Ding-Iohara-Miki 代数の表現論

インタートワイナーを中心に

粟田英資　(名古屋大学)*

1. 始めに

Ding-Iohara-Miki（丁-庵原-三木）代数 [1, 2] は、微分作用素の代数 [3, 4] の拡張であり、$gl(1)$ タイプの量子トロイダル代数 [5] で、2つの方向のアフィン性から2次元の中心を持つ。q-ビラソロ代数 [6] や q-W_N 代数 [7, 8] 等の複雑な代数もその特殊な場合として内包し、多くの対称性を持ち、又ホップ代数でもあり、非常に性質の良い代数である。更に、ゲージ理論のネクラソフ関数 [9] とも関係しており [10] 非常に興味深い。ここではその幾つかを紹介する。

2. 丁-庵原-三木代数

2.1. $W_{1+\infty}$ 代数

丁-庵原-三木代数 [1, 2] は、微分作用素の代数 [3, 4] の拡張であるので、先ず変数 $z \in \mathbb{C}$ に関する微分作用素 $D := z\dfrac{d}{dz}$ を考える。z と順番を入れ換えると $D^k z^n = z^n(D+n)^k$ となる。$W_{1+\infty}$ 代数は[1]、微分作用素 $z^n D^k$ $(n \in \mathbb{Z},\ k \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$ の生成する無限次元リー代数を中心拡大したものである。中心拡大のおまじないを $W(*)$ と書くことにすると、生成元 $W(z^n D^k)$ $(n \in \mathbb{Z},\ k \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$ 間の関係は

$$[W(z^n D^k), W(z^m D^\ell)] = W\Big([z^n D^k, z^m D^\ell]\Big) + c\psi^{k,\ell}_{n,m}\delta_{n+m,0}, \tag{1}$$

$$\psi^{k,\ell}_{n,m} = \begin{cases} \sum_{j=1}^{n}(-j)^k(n-j)^\ell, & n>0, \\ 0, & n=0, \\ -\sum_{j=1}^{m}(-j)^\ell(n-j)^k, & n<0 \end{cases} \tag{2}$$

で与えられる。右辺第一項目は多少複雑である。$c \in \mathbb{C}$ は中心で、生成元の再定義で吸収されないような非自明なものは1次元分しかないことが知られている。

2.2. q-変形とダブル化

ここでパラメータ $q \in \mathbb{C}$ を導入し微分作用素 D^k の母関数 q^D つまり差分作用素を考える。z と順番を入れ換えると $q^D z = qzq^D$ となるため、微分作用素 D とは異なり、q^D と z は対等な関係になっている。$W_{1+\infty}$ 代数をその生成元の母関数 $W(z^n q^{kD})$ で表すと微分作用素の場合の様な複雑さは無くなり、

$$[W(z^n q^{kD}), W(z^m q^{\ell D})] = (q^{mk} - q^{n\ell})W\Big(z^{n+m}q^{(k+\ell)D}\Big) + c\delta_{n+m,0}\frac{q^{mk}-q^{n\ell}}{1-q^{k+\ell}} \tag{3}$$

本研究は科研費 (課題番号:24540210,17K05275) の助成を受けたものである。
2010 Mathematics Subject Classification: 81R10,81T13,33D45
キーワード：ビラソロ代数,AGT 関係, ネクラソフ関数, マクドナルド関数
* 〒464-8602 名古屋市千種区不老町 名古屋大学 大学院多元数理科学研究科
e-mail: awata@math.nagoya-u.ac.jp
web: http://www.math.nagoya-u.ac.jp/~awata/
[1] $1+\infty$ の $1+$ は W_∞ 代数にハイゼンベルク代数を付け加えたことを意味する。

