を以下のようにして定める。まず、基点 $*_j \in \partial_{j+1} S_0$, $0 \leq j \leq n$ をとる。$j \geq 1$ について $*_j \in \partial_j \Sigma$ である。基点 $\star \in \partial S_1$ を Σ において$\star = *_0$ となるようにとる。ℓ_j, $0 \leq j \leq n$, を$*_j$ か

---

[1] $\widehat{T} \hat{\otimes} \widehat{T}$ は完備 tensor 積を表す。また、記号 S は曲面に使いたいので antipode は記号 ι を使う。

[2] これから説明するように、Goldman 括弧積には special/symplectic expansion で充分だが、Turaev 余括弧積には柏原 Vergne 問題の解であることが対応する。

[3] 全ての境界成分に D^2 を貼り付けて得られる$\Sigma_{g,0}$ への包含準同型は同型 $H^{(1)}/H^{(2)} \cong H_1(\Sigma_{g,0}; \mathbf{k})$ を与えるが、ここでは、この同型写像の与える商写像 $H = H^{(1)} \to H_1(\Sigma_{g,0}; \mathbf{k})$ の切断を与えようとしている。

ら $*$ への単純 arc で $*$ を除いて互いに交わらないものとする。$\gamma_j \in \pi$, $1 \le j \le n$, を境界成分 $\partial_j\Sigma$ を $*_j$ を基点として正の向きに一周する loop を arc ${\ell_j}^{-1}$ で共役をとったものとする。また、$\pi_1(S_1, \star)$ の symplectic 生成系 $\{\alpha_i^0, \beta_i^0\}_{i=1}^g$ をとり、これらを arc ${\ell_0}^{-1}$ で共役をとったものを $\{\alpha_i, \beta_i\}_{i=1}^g \subset \pi$ とする。こうしてえられた $\{\alpha_i, \beta_i\}_{i=1}^g \cup \{\gamma_j\}_{j=1}^n$ は基本群 $\pi = \pi_1(\Sigma, *)$ の自由生成系である。以上の構成は、$\partial_0\Sigma$ を $*$ を基点として正の向きに一周する loop を γ_0 とすると ${\gamma_0}^{-1} = \prod_{i=1}^g(\alpha_i\beta_i{\alpha_i}^{-1}{\beta_i}^{-1})\prod_{j=1}^n \gamma_j \in \pi$ が成り立つように行う。また、$x_i := [\alpha_i] \bmod H^{(2)}$, $y_i := [\beta_i] \bmod H^{(2)} \in H^{(1)}/H^{(2)}$, $1 \le i \le g$, とし、$\omega := \sum_{i=1}^g(x_iy_i - y_ix_i) + \sum_{j=1}^n z_j \in F^2(A)$ とおく。ここで $[\gamma] \in H$ は $\gamma \in \pi$ の定める homology 類とする。

定義 1.1. group-like expansion $\theta : \pi \to \mathrm{Grp}(A)$ がspecial/symplectic expansion であるとは、任意の $1 \le j \le n$ についてある $c_j \in \mathrm{Grp}(A)$ が存在して $\theta(\gamma_j) = {c_j}^{-1}\exp(z_j)c_j$ がなりたち、$\theta({\gamma_0}^{-1}) = \exp(\omega)$ をみたすことをいう [4]。

種数 0 すなわち $\Sigma = \Sigma_{0,n+1}$ のときはspecial expansion とよばれ [1] など様々な文脈で現れている。$\Sigma = \Sigma_{g,1}$ のときは symplectic expansion とよばれるが、この概念は Massuyeau [26] によって導入された。Massuyeau による Kontsevich 積分または LMO 函手を用いる方法[26][27]、久野の組合せ的な方法 [24] 、河澄の複素解析的な方法 [15] など、special/symplectic expansion の構成の仕方はいろいろある。

定理 1.2. special/symplectic expansion $\theta : \pi \to \mathrm{Grp}(A)$ の誘導する写像 $\theta : \widehat{\mathbf{k}\hat{\pi}} \to |A|$ はLie 代数の同型である。とくに Goldman Lie 代数は形式表示をもつ。

この定理はまず、我々 [20] が $\Sigma_{g,1}$ の場合に群の homology を使って証明し、Massuyeau-Turaev [28] が $\Sigma_{g,1}$ の homotopy 交叉形式 [33] [39] に精密化して別証をあたえた。一般の Σ については、我々と Massuyeau-Turaev が独立に証明している。この定理の非可換 Poisson 幾何学からの解釈と別証が Naef [32] によって与えられている。

最後に、後述する柏原 Vergne 問題の定式化のために group-like expansion $\theta^{\exp} : \pi \to \mathrm{Grp}(A)$ を $\theta^{\exp}(\alpha_i) = \exp(x_i)$, $\theta^{\exp}(\beta_i) = \exp(y_i)$, $1 \le i \le g$, および $\theta^{\exp}(\gamma_j) := \exp(z_j)$, $1 \le j \le n$, によって定義する。これは γ_j, $j \ge 1$ についての条件はみたすが、${\gamma_0}^{-1}$ についての条件は充たさないのでspecial/symplectic expansion ではない。つまり、$\xi := \log(\theta^{\exp}({\gamma_0}^{-1})) \in L$ とおくと、$\xi \ne \omega$ である。

