

## 3次元多様体のファイバー曲面とヘガード曲面

作間 誠 (広島大学)\*

### 1. はじめに

曲面  $\Sigma$  上の自己同相写像  $\varphi$  が与えられると,  $\varphi$  をモノドロミーとする円周上の曲面束  $M_\varphi := \Sigma \times \mathbb{R} / (x, t) \sim (\varphi(x), t + 1)$  を構成できる。このとき, 曲面  $\Sigma$  を  $M_\varphi$  のファイバー曲面と呼ぶ。一方,  $\Sigma$  が有向閉曲面で, ハンドル体  $V$  の境界と同一視されているときは,  $V$  の2つのコピー  $V_1, V_2$  をその境界上の同相写像  $\varphi: \partial V_1 \rightarrow \partial V_2$  で貼り合わせることににより, 有向閉3次元多様体  $M = V_1 \cup_\Sigma V_2$  が構成できる。このとき, 曲面  $\Sigma$  を  $M$  のヘガード曲面と呼ぶ。

ファイバー曲面は, 特殊な多様体の中の「圧縮不可能曲面」であるのに対して, ヘガード曲面は任意の有向閉3次元多様体を持つ「圧縮可能曲面」であり, この意味で両者は全く異なるものである。しかしながら, 講演者はこの両者には相通ずるものがあると考えており, その類似の追求が, 研究の内的動機の一つになっている。本講演では, その事情を, 分岐バーチャル・ファイブレーション定理, モノドロミー群, McShane の等式, 幾何構造の観点から説明し, 今後の課題について述べる。

### 2. 基本的な用語と事実

種数  $g$  の有向閉曲面  $\Sigma_g$  から  $n$  個の点を除いて得られる曲面を  $\Sigma = \Sigma_{g,n}$  とする。 $\Sigma$  上の自己同相写像のイソトピー類全体が作る群を  $\text{MCG}^\pm(\Sigma)$ , 向き保存自己同相写像のイソトピー類全体からなる部分群を  $\text{MCG}(\Sigma)$  で表し, それぞれ拡張写像類群, 写像類群と呼ぶ。以下, 誤解の恐れがない場合は, 自己同相写像とそれが代表する写像類を区別しない。

写像類  $\varphi \in \text{MCG}(\Sigma)$  をモノドロミーとする曲面束  $M_\varphi$  の基本群は, 次の群表示を持ち, 特に  $\pi_1(\Sigma)$  は  $\pi_1(M_\varphi)$  の正規部分群と同一視される。

$$\pi_1(M_\varphi) = \langle \pi_1(\Sigma), t \mid tat^{-1} = \varphi_*(\alpha) \quad (\alpha \in \pi_1(\Sigma)) \rangle$$

ここで,  $\varphi_* \in \text{Aut}(\pi_1(\Sigma))$  は  $\varphi$  の誘導準同型を表す。このとき, 包含写像  $\Sigma \rightarrow M_\varphi$  が誘導する基本群の間の誘導準同型は単射であり, この意味で,  $\Sigma$  は  $M_\varphi$  内で圧縮不可能である。

一方,  $\Sigma = \Sigma_g$  をヘガード曲面にもつ有向閉3次元多様体  $M = V_1 \cup_\Sigma V_2$  の基本群は, 次の群表示を持ち, 特に  $\pi_1(\Sigma)$  の商群と理解できる。

$$\pi_1(M) = \pi_1(\Sigma) / \langle\langle Z_1, Z_2 \rangle\rangle$$

ここで,  $Z_i$  は  $V_i$  のメリディアン ( $V_i$  内の円板を張る  $\Sigma$  上の本質的単純閉曲線) が表す元を全て含む  $\pi_1(\Sigma)$  の最小の正規部分群を表し,  $\langle\langle Z_1, Z_2 \rangle\rangle$  は  $Z_1, Z_2$  を含む  $\pi_1(\Sigma)$  の最小の正規部分群を表す。このとき, 包含写像  $\Sigma \rightarrow M$  が誘導する基本群の間の誘導準同型は非自明な核をもち, この意味で,  $\Sigma$  は  $M$  内で圧縮可能である。

本研究は科研費(課題番号:15H03620)の助成を受けたものである。

2010 Mathematics Subject Classification: 57M25, 57M50

\* 〒739-8526 東広島市鏡山 1-3-1 広島大学 大学院理学研究科  
e-mail: sakuma@hiroshima-u.ac.jp

### 3. 分岐バーチャル・ファイブレーション定理

前節で見たように、ファイバー曲面とヘガード曲面は全く異なる性質を持つが、少し観点を変えると、両者の間に直接的な関係が見て取れることを、本節で紹介する。そのために、複素共役  $z \mapsto \bar{z}$  が定める単位円周  $S^1$  上の  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  作用の商空間として得られる 1 次元軌道体  $\mathcal{I} := S^1/z \sim \bar{z}$  を考える。 $\mathcal{I}$  の底空間  $|\mathcal{I}|$  は閉区間  $[-1, 1]$  と同一視でき、その 2 つの境界点  $\pm 1$  は  $\mathcal{I}$  の鏡映特異点であることに注意する。すると、3 次元多様体  $M$  のヘガード分解  $V_1 \cup_{\Sigma} V_2$  に対して、 $M$  を底空間とする 3 次元軌道体  $\mathcal{O}$  で、 $\mathcal{I}$  上の  $\Sigma$  束の構造を持ち、その正則ファイバーはヘガード曲面とイソトピックであるものが存在する。実際、この事実は、 $\Sigma$  を境界にもつ 2 つのハンドル体  $V_i$  に対して、 $\Sigma$  上の向き逆転対合  $h_i$  で次の条件を満たすものが存在することからわかる。

$$V_i \cong \Sigma \times [-1, 1]/(x, t) \sim (h_i(x), -t)$$

1 次元軌道体の間の二重被覆  $S^1 \rightarrow \mathcal{I}$  による  $\Sigma$  束  $\mathcal{O} \rightarrow \mathcal{I}$  の引き戻し  $\tilde{\mathcal{O}} \rightarrow S^1$  は  $\Sigma$  をファイバーとするファイバー束である。これより、次の分岐バーチャル・ファイブレーション定理を得る [39]。