と簡潔に書ける。ここで、$k+\ell\neq 0$ の場合は、(3) の右辺第二項つまり中心拡大部分は $k\neq 0$ の $W(q^{kD})$ を $W(q^{kD})^{\text{new}}=W(q^{kD})+\dfrac{c}{1-q^k}$ と再定義することにより右辺第一項に吸収できる。しかし、$k+\ell=0$ の場合は吸収できず、その場合の中心拡大部分は $ncq^{-nk}\delta_{n+m,0}\delta_{k+\ell,0}$ となる。ただし今の場合、$k+\ell=0$ は $k=\ell=0$ を意味する。

z と q^D は対等なので、その巾 n と k の範囲も対等にすることができる。$W_{1+\infty}$ に $k<0$ の部分も加えて2倍にした様な W 代数のダブル化を考えよう: ${W_{1+\infty}}^2 := \langle W(z^n q^{kD})\rangle_{n,k\in\mathbb{Z}}$. すると変数方向のアフィン性に由来する中心に差分作用素方向のアフィン性に由来する中心も新たに加わり

$$[W(z^n q^{kD}), W(z^m q^{\ell D})] = (q^{mk}-q^{n\ell})W\left(z^{n+m}q^{(k+\ell)D}\right) + q^{-nk}(nc_1+kc_2)\delta_{m+n,0}\delta_{k+\ell,0} \quad (4)$$

の様に2次元の中心拡大となる ($c_1,c_2\in\mathbb{C}$)。

2.3. 更に t-変形（丁-庵原-三木代数）

変数の数を増加し、独立な N 変数 $z=(z_1,z_2,\cdots,z_N)$ とその微分 $D_i := z_i\dfrac{\partial}{\partial z_i}$ を考える。z_i 達は独立なので $q^{D_i}z_j = q^{\delta_{i,j}}z_j q^{D_i}$ である。単に $W\left(\sum_{i=1}^N z_i q^{kD_i}\right)$ の様に N 個の生成元を足し合わせるだけでは何も新しいことは起こらないが、新たなパラメータ $t\in\mathbb{C}$ を導入し、

$$x_n^{\pm} := W\left(\sum_{i=1}^N \prod_j \frac{tz_i - z_j}{z_i - z_j}\cdot (q^{\pm 1}z_i)^n q^{\pm D_i}\right) \quad (5)$$

と変形すると新しい代数が得られ [2]、それが 丁-庵原-三木代数である。代数の関係式は多少複雑なので、ここでは述べず後で母関数表示のものを紹介する。なお x_0^+ がマクドナルド演算子そのものである事は重要である。$k=\pm 1$ 以外の生成元は $k=\pm 1$ の生成元の交換関係で生成できる。${W_{1+\infty}}^2$ とは異なり、生成元の形は z_i と q^{D_i} に関して非対称だが、代数は z 方向と q^D 方向に関してやはり対称であるという非自明な事実が知られている [2]。

2.4. 丁-庵原-三木代数の母関数表示

丁-庵原-三木代数では、パラメータ $z\in\mathbb{C}$ を導入して生成元の母関数 $x^{\pm}(z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n^{\pm} z^{-n}$, $\psi^{\pm}(z) = \sum_{\pm n\in\mathbb{N}} \psi_n^{\pm} z^{-n}$ を考えると、便利である。$q,t\in\mathbb{C}$ に対し $\mathbb{F}=\mathbb{Q}(q,t)$ 及び $\widetilde{\mathbb{F}}=\mathbb{Q}(q^{1/4},t^{1/4})$ とする。又、

$$G^{\pm}(z) := (1-q^{\pm 1}z)(1-t^{\mp 1}z)(1-(q/t)^{\mp 1}z) = -z^3 G^{\mp}(z^{-1}), \quad (6)$$

$$g(z) := \frac{G^+(z)}{G^-(z)} = g^{-1}(z^{-1}) \in \mathbb{Q}(q,t)[[z]] \quad (7)$$

とする。これは $|z|<1$ の場合は次の様にも書ける

$$G^{\pm}(z) = \exp\left(-\sum_{n>0}\frac{z^n}{n}(q^{\pm n}+t^{\mp n}+(q/t)^{\mp n})\right), \quad (8)$$

$$g(z) = \exp\left(\sum_{n>0}\frac{z^n}{n}(1-q^n)(1-t^{-n})(1-(q/t)^{-n})\right). \quad (9)$$