2. 写像類群と Johnson 準同型

前の節では、曲面 Σ の境界の各連結成分上に基点 $* \in \partial_0\Sigma$ および $*_j \in \partial_j\Sigma$, $1 \le j \le n$, をとった。 $E := \{*\} \cup \{*_j\}_{j=1}^n$ とし、曲面 Σ の基本亜群 $\Pi\Sigma$ の E への制限 $\Pi\Sigma|_E$ を考える。つまり、$\Pi\Sigma|_E$ は、 E を対象全体の集合とする小圏であり、$*', *'' \in E$ について射の集合 $\Pi\Sigma(*', *'') := [([0,1], 0, 1), (\Sigma, *', *'')]$ はpath の homotopy 集合である。$\ell \in \Pi\Sigma(*', *'')$ と $\alpha \in \hat{\pi}$ について、横断二重点しかもたない C^∞ はめ込みからなる代表元をとり $\sigma(\alpha)(\ell) := \sum_{p \in \alpha \cup \ell} \varepsilon_p(\alpha, \ell)\ell_{*'p}\alpha_p\ell_{p*''} \in \mathbf{Z}\Pi\Sigma(*', *'')$ と定める。ここで ε_p は局所交叉数であって、$\ell_{*'p}$ および $\ell_{p*''}$ はそれぞれ始点から p までおよび p から終点までの ℓ の segments である。$\sigma(\alpha)$ は $\mathbf{k}$-線型圏 $\mathbf{k}\Pi\Sigma|_E$ の導分である。 §1 で述べた $\mathbf{k}\pi$ の filtration を用いて完備化した$\mathbf{k}$-線型圏を $\widehat{\mathbf{k}\Pi\Sigma|_E}$ と表す。この完備化された $\mathbf{k}$-線型

[4] group-like element c_j のとり方は一つに固定した方がよい。さきに取った arc ℓ_j について $\theta(\ell_j) = c_j$ と見なすべきだからである。このことは後述する tangential automorphism の定義とも関わる。

圏の連続導分 D であって、任意の $0 \le j \le n$ について $D(\partial_j \Sigma) = 0$ をみたすもの全体のなす Lie 代数を $\mathrm{Der}_\partial(\widehat{\mathbf{k}\Pi\Sigma|_E})$ と表す。

定理 2.1 ([22]). σ の誘導する Lie 代数準同型 $\sigma : \widehat{\mathbf{k}\hat{\pi}}/\mathbf{k}|1| \to \mathrm{Der}_\partial(\widehat{\mathbf{k}\Pi\Sigma|_E})$ は位相もこめて同型である。

さて、写像類群 $\mathcal{M}(\Sigma) := \pi_0 \mathrm{Diff}(\Sigma, 1_{\partial\Sigma} \text{ on } \partial\Sigma)$ を考える。写像類群 $\mathcal{M}(\Sigma)$ は通常のやり方で$\mathbf{k}$-線型圏 $\widehat{\mathbf{k}\Pi\Sigma|_E}$ に作用している。とくに $\varphi \in \mathcal{M}(\Sigma)$ について、その対数 $\log\varphi = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}(\varphi - 1)^k$ は、もし収束するならば、Lie 代数 $\mathrm{Der}_\partial(\widehat{\mathbf{k}\Pi\Sigma|_E})$ の元となる。そこで、対数 $\log\varphi$ が収束する φ の全体のなす写像類群 $\mathcal{M}(\Sigma)$ の部分集合を $\mathcal{M}(\Sigma)^\circ$ と表す。任意の単純閉曲線 $C \subset \Sigma$ について C に沿う右手 Dehn twist t_C は $\mathcal{M}(\Sigma)^\circ$ に属する。また、$\Sigma = \Sigma_{g,1}$ のとき、Torelli 群$\mathcal{I}(\Sigma_{g,1})$ も $\mathcal{M}(\Sigma)^\circ$ に含まれている。対数 log と Lie 代数同型 σ の逆写像を合成してえられる写像

$$\tau := \sigma^{-1} \circ \log : \mathcal{M}(\Sigma)^\circ \xrightarrow{\log} \mathrm{Der}_\partial(\widehat{\mathbf{k}\Pi\Sigma|_E}) \xrightarrow{\sigma^{-1}} \widehat{\mathbf{k}\hat{\pi}}/\mathbf{k}|1|$$

を幾何的 Johnson 準同型とよぶ。τ は単射であって、完備 Goldman Lie 代数$\widehat{\mathbf{k}\hat{\pi}}/\mathbf{k}|1|$ の filtration から誘導される filtration は Johnson filtration に他ならず、その次数商 $\mathrm{gr}(\tau)$ はJohnson 準同型 [13] に一致する。Johnson 準同型 $\mathrm{gr}(\tau)$ の像を特徴付けることは、写像類群の基本的な問題の一つである。榎本佐藤 trace [8] は、森田 trace [30] を精密化したものであって、第一項を除き、Johnson 準同型像の上で 0 になっている。後述する系 4.4 により、Turaev 余括弧積の定める Johnson 準同型像の制約条件は榎本佐藤 trace による制約条件と等価である。ただし、榎本佐藤 trace の第一項 $: \mathcal{I}(\Sigma_{g,1}) \to H$ は 0 ではない。古田幹雄の観察 [31] によって、この第一項には曲面 Σ の framing すなわち接束 $T\Sigma$ の向きを保つ大域的自明化が関わっている。