**定理 3.1** 任意の有向閉 3 次元多様体  $M$  は  $S^1$  上のファイバー束を二重分岐被覆空間に持つ。更にファイバー曲面の  $M$  における像として  $M$  のヘガード曲面が得られる。

この定理において、曲面束のモノドロミーは、2 つの対合の合成  $h_2 h_1$  により与えられるが、これが擬アノソフ写像になるように  $h_1, h_2$  を選べ、従って二重分岐被覆空間は双曲多様体にできることが Brooks [14] により証明されている。

尚、Thurston [44] が提唱し、Agol [1] により最終解決を得たバーチャル・ファイバー予想「任意の有限体積完備双曲多様体は、円周上の曲面束を有限被覆に持つ」は、予想が提案された当時は非自明な例を構成することすら簡単ではなかった。しかし、分岐被覆を使えば、楕円的モンテシノス結び目（特に 2 橋結び目）から簡単に非自明な例が構成できる [46, 40]。

### 4. 曲面上の本質的単純閉曲線とモノドロミー群

曲面  $\Sigma$  上の単純閉曲線  $\alpha$  が本質的であるとは、 $\alpha$  を境界とする  $\Sigma$  上の円板あるいは一点穴あき円板が存在しないときをいう。 $\Sigma$  上の本質的単純閉曲線のイソトピー類全体の集合を  $\mathcal{S} = \mathcal{S}(\Sigma)$  で表す。このとき、拡大写像類群  $\text{MCG}^{\pm}(\Sigma)$  は自然に  $\mathcal{S}$  に作用する。円周上の曲面束のファイバー曲面に対して、次の命題が成立する。

**命題 4.1** 円周上の曲面束  $M_{\varphi}$  において、ファイバー曲面  $\Sigma$  上の 2 つの本質的単純閉曲線  $\alpha$  と  $\alpha'$  が  $M_{\varphi}$  内でホモトピックとなるための必要十分条件は、 $\alpha$  と  $\alpha'$  がモノドロミー群  $\langle \varphi \rangle$  の  $\mathcal{S}$  への作用の同じ軌道に属することである。

それでは、3 次元多様体  $M = V_1 \cup_{\Sigma} V_2$  のヘガード曲面  $\Sigma$  上の本質的単純閉曲線の  $M$  内での振る舞いについては、どのようなことと言えるであろうか？ いま  $\Delta_i \subset \mathcal{S}$  を  $V_i$  のメリディアン全体が作る集合、 $Z \subset \mathcal{S}$  を  $M$  内でヌルホモトピックな本質的単純閉曲線全体が作る集合とする。また、ハンドル体  $V_i$  の拡張写像類群  $\text{MCG}^{\pm}(V_i)$  の部分群  $G_i := \text{Ker}(\text{MCG}^{\pm}(V_i) \rightarrow \text{Out}(\pi_1(V_i)))$  を考える。更に、群  $G_i$  を  $\text{MCG}^{\pm}(\Sigma)$  の部分群と同一視し、 $\text{MCG}^{\pm}(\Sigma)$  の部分群  $G = \langle G_1, G_2 \rangle$  を考える。このとき、 $G$  の  $\mathcal{S}$

への作用は、 $M$  におけるホモトピー類を保存し、その意味で、群  $G$  はヘガード曲面に対するモノドロミー群の類似と考えることができる。そこで群  $G$  をヘガード曲面  $\Sigma$  のモノドロミー群と呼ぶことにする。2005 年にハイファで開催されたヘガード分解をテーマとするコンファレンスにおいて Minsky は次のような問題を提起した。

問題 4.2 集合  $Z$  はいつ軌道  $G(\Delta_1 \cup \Delta_2)$  に一致するか？

この問題は、3 次元多様体のヘガード分解の類似である絡み目の橋分解に対しても考えることができる。講演者は、次節で述べる McShane の等式の類似の研究 [41]、及び結び目群の間の全射準同型の研究 [36] において、2 橋絡み目の 2 橋分解に対する上述の問題（及び関連する問題）に遭遇し、その後、Donghi Lee 氏との一連の共同研究により、2 橋絡み目に関するそれらの問題の完全解決に漕ぎ着けた [25, 26, 27]。この 2 橋絡み目に対する結果を敷衍することにより、Minsky の問題の精密化として、次の問題が自然に生じる（Problem Session, 数理解析研究所講究録 1777 (2012)）。

問題 4.3  $M = V_1 \cup_{\Sigma} V_2$  を有向閉 3 次元多様体のヘガード分解、あるいは絡み目補空間の橋分解とする。このヘガード分解あるいは橋分解が十分複雑であるなら（例えば高い Hempel 距離をもつなら）モノドロミー群  $G$  に対して次が成り立つか？

- (1) 射影的測度付き葉層構造空間  $\text{PML}(\Sigma)$  への  $G$  の作用は、空でない不連続領域  $\Omega(G)$  を持つか？
- (2)  $\Omega(G) = \text{PML}(\Sigma) \setminus \overline{G(\Delta_+ \cup \Delta_-)}$  であるか？
- (3)  $\Omega(G)$  に含まれる単純閉曲線  $\alpha \in S \cap \Omega(G)$  が  $M$  内でヌルホモトピックになることはあるか？あるいは、単純閉曲線  $\alpha \in S$  が  $M$  内でヌルホモトピックとなるための必要十分条件は  $\alpha$  が  $\overline{G(\Delta_1 \cup \Delta_2)}$  に含まれることであるか？（これは  $\alpha$  が  $G(\Delta_1 \cup \Delta_2)$  に含まれることと同値か？）
- (4)  $\Omega(G)$  内に含まれる二つの単純閉曲線が  $M$  内でホモトピックになるための必要十分条件は、それらが同じ  $G$ -軌道に含まれることであるか？
- (5)  $\overline{G(\Delta_1 \cup \Delta_2)}$  および  $\bar{Z}$  は測度 0 であるか？
- (6)  $G$  は自由積  $G_1 * G_2$  と同型であるか？