すると、丁-庵原-三木代数 $\mathcal{U}$ は生成元の母関数で表すと

$$\frac{g(\gamma^{-1}w/z)}{g(\gamma^{+1}w/z)}\psi^+(z)\psi^-(w)=\psi^-(w)\psi^+(z),\qquad [\psi^\pm(z),\psi^\pm(w)]=0, \tag{10}$$

$$g(\gamma^{\mp1/2}w/z)^{\pm1}\psi^+(z)x^\pm(w)=x^\pm(w)\psi^+(z), \tag{11}$$

$$\psi^-(z)x^\pm(w)=x^\pm(w)\psi^-(z)g(\gamma^{\mp1/2}z/w)^{\pm1}, \tag{12}$$

$$G^\pm(w/z)x^\pm(z)x^\pm(w)=x^\pm(w)x^\pm(z)\left(-\frac{w}{z}\right)^3G^\pm(z/w), \tag{13}$$

$$[x^+(z),x^-(w)]=\frac{(1-q)(1-1/t)}{1-q/t}\Big(\delta(\gamma^{-1}z/w)\psi^+(\gamma^{1/2}w)-\delta(\gamma z/w)\psi^-(\gamma^{-1/2}w)\Big) \tag{14}$$

という $\mathbb{F}$ 上結合的代数となる。ここで、$\delta(z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}z^n$ である。

$\gamma^{\pm1/2}$ と $\psi_0^\pm$ が中心元である。M を $\widetilde{\mathbb{F}}$ 上左 $\mathcal{U}$-加群とし、任意の $\alpha\in M$ に対し、

$$\gamma^{1/2}\alpha=(t/q)^{l_1/4}\alpha,\qquad (\psi_0^+)^{-1}\psi_0^-\alpha=(t/q)^{l_2}\alpha \tag{15}$$

となる場合、M をレベル (l_1,l_2) と呼ぶ。

又、代数 $\mathcal{U}$ は、ホップ代数の構造を持ち [1]、特に余積 Δ は

$$\Delta(\gamma^{\pm1/2})=\gamma^{\pm1/2}\otimes\gamma^{\pm1/2}, \tag{16}$$

$$\Delta(x^+(z))=x^+(z)\otimes1+\psi^-(\gamma_{(1)}^{1/2}z)\otimes x^+(\gamma_{(1)}z), \tag{17}$$

$$\Delta(x^-(z))=x^-(\gamma_{(2)}z)\otimes\psi^+(\gamma_{(2)}^{1/2}z)+1\otimes x^-(z), \tag{18}$$

$$\Delta(\psi^\pm(z))=\psi^\pm(\gamma_{(2)}^{\pm1/2}z)\otimes\psi^\pm(\gamma_{(1)}^{\mp1/2}z) \tag{19}$$

である。ここで $\gamma_{(1)}^{\pm1/2}=\gamma^{\pm1/2}\otimes1$ 及び $\gamma_{(2)}^{\pm1/2}=1\otimes\gamma^{\pm1/2}$ である。

3. Boson 表示

今までは $W(*)$ というおまじないをした抽象的な代数の話だったが、これからは具体的な表現、特に Boson 表示の話をする。

3.1. Boson 代数

先ず、交換関係

$$[a_m,a_n]=m\frac{1-q^{|m|}}{1-t^{|m|}}\delta_{m+n,0}\,a_0 \tag{20}$$

で定義されるボゾン a_n $(n\in\mathbb{Z})$ で生成される $\mathbb{F}$ 上ハイゼンベルク代数を $\mathcal{H}$ とする。真空 $|0\rangle$ を $a_n|0\rangle=0$ $(n\in\mathbb{Z}_{>0})$ で定義する。分割 $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\ldots)$, $(\lambda_1\geq\lambda_2\geq\ldots\geq0)$ に対し $|a_\lambda\rangle=a_{-\lambda_1}a_{-\lambda_2}\cdots|0\rangle$ とする。$(|a_\lambda\rangle)$ を基底に持つフォック空間を $\mathcal{F}$ とする。