さて、Dehn twist については次がなりたつ。

定理 2.2 ([20]). 任意の単純閉曲線 $C \subset \Sigma$ について $\tau(t_C) = \frac{1}{2}|(\log\gamma)^2| \in \widehat{\mathbf{k}\hat{\pi}}/\mathbf{k}|1|$ がなりたつ。ここで $\gamma \in \pi$ は free loop C を表す based loop とする。

辻俊輔によって、この公式は向きづけ不能曲面 [35], Kauffman bracket skein algebra [36] およびHOMFLY-PT skein algebra [38] に拡張されている。また、辻は、完備化されたKauffman および HOMFLY-PT bracket skein algebra それぞれへのTorelli 群 $\mathcal{I}(\Sigma_{g,1})$ の埋め込み [37][38] も構成しており、そこには通常の Johnson 準同型では捉えられないCasson 不変量が現れている。さらに応用として、辻は、これら 2 つのskein 代数それぞれを使った3 次元整 homology 球面の有限型不変量の新しい構成方法を得ている[37][38]。

3. Turaev 余括弧積

Turaev 余括弧積を定義する。先に述べた榎本佐藤 trace および後に述べる柏原 Vergne 問題との関係から、オリジナルの定義 [40] ではなく、曲面 Σ の framing にともなって定義されるもの [16] [2] を述べる。

準備として framing について復習しておく。曲面 Σ は空でない境界をもつから接束 $T\Sigma$ は自明である。向きを保つ自明化 $T\Sigma \xrightarrow{\cong} \Sigma \times \mathbf{R}^2$ の homotopy 類を Σ の framing とよび、framing 全体の集合を$\mathcal{F}(\Sigma)$ と表す。$f \in \mathcal{F}(\Sigma)$ の代表元に第二成分の射影を合成したもの$T\Sigma \xrightarrow{\cong} \Sigma \times \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ をも f と書くことにする。C^∞ はめ込み $\ell : S^1 \to \Sigma$ につ

いて写像 $f\circ\dot{\ell}: S^1\to\mathbf{R}^2\setminus\{0\}, t\mapsto f(\dot{\ell}(t))$, の写像度を ℓ の回転数と呼び、$\mathrm{rot}_f(\ell)\in\mathbf{Z}$ と表す。ここで $\dot{\ell}(t)\in T_{\ell(t)}\Sigma$ ははめこみ ℓ の $t\in S^1$ における速度 vector である。集合 $\mathcal{F}(\Sigma)$ には写像類群 $\mathcal{M}(\Sigma)$ が右から作用している。$\varphi\in\mathcal{M}(\Sigma)$ および $f\in\mathcal{F}(\Sigma)$ について $\mathrm{rot}_{f\varphi}(\ell)=\mathrm{rot}_f(\varphi\circ\ell)$ がなりたつ。framing $f\in\mathcal{F}(\Sigma)$ が、§1.3 でとった自由生成系 $\{\alpha_i,\beta_i\}_{i=1}^g\cup\{\gamma_j\}_{j=1}^n$ に関して adapted であるとは、各 $1\le i\le g$ について α_i および β_i に自由 homotopic な単純閉曲線の rot_f が 0 であって、各 $1\le j\le n$ について $\mathrm{rot}_f(\partial_j\Sigma)=-1$ であることをいう。このような f はただ一つ存在するから、本講演では f^{adp} と書くことにする。Poincaré-Hopf の定理により $\mathrm{rot}_{f^{\mathrm{adp}}}(\partial_0\Sigma)=1-2g$ である。$\mathcal{F}(\Sigma)$ は Abel 群 $H^1(\Sigma;\mathbf{Z})$ を model とする affine 集合であり、とくに adapted framing f^{adp} の $H^1(\Sigma;\mathbf{Z})$ の作用による軌道は $\mathcal{F}(\Sigma)$ の全体に一致する。また、$\chi\in H^1(\Sigma;\mathbf{Z})$ の $f\in\mathcal{F}(\Sigma)$ への作用 $f+\chi\in\mathcal{F}(\Sigma)$ について $\mathrm{rot}_{f+\chi}(\ell)=\mathrm{rot}_f(\ell)+\chi([\ell])$ がなりたつ。

それでは framing $f\in\mathcal{F}(\Sigma)$ を一つ固定する。free loop $\alpha\in\hat{\pi}=\hat{\pi}(\Sigma)$ について、その代表元を高々横断的二重点をもつ C^∞-はめ込み α であって $\mathrm{rot}_f(\alpha)=0$ であるものにとる。必要なら monogon を幾つか挿入することにより、回転数についての条件をみたすようにできる。この代表元 α について $D_\alpha:=\{(t_1,t_2)\in S^1\times S^1;\ t_1\neq t_2,\ \alpha(t_1)=\alpha(t_2)\}$ と定める。このとき、α の Turaev 余括弧積 $\delta^f(\alpha)$ を

$$\delta^f(\alpha):=\sum_{(t_1,t_2)\in D_\alpha}\varepsilon(\dot{\alpha}(t_1),\dot{\alpha}(t_2))|\alpha_{[t_1,t_2]}|\otimes|\alpha_{[t_2,t_1]}|\in\mathbf{Z}\hat{\pi}\otimes\mathbf{Z}\hat{\pi}$$