ここで、射影的測度付き葉層構造空間  $\text{PML}(\Sigma)$  は、タイヒミュラー空間  $\text{Teich}(\Sigma)$  の Thurston コンパクト化において無限遠境界として現れる球面  $S^{6g+2n-7}$  であり、そこには  $\text{MCG}^{\pm}(\Sigma)$  が自然に作用し、集合  $S$  は  $\text{PML}(\Sigma)$  の  $\text{MCG}^{\pm}(\Sigma)$  不変な稠密部分集合と同一視されている。Lee 氏との共同研究成果は、2 橋絡み目補空間の 2 橋分解に対する上述の問題に対して肯定的解答を与えている。その後、Brian Bowditch 氏の協力を得た大鹿健一氏との共同研究 [35] により、一般の場合に対しても進展があり、特に (1) の肯定的解決、(3)、(4) に対する部分的肯定的解決、そして (6) に対しては、 $G$  の向き保存部分群  $G^+$  に対する肯定的解決  $G^+ = G_1^+ * G_2^+$  が得られた。

本節の最後に、モノドロミー群  $G = \langle G_1, G_2 \rangle$  と分岐バーチャル・ファイブレーション定理 3.1 との間に、以下の関係があることを注意しておく。

- 定理 3.1 における曲面束のモノドロミーは、ヘガード曲面のモノドロミー群  $G$  の部分群  $G_1, G_2$  に含まれる向き逆転対合  $h_1, h_2$  の積  $h_2 h_1$  として得られる。

## 5. McShane の等式とその類似

$T$  を一点穴あきトーラス,  $\rho \in \text{Teich}(T)$  を  $T$  上の有限面積完備双曲構造とする。このとき,  $T$  上の任意の本質的単純閉曲線  $\alpha \in \mathcal{S} = \mathcal{S}(T)$  は双曲構造  $\rho$  に関する単純閉測地線にホモトピックであり, 従ってその閉測地線の長さ  $l_\rho(\alpha)$  が定まる。McShane は学位論文 [30] で次の驚くべき等式を証明した。

定理 5.1 (McShane [30])

$$\sum_{\alpha \in \mathcal{S}} \frac{1}{1 + e^{l_\rho(\alpha)}} = \frac{1}{2}$$

この等式は McShane 自身 [31] により一般のカスプ付き双曲曲面に対する等式に一般化され, Mirzakhani [33] によりカスプ及び測地的境界を持つ双曲曲面へ, Tan-Wong-Zhang [43] により錐特異点を持つ双曲曲面に一般化された。そして曲面のモジュライ空間  $\text{Teich}(\Sigma)/\text{MCG}(\Sigma)$  の Weil-Petersson 体積の計算への McShane の等式の見事な応用が Mirzakhani [33] により与えられたことにより, その重要性が認識された。

一方, Bowditch [10] はこの等式が任意の擬フックス表現  $\rho: \pi_1(T) \rightarrow \text{PSL}(2, \mathbb{C})$  (即ち,  $\rho$  は忠実離散表現で, その像として得られるクライン群の極限集合がリーマン球面内の円周と同相であるもの) に対しても成立することを証明した。但し, そこでは  $l_\rho(\alpha)$  は  $\mathbb{H}^3$  の等長変換  $\rho(\alpha)$  の複素的長さ「(移動距離) +  $i$ (回転角)」を表す。更に Bowditch [11] は  $S^1$  上の双曲的穴あきトーラス束のカスプトーラス ( $\cong \mathbb{C}/(\mathbb{Z}1 + \mathbb{Z}\lambda)$ ) のモジュラス  $\lambda \in \mathbb{C}^*$  を, ファイバー曲面である穴あきトーラス上の本質的単純閉曲線の複素的長さで表す公式を証明した。

Bowditch の研究に触発された講演者は, 秋吉宏尚氏, 宮地秀樹氏との共同研究により, 一般の穴あき曲面擬フックス群の極限集合の「幅」を表す公式, 及び一般の双曲的穴あき曲面束のカスプトーラスのモジュラスの形を表す公式を得た [5, 6]。曲面束については, このように一般の場合の結果を得ることができたが, そのずっと前から予想していた双曲的 2 橋絡み目に対する McShane の等式の類似は証明できずにいた。報告 [41] において, その予想が 2 橋絡み目の 2 橋球面上の単純閉曲線に関する問題に帰着できることを観察していたが, その問題が解けずにいたのである。しかし, 研究集会で出会った Donghi Lee 氏と共同研究により, 問題提出から 12 年後にそれらの問題を全て解決できた [25, 26, 27]。

以下,  $S^1$  上の  $T$  束に対する McShane の等式の類似 [11] と, 2 橋絡み目に対する McShane の等式の類似 [26] を比較する。まず, 擬アノソフ写像  $\varphi \in \text{MCG}(T) \cong \text{SL}(2, \mathbb{Z})$  をモノドロミーとする  $S^1$  上の  $T$  束  $M_\varphi$  を考える。このとき, モノドロミー群  $\langle \varphi \rangle$  の  $\text{PML}(T) \cong S^1$  への作用は,  $\varphi$  の 2 つの固定点なる極限集合を持ち, 不連続領域の商  $\Omega(\langle \varphi \rangle)/\langle \varphi \rangle$  は 2 つの円周  $C_1, C_2$  から成る。 $(C_j)_S \subset \mathcal{S}/\langle \varphi \rangle$  を単純閉曲線により代表される  $C_j$  の点全体の集合とする。