双対真空 $\langle0|$ を $\langle0|\,a_n=0$ $(n\in\mathbb{Z}_{<0})$ で定義し、$\langle a_\lambda|=\langle0|\,a_{\lambda_1}a_{\lambda_2}\cdots$ とする。$(\langle a_\lambda|)$ を基底に持つ双対フォック空間を $\mathcal{F}^*$ とする。

3.2. レベル $(1,N)$ 加群 $\mathcal{F}_u^{(1,N)}$

レベル $(0,0)$ の生成元 x_0^+ は有限変数のマクドナルド作用素に対応しているが、レベルを非自明にするには有限個の変数を無限個に拡張する方法が有効である。実際、無

限変数の場合はマクドナルド作用素のボゾン表示が存在し [8]、それがそのままレベル $(1,0)$ 表現を与えてくれる。又、差分作用素方向に関しては、$k=\pm1$ という簡単な部分しか扱っていないので、差分作用素方向に対応する中心 ℓ_2 の値を非自明にするのは比較的楽にできる。実際、$x^+(z)$ と $x^-(w)$ の交換関係に現れる δ 関数 $\delta(\gamma^{\pm1}z/w)$ の変数のずれ $\gamma^{\pm1}$ の部分を用いて中心 ℓ_2 の値を非自明にすることができる。例えば、

$$x^+(z) := \exp\Big(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-t^{-n}}{n}a_{-n}z^n\Big)\exp\Big(-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-t^{n}}{n}a_{n}z^{-n}\Big)uz^{-N}(q/t)^{-N/2}, \tag{21}$$

$$x^-(z) := \exp\Big(-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-t^{-n}}{n}(t/q)^{n/2}a_{-n}z^n\Big)\exp\Big(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-t^{n}}{n}(t/q)^{n/2}a_{n}z^{-n}\Big)u^{-1}z^{N}(q/t)^{N/2}, \tag{22}$$

$$\psi^\pm(z) := \exp\Big(\mp\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-t^{\pm n}}{n}(1-(t/q)^n)(q/t)^{n/4}a_{\pm n}z^{\mp n}\Big)(q/t)^{\pm N/2} \tag{23}$$

とすると、$u\in\mathbb{C}$ と $N\in\mathbb{Z}$ に対し、$\mathcal{F}$ に $\widetilde{\mathbb{F}}$ 上左 $\mathcal{U}$-加群の構造が入る [11, 10]。ただし $\gamma^{1/2}=(t/q)^{1/4}$ なので、これはレベル $(1,N)$ 加群であり、$\mathcal{F}_u^{(1,N)}$ と書くことにする。又、後で述べるがレベル $(0,1)$ 表現も知られている [12, 13]。

3.3. q-W_N 代数との関係

丁-庵原-三木代数は、レベル ℓ_1 か ℓ_2 が 2 以上の整数 N の場合、q-W_N 代数（q-W_2 代数 $=$ q-ビラソロ代数）を内包している事が知られているが、それは、ボゾン表示すると理解しやすい。先ず、$N\in\mathbb{N}_{\geq2}$ に対しレベル $(N,0)$ 表現は、レベル $(1,0)$ 表現の N 個のテンソル積、つまり N 個の独立なボゾンを用いて構成できる。i 番目のボゾンを用いた生成元を $x^{+(i)}(z)$, $\psi^{-(i)}(z)$ などと書くことにし、q-W_N 代数の場合と同様に量子三浦変換を用いて

$$T^i(z) := \sum_{1\leq j_1<\cdots<j_i\leq N} :\Lambda^{j_1}(z(q/t)^{\frac{1-i}{2}})\Lambda^{j_2}(z(q/t)^{\frac{3-i}{2}})\cdots\Lambda^{j_i}(z(q/t)^{\frac{i-1}{2}}):, \tag{24}$$

$$\Lambda^i(z) := \psi^{-(1)}(z)\psi^{-(2)}(z(q/t)^{-\frac12})\cdots\psi^{-(i-1)}(z(q/t)^{\frac{2-i}{2}})x^{+(i)}(z(q/t)^{\frac{1-i}{2}}) \tag{25}$$