により定める。$\varepsilon(\dot{\alpha}(t_1),\dot{\alpha}(t_2))\in\{\pm1\}$ は局所交叉数であり、$\alpha_{[t_1,t_2]}$ および $\alpha_{[t_2,t_1]}$ は、それぞれ S^1 の segments $[t_1,t_2]$ および $[t_2,t_1]$ への α の制限である。三つ組 $(\mathbf{Z}\hat{\pi},[-,-],\delta^f)$ は Lie 双代数であり [40], 対合的である [7]。framed 曲面 (Σ,f) の Goldman-Turaev Lie 双代数とよぶ[5]。任意の $\chi\in H^1(\Sigma;\mathbf{Z})$ について $\delta^{f+\chi}(\alpha)=\delta^f(\alpha)+\chi(\alpha)|1|\wedge|\alpha|$ がなりたつ。ここで $u\wedge v=u\otimes v-v\otimes u$ とした。

いま、$\delta^f(|F^p(\mathbf{k}\pi)|)\subset|F^{p-2}(\mathbf{k}\pi)|$ であるから、完備 Goldman Lie 代数 $\widehat{\mathbf{k}\hat{\pi}}$ に Turaev 余括弧積 δ^f が連続に拡張する。そこで $\widehat{\mathbf{k}\hat{\pi}}=\widehat{\mathbf{k}\hat{\pi}}(\Sigma,f)$ を framed 曲面 (Σ,f) の完備 Goldman-Turaev Lie 双代数とよぶことにする。いま framing f を考えているから、写像類群も f を動かさないものを考える必要がある。$\mathcal{M}(\Sigma,f):=\{\varphi\in\mathcal{M}(\Sigma);\ f\varphi=f\}$ と定める。よく知られているように $\mathcal{M}(\Sigma,f)$ は Torelli 群を含まないが Johnson 核を含んでいる。向きを保つ微分同相は曲線の自己交叉の状況を保つという基本的な事実から次が得られる。

定理 3.1 ([21]). $(\delta^f\circ\tau)(\mathcal{M}(\Sigma,f)\cap\mathcal{M}(\Sigma)^\circ)=0.$

ここで [28] の結果を使うと δ^f の次数商 $\mathrm{gr}(\delta^f)$ が計算できる。次数商 $\mathrm{gr}(\delta^{f^{\mathrm{adp}}})$ は、Σ に対応するある quiver に伴う necklace Lie 代数上の Schedler 余括弧積 [34] に一致する。とくに $\mathrm{gr}(\delta^f)$ には、$\Sigma=\Sigma_{g,1}$ の場合、榎本佐藤 trace [8] が現れ、$\Sigma=\Sigma_{0,n+1}$ の場合、Alekseev-Torossian 発散 cocycle [6] が現れるのである [20][16][6]。それでは Turaev

[5] オリジナルの定義 [40] では、自明 loop $|1|$ による商 $\mathbf{Z}\hat{\pi}/\mathbf{Z}|1|$ に Lie 双代数の構造を入れる。これが本来の曲面 Σ の Goldman-Turaev Lie 双代数である。区別する場合には δ^f を framed Turaev 余括弧積と呼ぶことにする。

[6] オリジナルの [20] では $\Sigma=\Sigma_{g,1}$ かつ framing を使わない場合を考えた。そこでは榎本佐藤 trace より弱い情報しか得られない（榎本）。ただし、森田 trace [30] は（Johnson 準同型像の制約条件とはならない第一項をのぞき）すべて既にここに現れる。

余括弧積 δ^f から得られる Johnson 準同型像の制約条件は榎本佐藤 trace に限られるのであろうか？　かくして、Turaev 余括弧積 δ^f の形式表示の問題を解く必要が出来する。つまり、次に定義する homomorphic expansion が存在することが望ましい。

定義 3.2 ([2]). special/symplectic expansion θ がframing f についてhomomorphic であるとは、θ の誘導する Lie 代数の同型 $\widehat{\mathbf{k}\hat{\pi}} \to |A|$ が、framed Turaev 余括弧積 δ^f とその次数商が定める $|A|$ 上の余括弧積に関して Lie 双代数の同型になることをいう。

その答えを与えるのが次節で述べる柏原 Vergne 問題の解ということになる。

なお、定理 3.1 の方法を用いると、久野 [25] による「自己交叉をもつ loop に沿う Dehn twist 」の多くが微分同相としては実現できないことも分かる [21]。また、Turaev 余括弧積は Bernoulli 数と密接に関係しているが、この関係を通して Bernoulli 数についての知見を得ることもできる [10]。

4. 柏原 Vergne 問題

本講演で述べる柏原 Vergne 問題（KV 問題）は、Alekseev-Torossian [6] の定式化による自由 Lie 代数に関するものを指す。オリジナルの KV 問題 [14] との同値性は [6] Theorem 5.8 に示されている。