定理 5.2 (Bowditch [11]) 穴あきトーラス束  $M_\varphi$  のカスプトーラスのモジュラス  $\lambda(M_\varphi)$  は次で与えられる。ただし,  $\rho$  は  $M_\varphi$  の完備双曲構造のホロノミー表現である。

$$\lambda(M_\varphi) = \sum_{\alpha \in (C_1)_S} \frac{1}{1 + e^{l_\rho(\alpha)}} = - \sum_{\alpha \in (C_2)_S} \frac{1}{1 + e^{l_\rho(\alpha)}}$$

次に双曲的 2 橋絡み目  $K$  を考える。その 2 橋分解は,  $T$  と通約的な 4 点穴あき球面  $S$  をヘガード曲面とするヘガード分解と理解できる。この 2 橋分解のモノドロミー群

$G$  は自然に  $\text{PML}(T)$  に作用して、カントール集合を極限集合として持ち、不連続領域の商  $\Omega(G)/G$  は 2 つの閉区間 (正確には軌道体  $\mathcal{I}$ )  $C_1, C_2$  から成る。 $(C_j)_S \subset S/\langle \varphi \rangle$  を単純閉曲線により代表される  $C_j$  の点全体の集合とする。 $\partial C_j \subset (C_j)_S$  に注意する。

定理 5.3 (Lee-S [26]) 双曲的 2 橋絡み目  $K$  の補空間のカスプトーラスのモジュラス  $\lambda(K)$  は次で与えられる。但し、 $|K|$  は  $K$  の成分数、 $\rho$  は  $S^3 - K$  の完備双曲構造のホロノミー表現が誘導する  $\pi_1(T)$  の忠実でない離散表現を表す。

$$\begin{aligned}\lambda(K) &= \frac{4}{|K|} \left\{ 2 \sum_{\alpha \in (\text{Int} C_1)_S} \frac{1}{1 + e^{l_\rho(\alpha)}} + \sum_{\alpha \in \partial C_1} \frac{1}{1 + e^{l_\rho(\alpha)}} \right\} \\ &= \frac{-4}{|K|} \left\{ 2 \sum_{\alpha \in (\text{Int} C_2)_S} \frac{1}{1 + e^{l_\rho(\alpha)}} + \sum_{\alpha \in \partial C_2} \frac{1}{1 + e^{l_\rho(\alpha)}} + 1 \right\},\end{aligned}$$

これらの 2 つの等式の証明において、穴あきトーラス束に対しては Jorgensen 理想四面体分割 [17] が、2 橋絡み目に補空間に対しては (Jorgensen 理想四面体分割の類似として得られた) S-Weeks 理想四面体分割 [42] が重要な役割を果たした。なお、2 橋絡み目に対する問題 4.3 の解答は、級数が絶対収束性することの証明で使われた。

2 橋絡み目に対する McShane の等式の類似が一般の絡み目に対しても存在するかという問題が残るが、このためには、問題 4.3 の解決に加えて、橋曲面 (穴あき曲面) のモノドロミー群の、カスプから出る測地 ray 全体が作る空間  $\mathcal{G} (\cong S^1)$  への作用を理解する必要がある。(実際、一般の穴あき曲面束  $M_\varphi$  に対する McShane の等式の類似 [6] においては、モノドロミー  $\varphi$  の  $\mathcal{G}$  への作用を考える必要があった。) この動機の下に行った Bowdich 氏との共同研究 [13] により、 $\text{MCG}^\pm(\Sigma)$  の  $\mathcal{G}$  への作用の非遊走集合は「小さい」、特に  $\Sigma$  の任意の双曲構造が定める  $\mathcal{G}$  上のユークリッド距離に関して、非遊走集合のルベグ測度は 0 である、という意外な結果が得られた。高次元球面  $\text{PML}(\Sigma)$  への写像類群の作用はエルゴード的であり、従って非遊走集合は全測度を持つにもかかわらず、同じ群の円周への自然な作用の非遊走集合が小さいということをし、意外に思った次第である。定理 5.3 の一般化までには、まだまだ道遠しである。

## 6. カスプ付き双曲多様体の標準的分割

カスプ付き有限体積双曲多様体  $M = \mathbb{H}^n/\Gamma$  は、コンパクト部分多様体  $M_0$  と有限個のカスプ  $C_i$  ( $1 \leq i \leq \mu$ ) を境界で貼り合わせて得られる。ここで、カスプ  $C_i$  は  $n-1$  次元ユークリッド多様体  $(E_i, ds_i^2)$  を用いて  $(E_i \times [1, \infty), \frac{1}{t^2} ds_i^2 + dt^2)$  の形で与えられる。 $M$  が結び目  $K$  の補空間である場合は、カスプは  $K$  の正則近傍  $N(K)$  から  $K$  を除いた空間  $N(K) - K \cong T^2 \times [1, \infty)$  と位相的に同一視できる。

さて、カスプ  $C = \sqcup_{i=1}^\mu C_i$  が指定された時、そのカットローカス  $\mathcal{P}$  を考える。

$$\mathcal{P} := \{x \in M \mid x \text{ から } C \text{ への最短測地線が 2 本以上存在する}\}$$

このとき、 $\mathcal{P}$  は  $M$  の変形レトラクトになっており、Ford スパイン と呼ばれる。また、 $\mathcal{P}$  はカスプの体積比  $\text{vol}(C_1) : \text{vol}(C_2) : \cdots : \text{vol}(C_\mu)$  で決まる。Ford スパイン  $\mathcal{P}$  の幾何学的双対  $\mathcal{P}^*$  は、 $M$  の理想胞体分割 (Epstein-Penner 分解) を与える。特に、 $\text{vol}(C_1) = \text{vol}(C_2) = \cdots = \text{vol}(C_\mu)$  と選べば、 $\mathcal{P}^*$  は双曲多様体  $M$  から一意的に定まるため、 $M$  の標準的分割と呼ばれている。Epstein-Penner [16] は、ミンコフスキー空