とする。ここで $:\cdots:$ は正モードを右に持ってゆく正規順序の規則である。q-W_N の場合は、スピンが最大の $T^N(z)$ は id であるが、丁-庵原-三木代数の場合は、非自明な生成元となり、代数の交換関係の中に忍び込んでくる。そこで q-W_N にとっては不必要なこの生成元を取り去ってしまえば q-W_N が得られる。この不必要な $T^N(z)$ は、N 個のボゾンの或る線形結合を用いて書けているが、それと直交する超曲面に住む $N-1$ 個の独立なボゾンは不必要なボゾンと交換するため、それらを用いて生成元を書き表せば自動的に q-W_N 代数が得られる。逆にこの不必要なボゾンのお陰で、ホップ代数でなかった複雑な q-W_N 代数が、ホップ代数の構造を持った綺麗な代数に格上げされた訳である。

3.4. マクドナルド関数との関係

ヤング図（分割）$\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\ldots)$ を非負整数の列 $\lambda_1\geq\lambda_2\geq\cdots$ で $|\lambda|:=\sum_{i=1}^{\infty}\lambda_i<\infty$ となるものとする。λ' を λ の双対ヤング図とし、$\ell(\lambda):=\lambda'_1$, $\emptyset:=(0,0,\cdots)$ とする。又、$(i,j)\in\lambda$ は、ヤング図の箱の座標を表す、つまり $\{(i,j)\in\mathbb{Z}^2|1\leq i\leq\ell(\lambda),1\leq j\leq\lambda_i\}$。

$\mathcal{F}_0^{(1,0)}$ において、$x^+(z)$ のゼロモード x_0^+ はマクドナルド演算子のボゾン表示であり、その固有ベクトルはマクドナルド関数のボゾン表示である。つまり

$$x_0^+|P_\lambda\rangle = \varepsilon_\lambda|P_\lambda\rangle, \qquad \varepsilon_\lambda = 1 + (t-1)\sum_{i=1}^{\ell}(q^{\lambda_i}-1)t^{-i}, \tag{26}$$

$$|P_\lambda\rangle = P_\lambda(a_{-1}, a_{-2}, \cdots)|0\rangle \in \mathcal{F}_0^{(1,0)} \tag{27}$$

となる。無限変数 $p = (p_1, p_2, \cdots)$, $p_n \in \mathbb{C}$ に対し、

$$C(p) := \exp\left(\sum_{n>0} \frac{1-t^n}{1-q^n}\frac{a_n}{n}p_n\right) \tag{28}$$

とすると $n > 0$ に対し

$$p_n\,\langle 0|C(p) = \langle 0|C(p)\,a_{-n}, \tag{29}$$

$$n\,\frac{1-q^n}{1-t^n}\,\frac{\partial}{\partial p_n}\,\langle 0|C(p) = \langle 0|C(p)\,a_n \tag{30}$$

なので、 $\langle 0|C(p)$ はボゾン代数 $\langle a_{-n}, a_n\rangle_{n\in\mathbb{N}}$ と p の微分作用素代数 $\langle p_n, \frac{\partial}{\partial p_n}\rangle_{n\in\mathbb{N}}$ の間の同型写像を与えている。実際

$$P_{\lambda/\mu}(p) \propto \langle P_\mu|C(p)|P_\lambda\rangle \tag{31}$$

の様に歪マクドナルド関数 $P_{\lambda/\mu}(p)$ の巾和 $p_n := \sum_{i=1}^{\infty} x_i^n$ 表示が知られている [14]。