$H = H_1(\Sigma; \mathbf{k})$ の完備 tensor 代数 $A = A^{(g,n+1)}$ について、A の位相的自己同型 U であって、 任意の $p \geq 1$ について$U(F^p(A)) = F^p(A)$ および $U = 1$ on $F^p(A)/F^{p+1}(A)$ をみたすものの全体を $\mathrm{IAut}(A)$ と表す。 $\mathrm{IAut}(A)$ の Lie 代数を$\mathrm{der}^+(A)$ と表す。 A の連続導分 u であって、任意の $p \geq 1$ について $u(F^p(A)) \subset F^{p+1}(A)$ を充たすもの全体のなす Lie 代数である。A のLie-like element 全体の集合 $L = L^{(g,n+1)}$ は、homology 類x_i, y_i, z_j, $1 \leq i \leq g$, $1 \leq j \leq n$, の生成する完備自由 Lie 代数に他ならない。L の位相的自己同型群 $\mathrm{Aut}(L)$ の元は、自動的に、余積 Δ を保つ A の位相的自己同型とみなすことができる。$\mathrm{IAut}(L) := \mathrm{Aut}(L) \cap \mathrm{IAut}(A)$ と表す。$\mathrm{IAut}(L)$ の Lie 代数を $\mathrm{der}^+(L)$ と表すと、$\mathrm{der}^+(L) = \mathrm{der}(L) \cap \mathrm{der}^+(A)$ である。

本講演の目的は homomorphic expansion の存在を示すことである。group-like expansion 全体の集合には、群 $\mathrm{IAut}(L)$ が自由かつ推移的に作用している。§1.3 の最後に導入した group-like expansion $\theta^{\exp}$ を用いると、任意の group-like expansion は、ある $F \in \mathrm{IAut}(L)$ によって $F^{-1} \circ \theta^{\exp}$ と表される。我々の homomorphic expansion を求める問題を、このような自己同型 F を求める問題に書き直すとKV 問題が現れる。$\theta^{\exp}$ は γ_j, $j \geq 1$, についての条件をみたすから、自己同型 F も対応する条件をみたす。このような F をtangential automorphism と呼ぶ。A の tangential automorphism 群 $\mathrm{TAut}(A)$ を $\mathrm{TAut}(A) := \{U \in \mathrm{IAut}(A);\ 1 \leq \forall j \leq n, \exists f_j \in 1 + F^1(A), \mathrm{s.t.}\, U(z_j) = {f_j}^{-1} z_j f_j\}$ によって定義する [7]。また、$\mathrm{TAut}(L) := \{U \in \mathrm{IAut}(L);\ 1 \leq \forall j \leq n, \exists f_j \in \mathrm{Grp}(A), \mathrm{s.t.}\, U(z_j) = {f_j}^{-1} z_j f_j\}$ と定義する。これらに対応する Lie 代数をそれぞれ $\mathrm{tder}(A)$ および $\mathrm{tder}(L)$ と表す。たとえば $\mathrm{tder}(A) = \{u \in \mathrm{der}^+(A);\ 1 \leq \forall j \leq n, \exists u_j \in F^1(A), \mathrm{s.t.}\, u(z_j) = [z_j, u_j]\}$ である。以上の記号の下で、問題は $F^{-1} \circ \theta^{\exp}$ が homomorphic expansion であるような$F \in \mathrm{TAut}(L)$ を求める問題に帰着する。§1.3 の最後にのべた ω と ξ を思い出すと、$F^{-1} \circ \theta^{\exp}$ が special/symplectic であるための必要充分条件は$F(\omega) = \xi$ である。

[7] 発散 cocycle を well-defined にするためには、ここで述べた $\mathrm{TAut}(A)$ と $(1 + F^1(A))^{\times n}$ の半直積の部分群を考えるべきである。$\mathrm{TAut}(L)$, $\mathrm{tder}(A)$ および $\mathrm{tder}(L)$ についても同様に半直積を考える。

本講演の３つの主題、すなわち、写像類群（榎本佐藤 trace）と Goldman-Turaev Lie 双代数（Turaev 余括弧積）そして柏原-Vergne 問題（Alekseev-Torossian 発散 cocycle）の３つをつなぐのが発散 cocycle $\mathrm{div} : \mathrm{tder}(A) \to |A|$,

$$u \mapsto \mathrm{div}(u) := \sum_{i=1}^{g} \Big| \partial_{x_i}(u(x_i)) + \partial_{y_i}(u(x_i)) \Big| + \sum_{j=1}^{n} \Big| z_j \partial_{z_j}(u_j) \Big|,$$

である。ここで $\partial_{x_i} : A \to A$ 等は、任意の $a \in A$ について $a = a_0 + \sum_{i=1}^{g}((\partial_{x_i}a)x_i + (\partial_{y_i}a)y_i) + \sum_{j=1}^{n}(\partial_{z_j}a)z_j$, $a_0 \in \mathbf{k}$, をみたす写像である。$\mathrm{div}([u,v]) = u\cdot\mathrm{div}(v) - v\cdot\mathrm{div}(u)$ が成り立つことから div は Lie 代数 $\mathrm{tder}(A)$ の $\mathrm{tder}(A)$-加群 $|A|$ に値をもつ 1-cocycle である。$n = 0$ のとき榎本佐藤 trace [8] に一致し、$g = 0$ のとき Alekseev-Torossian 発散 cocycle [6] に一致する。発散 cocycle は Jacobian cocycle と呼ばれる群 $\mathrm{TAut}(A)$ の $\mathrm{TAut}(A)$-加群 $|A|$ に値をもつ 1-cocycle $j : \mathrm{TAut}(A) \to |A|$ に積分される。任意の $u \in \mathrm{tder}(A)$ について $j(\exp(u)) = \dfrac{e^u - 1}{u} \cdot \mathrm{div}(u) \in |A|$ がなりたつ[8]。