間における凸包構成を通して，分割  $\mathcal{P}^*$  を記述した。ミンコフスキー計量は  $\mathcal{P}^*$  上のユークリッド構造を誘導するため，この分割はユークリッド分解と命名されている。

Bowditch-Epstein [12] は，穴あき曲面  $\Sigma$  上の双曲構造に対して，そのユークリッド分解のイソトピー類は不変量と理解できることに注目して，タイヒミュラー空間  $\text{Teich}(\Sigma)$  の自然な理想胞体分割を構成した。この研究から様々な重要な応用が生まれている。

これに対して，3次元以上においては，Mostow-Prasad 剛性定理により，与えられた多様体の有限体積完備双曲構造は（存在するなら）一意である。そのため，カスプ付き有限体積双曲多様体  $M$  の標準的分割の組み合わせ構造は， $M$  の位相多様体としての完全不変量になる。Weeks が開発したソフト SnapPea は，結び目補空間の双曲構造，特に標準的分割を計算し，2つの双曲結び目が同型であるかどうか，標準的分割の組み合わせ構造を比較することにより答えてくれ，結び目理論研究者にとってまるで魔法の杖である。最近では，これを精度保証付計算で実行するプログラム [19] も開発され，様々な問題に応用されている。

具体的に与えられた3次元双曲多様体に対しては，その標準的分割を決定することは可能であるが，無限族に対して標準的分割を決定するのは簡単ではなく，唯一，Jorgensen の未完の研究 [21] により円周上の一点穴あきトーラス束の標準的分割が与えられているだけであった [17]。Weeks 氏との共同研究 [42] では，第3節の観点から，Jorgensen 分解のアイデアを2橋結び目補空間の橋分解に対して適用することにより，その標準的分割の候補となる位相的理想単体分割を構成した。

Jorgensen の未完の研究を理解し，それを拡張することにより上述の2橋結び目補空間の分割が標準的分割であることを証明する，という目標を掲げて行った秋吉宏尚氏，和田昌昭氏，山下靖氏との共同研究 [7, 8, 9] を以下で説明する。 $\pi_1(T)$  の自由生成系  $\{A, B\}$  を固定する。このとき，交換子  $[A, B]$  は  $T$  の穴の周りを一周する単純閉曲線により代表される。表現  $\rho : \pi_1(T) \rightarrow \text{PSL}(2, \mathbb{C}) \cong \text{Isom}^+(\mathbb{H}^3)$  が型保存であるとは， $\rho([A, B])$  が放物的変換であり， $\text{Im}(\rho)$  が  $\mathbb{H}^3$  内に共通固定点を持たないときをいう。 $\text{PSL}(2, \mathbb{C})$  による共役を法とする  $\pi_1(T)$  の型保存表現全体が作る空間を  $\mathcal{R}$  とする。このとき， $(A, AB, B)$  の  $\rho$  による像のトレースを考えることにより，次の同型を得る。

$$\mathcal{R} \cong \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 - \{0\} \mid x^2 + y^2 + z^2 = xyz\} / \sim$$

ここで， $\sim$  は，2つの変換  $(x, y, z) \mapsto (x, -y, -z)$ ,  $(x, y, z) \mapsto (-x, y, -z)$  が生成する  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ -作用 による同値関係を表す。フックス表現，擬フックス表現，忠実離散表現，離散表現の全体が作る  $\mathcal{R}$  の部分空間を，それぞれ  $\mathcal{F}$ ,  $\mathcal{QF}$ ,  $\mathcal{DF}$ ,  $\mathcal{D}$  で表す。このとき，次が成立する（等号は Minsky [32]，最後の同型は同時一意化定理による）。

$$\mathcal{F} \subset \mathcal{QF} \subset \overline{\mathcal{QF}} = \mathcal{DF} \subset \mathcal{D} \subset \mathcal{R}, \quad \mathcal{F} \cong \text{Teich}(T) \cong \mathbb{H}^2, \quad \mathcal{QF} \cong \mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2$$

以下，一次分数変換  $\rho([A, B])$  はリーマン球面上の  $\infty$  を固定し，従って，離散表現  $\rho \in \mathcal{D}$  の像として得られるクライン群  $\Gamma = \rho(\pi_1(T))$  において， $\infty$  の固定部分群  $\Gamma_\infty$  は放物的変換から成るとする。3次元双曲多様体  $M = \mathbb{H}^3/\Gamma$  のフォードスパイン  $\mathcal{P}$  の  $\mathbb{H}^3$  における逆像  $\tilde{\mathcal{P}}$  を考えると， $\infty$  に面する  $\mathbb{H}^3 - \tilde{\mathcal{P}}$  の連結成分の  $\mathbb{H}^3$  における閉包  $Ph(\Gamma)$  は， $(\Gamma_\infty$  を法とする)  $\Gamma$  の基本領域になり， $\Gamma$  のフォード領域と呼ばれる。その境界  $\partial Ph(\Gamma)$  の各面は，ある元  $\gamma \in \Gamma - \Gamma_\infty$  の等長半球面  $Ih(\gamma) \cong \mathbb{H}^2$  上の測地的多角形である。ここで，等長半球面  $Ih(\gamma)$  は， $\infty$  を中心とする十分小さなホ口球体  $H_\infty$  とその逆像  $\gamma^{-1}(H_\infty)$  から等距離にある点全体が作る  $\mathbb{H}^3$  の全測地的平面である。

フックス表現  $\rho \in \mathcal{F}$  のフォード領域  $Ph(\rho)$  はきわめて単純な構造を持つ。 $\rho$  を  $\mathcal{QF}$  内で変形するとき、 $Ph(\rho)$  の組み合わせ構造が単純な状態からどのように変化するかを解明したのが、Jorgensen の研究 [21] であった。その基本的アイデアを Jorgensen は次のように表現している：*The Ford domain records the history of how the quasifuchsian group evolved from a simple fuchsian group.* もう少し詳しく比喩的に述べると、次のようになる。（正確な記述と証明については [8, 9] を参照されたい。）