4. インタートワイナー

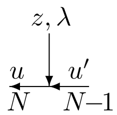
代数の表現論を調べる際に重要となる演算子を考察する [10]。

4.1. インタートワイナー Φ

2つの表現 $\mathcal{F}_u^{(\ell_1,\ell_2)}$ と $\mathcal{F}_v^{(r_1,r_2)}$ を合成して $\mathcal{F}_{u+v}^{(\ell_1+r_1,\ell_2+r_2)}$ となる場合、代数と矛盾なく合成できる方法を調べる。先ず、表現が知られていてかつ基本的な場合、つまり $(\ell_1, \ell_2) = (1, N)$ や $(0, 1)$ の場合について考える。

$N \in \mathbb{Z}$, $u, u', w \in \mathbb{C}$ とする。3点頂点型のインタートワイナー Φ は

$$\Phi : \mathcal{F}_z^{(0,1)} \otimes \mathcal{F}_{u'}^{(1,N-1)} \longrightarrow \mathcal{F}_u^{(1,N)}, \tag{32}$$



$$X\Phi = \Phi\Delta(X) \qquad (\forall X \in \mathcal{U}), \tag{33}$$

を満たすように定めればよい。$\mathcal{F}^{(0,1)}$ はマクドナルド関数 P_λ で表現されることが知られているので、Φ の成分 $\Phi_\lambda(z)$ を

$$\Phi_\lambda(z)(\alpha) = \Phi(P_\lambda \otimes \alpha) \qquad (\forall P_\lambda \otimes \alpha \in \mathcal{F}_z^{(0,1)} \otimes \mathcal{F}_{u'}^{(1,N-1)}) \tag{34}$$

とし、X の $\mathcal{F}^{(0,1)}$ への作用を $\mathrm{ad}\,(X, *)$ と書くと、上の定義式 (33) は

$$\mathrm{ad}\left(\psi^\pm(z), \Phi_\lambda(w)\right) := \psi^\pm((q/t)^{\pm 1/4}z)\Phi_\lambda(w)\left(\psi^+((q/t)^{\pm 1/4}z)\right)^{-1}, \tag{35}$$

$$\mathrm{ad}\left(x^+(z), \Phi_\lambda(w)\right) := x^+(z)\Phi_\lambda(w) - \mathrm{ad}\left(\psi^-(z), \Phi_\lambda(w)\right)x^+(z), \tag{36}$$

$$\mathrm{ad}\left(x^-(z), \Phi_\lambda(w)\right) := \left[x^-((q/t)^{1/2}z), \Phi_\lambda(w)\right]\left(\psi^+((q/t)^{1/4}z)\right)^{-1} \tag{37}$$

となる。$\Phi_\lambda(w)$ を勝手にとると (36)(37) の右辺は δ 関数 $\delta(*w/z)$ にならず z, w に依存した非局所的なものになってしまう。$\Phi_\lambda(w)$ をかなり上手にとらないといけないが、$\mathrm{ad}\,(x^-(z),*)$ の作用で消える最低重み状態（$\lambda=\emptyset$ に対応する $\Phi_\emptyset(w)$）は比較的簡単に構成できる。ただし右辺が δ 関数になるためには、$u'=-u/z$ である必要がある。最低重み状態が存在すれば後はそれに $\mathrm{ad}\,(x^+(z),*)$ を作用させて $\Phi_\lambda(w)$ を構成することができる。$\Phi_\lambda(w)$ の規格化は $\mathrm{ad}\,(X,*)$ の作用が、知られている レベル $(0,1)$ の表現に一致する様に決定することができ、結果は以下の様になる。

$$\Phi_\lambda(z)=\Phi\left[\begin{array}{ccc} & z,\lambda & \\ & \downarrow & \\ \underset{N}{u} & \longleftarrow & \underset{N-1}{-u/z}\end{array}\right]=P_\lambda(-t^{\rho-\frac{1}{2}})\,\boldsymbol{:}\left(\prod_{(i,j)\in\lambda}x^+(q^{j-1}t^{1-i}z)\right)\Phi_\emptyset(z)\boldsymbol{:},\tag{38}$$

$$\Phi_\emptyset(z)=\exp\Big(-\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n}\frac{1}{1-q^n}a_{-n}z^n\Big)\exp\Big(-\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n}\frac{q^n}{1-q^n}a_nz^{-n}\Big).\tag{39}$$