曲面 $\Sigma = \Sigma_{g,n+1}$ の framing $f \in \mathcal{F}(\Sigma)$ に随伴する KV 問題 $\mathrm{KV}_f^{(g,n+1)}$ を定式化する。さらに幾つか記号が必要である。$r(s) := -\log((e^s - 1)/s) \in \mathbf{Q}[[s]]$ とし、$\mathbf{r} := \sum_{i=1}^{g} |r(x_i) + r(y_i)|$ とおく[9]。$F \in \mathrm{TAut}(L)$ について $\lambda_{ji}(F)$ および $\mu_{ji}(F) \in \mathbf{k}$ を、$F = \exp(v)$, $v(z_j) = [z_j, v_j]$ および $v_j \equiv \sum_{i=1}^{g} \lambda_{ji}(F)x_i + \mu_{ji}(F)y_i \pmod{F^2(A)}$ によって定義する。framing f と adapted framing f^{adp} との差を $\chi \in H^1(\Sigma; \mathbf{Z})$ とする: $f = f^{\mathrm{adp}} + \chi$.

定義 4.1 ($\mathrm{KV}_f^{(g,n+1)}$ 問題)**.** 次の条件をみたす $F \in \mathrm{TAut}(L)$ を見出せ:

(KVI) $F(\omega) = \xi$.

(KVII) ある $h(s), h_1(s), \ldots, h_n(s) \in \mathbf{k}[[s]]$ が存在して次をみたす

$$\begin{aligned} j(F) = -\mathbf{r} - |h(\xi)| + \sum_{j=1}^{n} |h_j(z_j)| \\ + \sum_{i=1}^{g} (\chi(y_i) + \textstyle\sum_j \chi(z_j)\lambda_{ji}(F))|x_i| + (-\chi(x_i) + \textstyle\sum_j \chi(z_j)\mu_{ji}(F))|y_i|. \end{aligned}$$

条件 (KVI) は、$F^{-1} \circ \theta^{\exp}$ が special/symplectic であることと同値である。条件 (KVII) の式の２行目は種数 0 すなわち $g = 0$ の場合と f が adapted framing f^{adp} すなわち $\chi = 0$ の場合には 0 となる。函数 $h(s)$, $h_j(s)$ は Duflo 函数と呼ばれる。種数 0 のときは自動的に $h(s) = h_j(s)$ となり、δ^f の対合性により線型項を modulo として $\dot{h}_{\mathrm{even}}(s)$ は $(\frac{1}{2} + \frac{1}{s} - (1 - e^{-s})^{-1})/2$ に一致する。

定理 4.2 ([2][3][4])**.** 条件 (KVI) をみたす $F \in \mathrm{TAut}(L)$ について、条件 (KVII) をみたすことと、$F^{-1} \circ \theta^{\exp}$ が homomorphic であることとは、同値である。

---

[8] 1-cocycle div の定める $\mathbf{k} \oplus |A|$ への $\mathrm{tder}(A)$ の作用は、$\mathrm{TAut}(A)$ の作用に積分される。この積分された作用の定める 1-cocycle が j である。

[9] γ_j はともかくとして、α_i および β_i を固定されてしまうのは曲面 Σ にとっては苦痛だろう。その痛みが $\mathbf{r}$ だと思うのだが、そのことの数学的な説明はまだである。

研究の順序を述べると、まず、種数 0 の場合の special expansion について条件 (KVII) と homomorphic であることの同値性が分かり [3]、これをもとにして $\mathrm{KV}_f^{(g,n+1)}$ 問題の定式化 [2][4] に到ったのである。証明は、van den Bergh [41] のやり方での完備 tensor 代数 $A = A^{(g,n+1)}$ の非可換 Poisson 幾何学を用いて行われる [10]。Turaev 余括弧積ないし Schedler 余括弧積は $|A|^{\otimes 2}$ に値をとるが、発散 cocyle は $|A|$ に値をとる。前者に対応するのが double divergence $\mathrm{tDiv} : \mathrm{tder}(A) \to |A|^{\otimes 2}$ である。$u \in \mathrm{tder}(A)$ について

$$\mathrm{tDiv}(u) := (|\cdot|^{\otimes 2}) \left(\sum_{i=1}^{g} (D_{x_i}(u(x_i)) + D_{y_i}(u(y_i))) + \sum_{j=1}^{n} (x_i \otimes 1 - 1 \otimes x_i) D_{z_j}(u_j) \right)$$

と定義する。ここで $D_{x_i} : A \to A \otimes A$ 等は $w_k \in \{x_i, y_i, z_j\}$ について $D_{x_i}(w_1 w_2 \dots w_m) := \sum_{w_k = x_i} w_1 \dots w_{k-1} \otimes w_{k+1} \dots w_m$ 等と定義される。 Schedler 余括弧積と本質的に等価なものである。このとき、定理 4.2 の証明の鍵の一つである可換図式

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{tder}(L) & \xrightarrow{\mathrm{div}} & |A| \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (1\otimes\iota)\circ\Delta} \\ \mathrm{tder}(A) & \xrightarrow{\mathrm{tDiv}} & |A|^{\otimes 2} \end{array} \tag{4.1}$$