- $\rho \in \mathcal{QF}$  のフォード領域  $Ph(\rho)$  の組み合わせ構造は、一般的には、微小変形を施しても不変であり、唯一、次の「世代交代」によってのみ変化が起こる：ある等長半球面  $Ph(\gamma)$  が最前線  $P(\Gamma) := \overline{Ph(\Gamma)} \cap \partial \mathbb{H}^3$  から引退し、それと同時に、新世代の等長半球面  $Ph(\gamma_{\text{new}})$  が最前線  $P(\Gamma)$  の別の箇所から登場する。引退後の  $Ph(\gamma)$  は、擬フックス群進化の証人として  $Ph(\rho)$  を安定的に支持し続ける。

和田昌昭氏が開発したソフト OPTi [45] は、擬フックス群のフォード領域、そして極限集合、が単純なものから極めて複雑なものに進化していく様子をリアルタイムで見ることを可能にしてくれた。なお、Mumford-Series-Wright が 20 年もの年月をかけてようやく完成させた名著 *Indra's Pearls* [34] では、穴あきトーラス擬フックス群の極限集合の摩訶不思議な百変化が、懇切丁寧な説明とともに収録されている。これに関しては、小森洋平氏による精魂込めた素晴らしい翻訳 [24] もお薦めしたい。

上述のプロジェクトの一環として行った秋吉氏との共同研究 [7] では、ミンコフスキー空間における凸包構成を用いた有限体積カスプ付き双曲多様体に対するユークリッド分解を、無限体積カスプ付き双曲多様体に対する EPH-分解 (Euclidean-Parabolic-Hyperbolic 分解) に一般化し、双曲空間における極限集合の凸包の商として定義される双曲多様体の凸核との関係を調べた。加えて、Keen-Series [23] による穴あきトーラス擬フックス空間のプリーツ部分多様体への葉層構造的分割

$$\mathcal{QF} = \sqcup \{P(\lambda_-, \lambda_+) \mid (\lambda_-, \lambda_+) \in \text{PML}(\mathcal{T}) \times \text{PML}(\mathcal{T}) - \text{diag}(\text{PML}(\mathcal{T}))\}$$

との関係を調べ、Jorgensen 理論の精密化として EPH 予想 [8, Conjectures 8.1-8.3] を提案した。これらの予想は、Francois Gueritaud 氏により、角度構造と最大体積原理を用いた精緻な議論により、全て肯定的に解決された [18]。

さて、擬アノソフ写像  $\varphi$  をモノドロミーとする穴あきトーラス束  $M_\varphi$  の完備双曲構造は、 $\varphi$  の作用により不変な忠実離散表現  $\rho = \rho_\varphi \in \mathcal{DF}$  から構成される。そして、 $\varphi$  の  $\text{PML}(\mathcal{T}) \cong S^1$  への作用の吸引的/反発的固定点を  $\lambda_\pm$  とすると、 $\rho$  は  $\mathcal{QF}$  のプリーツ部分多様体  $P(\lambda_-, \lambda_+)$  の  $\mathcal{R}$  における閉包の特別な境界点として得られる。この意味で、ファイバーが作る穴あきトーラスクライン群  $\rho \in \mathcal{DF}$  は  $\bar{P}(\lambda_-, \lambda_+) \subset \overline{\mathcal{QF}}$  の中で、極限まで進化を遂げたクライン群といえる。なお、そのフォード領域は、Jorgensen 理論を  $\overline{\mathcal{QF}}$  へ拡張することにより得られ [3]、実際、Jorgensen と Marden はこのような観点から、双曲構造を持つ円周上の曲面束を具体的に構成していた [20, 22]。また、これとは独立に、Riley [37] は、初等的な方法により、最も単純な双曲的穴あきトーラス束である 8 の字結び目補空間の双曲構造を構成していた。これらの研究が Thurston にインスピレーションを与え、ハーケン多様体に対する一意化定理が完成させるに至ったのであった。（この経緯に関するとても興味深い Riley 氏の個人的回想が [38] にある。）

以下で、2 橋絡み目補空間の双曲構造も、橋構造の観点からみると、やはり極限まで進化を遂げたクライン群と理解でき、そしてそのフォード領域が、Jorgensen 理論の

$\mathcal{QF}$  の外部への拡張により構成できることを説明する。まず橋構造の観点からみると、2 橋絡み目補空間は、4 点穴あき球面  $S$  と閉区間  $[-1, 1]$  の直積  $S \times [-1, 1]$  に、二つの 2 ハンドル  $D_{\pm}^2 \times I$  を  $S \times \{\pm 1\}$  に貼り付けて得られることに注意する。2 橋絡み目の  $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ -対称性を勘案すると、このことは、2 橋絡み目補空間が、 $T \times [-1, 1]$  に、二つの 2 ハンドル軌道体  $(D_{\pm}^2/(z \sim -z)) \times I$  を  $T \times \{\pm 1\}$  に貼り付けて得られる軌道体と通約的であることを意味する。この 2 ハンドル貼り付けという位相的な操作が、以下のように、双曲的錐多様体の連続族として幾何的に実現できるのである。接着円周  $\partial(D_{\pm}^2/(z \sim -z))$  が定める  $T$  の本質的単純閉曲線を  $r_{\pm} \in S \subset \text{PML}(T)$  とする。このとき、有理的プリーツ部分多様体  $P(r_-, r_+) \subset \mathcal{QF} \subset \mathcal{R}$  は自然に  $\mathcal{QF}$  の外部への拡張  $\hat{P}(r_-, r_+)$  をもつ。しかも、Jorgensen 理論の  $\mathcal{QF}$  の外部への自然な拡張を考えることにより、 $\hat{P}(r_-, r_+) - P(r_-, r_+)$  は、双曲的錐多様体の連続族を与え、その「終点」が、2 橋絡み目補空間の完備双曲構造を与えることがわかる。これが我々の主張である [9, Preface]。(この主張は OPTi で見ると一目瞭然であるが、未だに論文を執筆していないことを申し訳なく思っている。) この主張は次のことを意味する：クライン群の空間  $\mathcal{D} \subset \mathcal{R}$  の孤立点である 2 橋結び目群は、双曲的錐多様体の連続族により、 $\mathcal{D}$  の大陸である  $\mathcal{QF}$  と結ばれている。言い換えると、2 橋結び目群は、クライン群の空間の大陸  $\mathcal{QF}$  の外部  $\mathcal{R} - \mathcal{QF}$  において、この航路に沿って極限まで進化を遂げたクライン群と理解できる。