ここで x^+ のパラメータ u, N は左側の $\mathcal{F}_u^{(1,N)}$ に作用する時の値をとる。又 $P_\lambda(-t^{\rho-\frac{1}{2}})$ は、以下の様なマクドナルド関数の特殊値である。$c\in\mathbb{C}$ に対し巾和の特殊値を

$$p_n(cq^\lambda t^\rho):=\sum_{i=1}^\infty c^n(q^{n\lambda_i}-1)t^{n(\frac{1}{2}-i)}+\frac{c^n}{t^{\frac{n}{2}}-t^{-\frac{n}{2}}}\tag{40}$$

とすると $\lambda=\emptyset$, $c=-t^{-\frac{1}{2}}$ の場合が上に登場した特殊値でマクドナルド関数の特殊値は

$$P_\lambda(-ct^{\rho-\frac{1}{2}}):=P_\lambda(-ct^{\rho-\frac{1}{2}};q,t)=\prod_{(i,j)\in\lambda}\frac{cq^{j-1}}{1-q^{\lambda_i-j}t^{\lambda'-i+1}}\tag{41}$$

である。又、インタートワイナーのボゾン部分を露わに表すと

$$\begin{aligned}\boldsymbol{:}\left(\prod_{(i,j)\in\lambda}x^+(q^{j-1}t^{1-i}z)\right)\Phi_\emptyset(z)\boldsymbol{:}&=\left(\prod_{(i,j)\in\lambda}(q^{j-\frac{1}{2}}t^{\frac{1}{2}-i}z)^{-N}u\right)\\&\times\exp\left(\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n}\frac{1-t^n}{1-q^n}a_{-n}(q/t)^{n/2}(z/q^{\frac{1}{2}})^np_n(q^\lambda t^\rho)\right)\\&\times\exp\left(-\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n}\frac{1-t^n}{1-q^n}a_n(q/t)^{n/2}(z/q^{\frac{1}{2}})^{-n}p_{-n}(q^\lambda t^\rho)\right)\end{aligned}\tag{42}$$

となるが、これはボゾンと微分作用素の同型を与える (28) の $C(-p_-)$ とその双対 $C^\dagger(p)$ で構成されている。ここで $-p:=(-p_1,-p_2,\cdots)$, $p_-:=(p_{-1},p_{-2},\cdots)$ などである。

4.2. レベル $(0,1)$ 加群 $\mathcal{F}_w^{(0,1)}$

(38) への $\mathrm{ad}\,(X,*)$ の作用は、レベル $(0,1)$ 加群 $\mathcal{F}_w^{(0,1)}$[12, 13] を構成し

$$\mathrm{ad}\,\big(\psi^\pm(z),\Phi_\lambda(w)\big)=(q/t)^{\pm1/2}B_\lambda^\pm((w/z)^{\pm1})\Phi_\lambda(w),\tag{43}$$

$$\mathrm{ad}\,\big(x^+(z),\Phi_\lambda(w)\big)=\sum_{i=1}^{\ell(\lambda)+1}A_{\lambda,i}^+\,\delta(q^{\lambda_i}t^{1-i}w/z)\Phi_{\lambda+\mathbf{1}_i}(w),\tag{44}$$

$$\mathrm{ad}\,\big(x^-(z),\Phi_\lambda(w)\big)=(q/t)^{1/2}\sum_{i=1}^{\ell(\lambda)}A_{\lambda,i}^-\,\delta(q^{\lambda_i-1}t^{1-i}w/z)\Phi_{\lambda-\mathbf{1}_i}(w)\tag{45}$$