がなりたつ。左側の縦の矢印は包含写像である。左上を $\mathrm{tder}(A)$ にすると可換ではない。もう一つの鍵は tDiv と作用 σ によって Turaev 余括弧積と Schedler 余括弧積が表示できるという観察である。

かくして Turaev 余括弧積の形式表示は $\mathrm{KV}_f^{(g,n+1)}$ 問題の解の存在に帰着する。

定理 4.3 ([2][3][4]). $\mathrm{KV}_f^{(g,n+1)}$ 問題は、$g \neq 1$ または $g = 1$ かつ $\mathrm{rot}_f(\alpha_1) = \mathrm{rot}_f(\beta_1) = 0$ のとき解をもつ。

証明は $\Sigma_{0,3}$ についての解と $\Sigma_{1,1}$ についての解を貼り合せることによる。つまり $\Sigma_{g,n+1}$ を $\Sigma_{0,g+n+1}$ に g 個の $\Sigma_{1,1}$ たちを貼り合わせたものと理解し、$\Sigma_{0,g+n+1}$ をパンツ分解する。$\mathrm{KV}_f^{(0,3)}$ 問題とは [6] の定式化での KV 問題に他ならず解の存在は [5] [6] で分かっている。$\Sigma_{1,1}$ についての KV 問題の解の構成は Enriquez [9] の方法を用いて $\Sigma_{0,3}$ についての解から構成する。この方法では $\Sigma_{1,1}$ を $\Sigma_{0,3}$ の 2 つの境界成分を貼り合せたものと考えている。$g = 1$ が例外的になる理由は、交叉形式による縮約写像 $\bigwedge^3 H \to H$ が $g \leq 1$ のとき全射でないことに由来する。

以上で、種数 g が 1 でないとき、および種数 1 であっても adapted framing f^{adp} に限れば、Turaev 余括弧積は形式表示をもつことが分かった。なお、種数 0 の場合の Turaev 余括弧積の形式表示は Massuyeau [27] によって Kontsevich 積分を使って与えられている。この結果と我々の結果は独立であるが、Kontsevich 積分の構成と [6] での KV 問題の解の構成はいずれも Drinfel'd associator を用いている。ともあれ (4.1) 式に注意すると、ここから写像類群の Johnson 準同型像について次の結果が得られる。

系 4.4 ([2][3][4]). 定理 3.1 によって Turaev 余括弧積が与える Johnson 準同型像への制約条件は榎本佐藤 trace に同値である。

Turaev 余括弧積の形式表示の問題で最後に残るのは種数 1 の場合である。framing $f \in \mathcal{F}(\Sigma)$ について、写像類群の作用に関する不変量 $\tilde{A}(f) \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$ を集合 $\{\mathrm{rot}_f(\ell);$

[10] 哲学なしに計算しても展望が開けないのは [17] で思い知った。

ℓ は Σ の非分離的単純閉曲線である。$\}$ の最大公約数として定義する [19]。種数 g が 2 以上の場合、つねに $\tilde{A}(f)=1$ である。しかし、種数 1 の場合は非自明である。不変量 $\tilde{A}$ によって種数 1 の場合の Turaev 余括弧積の形式表示の問題が完全に記述できる。

定理 4.5 ([4]). $g=1$ とする。framing $f \in \mathcal{F}(\Sigma)$ について Turaev 余括弧積 δ^f が形式表示をもつための必要充分条件は次式が成り立つことである

$$\tilde{A}(f) = \gcd\{\mathrm{rot}_f(\partial_j\Sigma)+1;\ 0 \le j \le n\}.$$

謝辞　久野雄介氏には、本稿第一稿をお目通し下さり、幾つかの重要な点をご指摘いただきました。心から感謝いたします。

参考文献

[1] A. Alekseev, B. Enriquez, and C. Torossian, Drinfeld associators, braid groups and explicit solutions of the Kashiwara-Vergne equations, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. **112**, 143–189 (2010)

[2] A. Alekseev, N. Kawazumi, Y. Kuno and F. Naef, Higher genus Kashiwara-Vergne problems and the Goldman-Turaev Lie bialgebra, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I. **355**, 123–127 (2017)

[3] A. Alekseev, N. Kawazumi, Y. Kuno and F. Naef, The Goldman-Turaev Lie bialgebra in genus zero and the Kashiwara-Vergne problem, preprint: arXiv:1703.05813 (2017)

[4] A. Alekseev, N. Kawazumi, Y. Kuno and F. Naef, The Goldman-Turaev Lie bialgebra and the Kashiwara-Vergne problem in higher genera, in prepartation

[5] A. Alekseev and E. Meinrenken, On the Kashiwara-Vergne conjecture, Invent. math. **164**, 615–634 (2006)

[6] A. Alekseev and C. Torossian, The Kashiwara-Vergne conjecture and Drinfeld's associators, Ann. of Math. **175**, 415–463 (2012)

[7] M. Chas, Combinatorial Lie bialgebras of curves on surfaces, Topology **43**, 543–568 (2004)

[8] N. Enomoto and T. Satoh, New series in the Johnson cokernels of the mapping class groups of surfaces, Algebr. Geom. Topol. **14**, 627–669 (2014)