ファレイトイル張りが指定された双曲平面  $\mathbb{H}^2$  において、各理想頂点  $r$  に閉区間のコピー  $[0, \pi]_r$  を付け加えて得られる「トゲ付きファレイダイアグラム」 $\hat{\mathbb{H}}^2 = \mathbb{H}^2 \cup_{r \in \hat{\mathbb{Q}}} [0, \pi]_r$  を考えると、穴あきトーラスに関する Jorgensen 理論の究極の拡張として、次が成立すると予想している。

予想 6.1  $\pi_1(T)$  の型保存離散表現全体の空間  $\mathcal{D}$  は、「自然に双曲的 (錐) 多様体のホロノミー表現と理解できる」型保存表現全体の空間  $\hat{\mathcal{D}} \subset \mathcal{R}$  に含まれる。更に、全単射  $\nu: \hat{\mathcal{D}} \rightarrow \hat{\mathbb{H}}^2 \times \hat{\mathbb{H}}^2 - \Delta$  が存在し、 $\rho \in \hat{\mathcal{D}}$  のフォード領域  $Ph(\rho)$  の組み合わせ構造は  $\nu(\rho)$  により記述できる。ここで  $\Delta$  は、対角線集合を含む  $\hat{\mathbb{H}}^2 \times \hat{\mathbb{H}}^2$  のある (きちんと記述できる) 部分集合を表す。

$\hat{\mathcal{D}}$  の各元に対して、McShane の等式の類似が成り立つと予想するのは自然であり、実際、Hecke 群と 2 橋結び目群の「合いの子」として Riley により導入された Heckoid 群に対しては証明済みである [28, 29]。また、秋吉氏、Lee 氏と行なった実験的な共同研究 [4] は、前述の双曲的錐多様体の連続族に対して McShane の等式の類似が成り立つことを示唆しているように思える。なお、秋吉宏尚氏は錐点付きトーラスに対する Jorgensen 理論の類似の確立を目指した研究を行っている [2]。また、錐点付きトーラス基本群の  $\text{PSL}(2, \mathbb{C})$  表現空間内において、有理的プリーツ部分多様体の拡張を考えるというアイデアを用いた研究が、Gaven Martin 氏と山下靖氏により行われ、小さな余体積を持つ算術的クライン群の研究への興味深い応用が与えられている [15]。

末筆になりましたが、共同研究者の皆様に深く感謝いたします。個性豊かな様々な方々と共同研究ができたことは、私の大切な心の財産になっています。

## 参考文献

- [1] I. Agol, *The virtual Haken conjecture. With an appendix by Agol, Daniel Groves, and Jason Manning*, Doc. Math. **18** (2013), 1045–1087.

- [2] H. Akiyoshi, *Side parameter for the torus with a single cone point*, J. Knot Theory Ramifications **24** (2015), 1540005, 24 pp.
- [3] H. Akiyoshi, *Ford domains of geometrically infinite punctured torus groups*, preprint.
- [4] H. Akiyoshi, D. Lee and M. Sakuma, *A variation of McShane's identity for 2-bridge links and its possible generalization*, RIMS Kokyuroku Bessatsu **B48** (2014), 131–147.
- [5] H. Akiyoshi, H. Miyachi and M. Sakuma, *A refinement of McShane's identity for quasi-fuchsian punctured torus groups*, In the Tradition of Ahlfors and Bers, III, Contemporary Math. **355** (2004), 21–40.
- [6] H. Akiyoshi, H. Miyachi and M. Sakuma, *Variations of McShane's identity for punctured surface groups*, Proceedings of the Workshop “Spaces of Kleinian groups and hyperbolic 3-manifolds”, London Math. Soc., Lecture Note Series **329** (2006), 151–185.
- [7] H. Akiyoshi and M. Sakuma, *Comparing two convex hull constructions for cusped hyperbolic manifolds*, Kleinian groups and hyperbolic 3-manifolds (Warwick, 2001), 209–246, London Math. Soc. Lecture Note Ser., **299**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2003.
- [8] H. Akiyoshi, M. Sakuma, M. Wada, and Y. Yamashita, *Jorgensen's picture of punctured torus groups and its refinement*, Kleinian groups and hyperbolic 3-manifolds (Warwick, 2001), 247–273, London Math. Soc. Lecture Note Ser., **299**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2003.
- [9] H. Akiyoshi, M. Sakuma, M. Wada, and Y. Yamashita, *Punctured torus groups and 2-bridge knot groups (I)*, Lecture Notes in Mathematics **1909**, Springer, Berlin, 2007.
- [10] B. H. Bowditch, *Markoff triples and quasifuchsian groups*, Proc. London Math. Soc. **77** (1998), 697–736.
- [11] B. H. Bowditch, *A variation of McShane's identity for once-punctured torus bundles*, Topology **36** (1997), 325–334.
- [12] B. H. Bowditch and D. B. A. Epstein, *Natural triangulations associated to a surface*, Topology **27** (1988), 91–117.
- [13] B. H. Bowditch and M. Sakuma, *The action of the mapping class group on the space of geodesic rays of a punctured hyperbolic surface*, arXiv:1608.03009.
- [14] R. Brooks, *On branched coverings of 3-manifolds which fiber over the circle*, J. Reine Angew. Math. **362** (1985), 87–101.
- [15] B. Casselman, *About the December Cover - Searching for small hyperbolic quotients -*, Notices Amer. Math. Soc. **63** (2016), p.1248.
- [16] D. B. A. Epstein and R. Penner, *Euclidean decompositions of noncompact hyperbolic manifolds*, J. Differential Geom. **27** (1988), 67–80.
- [17] W. Floyd and A. Hatcher, *Incompressible surfaces in punctured-torus bundles*, Topology Appl. **13** (1982), 263–282.
- [18] F. Guéritaud, *Triangulated cores of punctured-torus groups*, J. Differential Geom. **81** (2009), 91–142.
- [19] N. Hoffman, K. Ichihara, M. Kashiwagi, H. Masai, S. Oishi and A. Takayasu, *Verified computations for hyperbolic 3-manifolds*, Exp. Math. **25** (2016), 66–78.
- [20] T. Jorgensen, *Compact 3-manifolds of constant negative curvature fibering over the circle*, Ann. Math. **106** (1977), 61–72.
- [21] T. Jorgensen, *On pairs of once-punctured tori*, Kleinian groups and hyperbolic 3-manifolds (Warwick, 2001), 183–207, London Math. Soc. Lecture Note Ser., **299**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2003.
- [22] T. Jorgensen and A. Marden, *Two doubly degenerate groups*, Quart. J. Math. **30** (1979), 143–156.
- [23] L. Keen and C. Series, *Pleating invariants for punctured torus groups*, Topology **43**