[9] B. Enriquez, Elliptic associators, Selecta Math. **20**, 491–584 (2014)

[10] S. Fukuhara, N. Kawazumi and Y. Kuno, Self-intersections of curves on a surface and Bernoulli numbers, to appear in: Osaka J. Math. (also available at arXiv:1505.04840)

[11] W. Goldman, Invariant functions on Lie groups and Hamiltonian flows of surface group representations, Invent. math. **85**, 263–302 (1986)

[12] Y. Ihara, The Galois representation arising from $\mathbf{P}^1 \setminus \{0,1,\infty\}$ and Tate twists of even degree, Math. Sci. Res. Inst. Publ. **16**, Springer-Verlag, New York, pp. 299–313 (1989)

[13] D. Johnson, A survey of the Torelli group, Contemporary Math. **20**, 165-179 (1983)

[14] M. Kashiwara, M. Vergne, The Campbell-Hausdorff formula and invariant hyperfunctions, Invent. Math. **47**, 249–271 (1978)

[15] N. Kawazumi, Harmonic Magnus Expansion on the Universal Family of Riemann Surfaces, preprint, arXiv: math.GT/0603158(2006)

[16] N. Kawazumi, A regular homotopy version of the Goldman-Turaev Lie bialgebra, the Enomoto-Satoh traces and the divergence cocycle in the Kashiwara-Vergne problem, RIMS Kokyuroku **1936**, 137–141 (2015)

[17] N. Kawazumi, A tensorial description of the Turaev cobracket on genus 0 compact surfaces, to appear in: RIMS Kokyuroku Bessatsu, also available at arXiv:1506.03174

[18] 河澄響矢, トポロジーとリー代数 — 曲線を曲線で微分する, 「数学の現在 π」（斎藤毅ほか編）, 東京大学出版会, 東京, 86–106 (2016)

[19] N. Kawazumi, The mapping class group orbits in the framings of compact surfaces, preprint, arXiv:1703.02258

[20] N. Kawazumi and Y. Kuno, The logarithms of Dehn twists, Quantum Topology, **5**, 347–423 (2014)

[21] N. Kawazumi and Y. Kuno, Intersections of curves on surfaces and their applications to mapping class groups, Annales de l'institut Fourier **65**, 2711–2762 (2015)

[22] N. Kawazumi and Y. Kuno, The Goldman-Turaev Lie bialgebra and the Johnson homomorphisms, Handbook of Teichmuller theory, ed. A. Papadopoulos, Volume V, EMS Publishing House, Zurich, 97–165 (2016)

[23] M. Kontsevich, Formal (non)-commutative symplectic geometry, in: "The Gel'fand Mathematical Seminars, 1990-1992", Birkhäuser, Boston, 173-187 (1993)

[24] Y. Kuno, A combinatorial construction of symplectic expansions, Proc. Amer. Math. Soc. **140**, 1075–1083 (2012)

[25] Y. Kuno, The generalized Dehn twist along a figure eight, Journal of Topology and Analysis **5**, 271–295 (2013)

[26] G. Massuyeau, Infinitesimal Morita homomorphisms and the tree-level of the LMO invariant, Bull. Soc. Math. France **140**, 101–161 (2012)

[27] G. Massuyeau, Formal descriptions of Turaev's loop operations, to appear in: Quantum Topology, (arXiv:1511.03974)

[28] G. Massuyeau and V. G. Turaev, Fox pairings and generalized Dehn twists, Annales de l'institut Fourier **63**, 2403–2456 (2013)

[29] S. Morita, The extension of Johnson's homomorphism from the Torelli group to the mapping class group, Invent. Math. **111**, 197-224 (1993)

[30] S. Morita, Abelian quotients of subgroups of the mapping class group of surfaces, Duke Math. J. **70**, 699-726 (1993)

[31] S. Morita, Casson invariant, signature defect of framed manifolds and the secondary characteristic classes of surface bundles, J. Diff. Geom. **47** 560–599 (1997)

[32] F. Naef, Poisson brackets in Kontsevich's "Lie world", preprint, arXiv:1608.08886

[33] C. D. Papakyriakopoulos, Planar regular coverings of orientable closed surfaces, in: 'Knots, groups, and 3-manifolds', 261–292. Ann. of Math. Studies, No. 84, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., (1975)

[34] T. Schedler, A Hopf algebra quantizing a necklace Lie algebra canonically associated to a quiver, Int. Math. Res. Not. **12**, 725-760 (2005)

[35] S. Tsuji, The logarithms of Dehn twists on non-orientable surfaces, Osaka J. Math. **53**, 1125–1132 (2016)

[36] S. Tsuji, Dehn twists on Kauffman bracket skein algebras, to appear in: Kodai Math. J.

[37] S. Tsuji, The Torelli group and the Kauffman bracket skein module, to appear in: Proc. Camb. Phil. Soc.

[38] S. Tsuji, in preparation

[39] V. G. Turaev, Intersections of loops in two-dimensional manifolds, Math. USSR Sbornik **35**, 229–250 (1979)

[40] V. G. Turaev, Skein quantization of Poisson algebras of loops on surfaces, Ann. Sci. École Norm. Sup. **24**, 635–704 (1991)

[41] M. van den Bergh, Double Poisson Algebras, Trans. Amer. Math. Soc. **360**, 5711–5799 (2008)