(2004), 447–491.

- [24] 小森洋平, 「インドラの真珠 - クラインの夢みた世界 -」 2013, 日本評論社.
- [25] D. Lee and M. Sakuma, *Epimorphisms between 2-bridge link groups: Homotopically trivial simple loops on 2-bridge spheres*, Proc. London Math. Soc. **104** (2012), 359–386.
- [26] D. Lee and M. Sakuma, *A variation of McShane’s identity for 2-bridge links*, Geom. Topol. **17** (2013), 2061–2101.
- [27] D. Lee and M. Sakuma, *Homotopically equivalent simple loops on 2-bridge spheres in 2-bridge link complements (I), (II) and (III)*, Geom. Dedicata **171** (2014), 1–28, ibid. 29–56, ibid. 57–91.
- [28] D. Lee and M. Sakuma, *Epimorphisms from 2-bridge link groups onto Heckoid groups (I) and (II)*, Hiroshima Math. J. **43** (2013), 239–264, ibid. 265–284.
- [29] D. Lee and M. Sakuma, *Homotopically equivalent simple loops on 2-bridge spheres in Heckoid orbifolds for 2-bridge links (I),(II)*, J. Knot Theory Ramifications **25** (2016), 1650067 [33 pages], ibid. 1650066 [22 pages].
- [30] G. McShane, *A remarkable identity for lengths of curves*, Ph.D. Thesis, University of Warwick, 1991.
- [31] G. McShane, *Simple geodesics and a series constant over Teichmüller space*, Invent. Math. **132** (1998), 607–632.
- [32] Y. Minsky, *The classification of punctured torus groups*, Ann. of Math. **149** (1999), 559–626.
- [33] M. Mirzakhani, *Simple geodesics and Weil-Petersson volumes of moduli spaces of bordered Riemann surfaces*, Invent. Math. **167** (2007), 179–222.
- [34] D. Mumford, C. Series, D. Wright, *Indra’s pearls. The vision of Felix Klein*, Cambridge University Press, New York, 2002. xx+396 pp.
- [35] K. Ohshika and M. Sakuma, *Subgroups of mapping class groups related to Heegaard splittings and bridge decompositions*, Geom. Dedicata **180** (2016), 117–134.
- [36] T. Ohtsuki, R. Riley, and M. Sakuma, *Epimorphisms between 2-bridge link groups*, Geom. Topol. Monogr. **14** (2008), 417–450.
- [37] R. Riley, *A quadratic parabolic group*, Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. **77** (1975), 281–288.
- [38] R. Riley, *A personal account of the discovery of hyperbolic structures on some knot complements. With a postscript by M. B. Brin, G. A. Jones and D. Singerman*, Expo. Math. **31** (2013), 104–115.
- [39] M. Sakuma, *Surface bundles over  $S^1$  which are 2-fold branched cyclic coverings of  $S^3$* , Math. Sem. Notes Kobe Univ. **9** (1981), 159–180.
- [40] M. Sakuma, *The geometries of spherical Montesinos links*, Kobe J. Math. **7** (1990), 167–190.
- [41] M. Sakuma, *Variations of McShane’s identity for the Riley slice and 2-bridge links*, In “Hyperbolic Spaces and Related Topics”, R.I.M.S. Kokyuroku **1104** (1999), 103–108.
- [42] M. Sakuma and J. Weeks, *Examples of canonical decompositions of hyperbolic link complements*, Japan. J. Math. (N.S.) **21** (1995) 393–439.
- [43] S. P. Tan, Y. L. Wong, and Y. Zhang, *Generalizations of McShane’s identity to hyperbolic cone-surfaces*, J. Differential Geom. **72** (2006), 73–112.
- [44] W. P. Thurston, *Three-dimensional manifolds, Kleinian groups and hyperbolic geometry*, Bull. Amer. Math. Soc. **6** (1982), 357–381.
- [45] M. Wada, *OPTi*, Computer Software available at <http://delta-mat.ist.osaka-u.ac.jp/OPTi/>
- [46] G. S. Walsh, *Great circle links and virtually fibered knots*, Topology **44** (2005), 947–958.