となる。ただし、$x_i := q^{\lambda_i} t^{-i}$ を用いて

$$A^+_{\lambda,i} := (1-t)\prod_{j=1}^{i-1}\frac{\left(1-t\frac{x_i}{x_j}\right)\left(1-\frac{q}{t}\frac{x_i}{x_j}\right)}{\left(1-\frac{x_i}{x_j}\right)\left(1-q\frac{x_i}{x_j}\right)}, \tag{46}$$

$$\begin{aligned} A^-_{\lambda,i} &:= (1-t^{-1})\prod_{j=i+1}^{\infty}\frac{\left(1-t\frac{x_j}{x_i}\right)\left(1-\frac{q}{t}\frac{x_j}{x_i}\right)}{\left(1-\frac{x_j}{x_i}\right)\left(1-q\frac{x_j}{x_i}\right)} \\ &= (1-t^{-1})\frac{1-t\frac{x_{\ell+1}}{x_i}}{1-q\frac{x_{\ell+1}}{x_i}}\prod_{j=i+1}^{\ell}\frac{\left(1-t\frac{x_j}{x_i}\right)\left(1-\frac{q}{t}\frac{x_j}{x_i}\right)}{\left(1-\frac{x_j}{x_i}\right)\left(1-q\frac{x_j}{x_i}\right)}, \end{aligned} \tag{47}$$

$$B^\pm_\lambda(z) := \prod_{i=1}^{\infty}\frac{1-zx_i^{\pm1}}{1-z(tx_i)^{\pm1}}\frac{1-z(\frac{t^2}{q}x_i)^{\pm1}}{1-z(\frac{t}{q}x_i)^{\pm1}} \tag{48}$$

である。$\lambda_i = \lambda_{i-1}$ ならば $A^+_{\lambda,i} = 0$, 又 $\lambda_i = \lambda_{i+1}$ ならば $A^-_{\lambda,i} = 0$ である。$\lambda_i < \lambda_{i-1}$ ならば, i-行目に箱を一つ加えることが可能で、できた新しいヤング図を $\lambda + \mathbf{1}_i = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{i-1}, \lambda_i + 1, \lambda_{i+1}, \ldots)$ と書いた。又 $\lambda_i > \lambda_{i+1}$ ならば, i-行目から箱を一つ取り除くことが可能で、できた新しいヤング図を $\lambda - \mathbf{1}_i = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{i-1}, \lambda_i - 1, \lambda_{i+1}, \ldots)$ と書いた。

4.3. インタートワイナー Φ^*

合成の逆の分解型のインタートワイナー Φ^* も同様に

$$\Phi^* : \mathcal{F}^{(1,N+1)}_{u'} \longrightarrow \mathcal{F}^{(1,N)}_u \otimes \mathcal{F}^{(0,1)}_z, \qquad \begin{array}{ccc} \overset{u}{N} & \longleftarrow \!\!\!\cdot\!\!\! \longleftarrow & \overset{u'}{N+1} \\ & \downarrow & \\ & z,\lambda & \end{array} \tag{49}$$

$$\Delta(X)\Phi^* = \Phi^* X \qquad (\forall X \in \mathcal{U}) \tag{50}$$

で定義する。成分 Φ_λ を

$$\Phi^*(\alpha) = \sum_\lambda \Phi^*_\lambda(z)(\alpha) \otimes P_\lambda / \langle P_\lambda P_\lambda \rangle \qquad (\forall \alpha \in \mathcal{F}^{(1,N+1)}_{u'}) \tag{51}$$

で導入する。ここで、$\langle P_\lambda P_\lambda \rangle$ はマクドナルド関数の内積の値

$$\langle P_\lambda P_\lambda \rangle := \langle P_\lambda, P_\lambda \rangle_{q,t} = \prod_{(i,j)\in\lambda}\frac{1-q^{\lambda_i - j+1}t^{\lambda'-i}}{1-q^{\lambda_i-j}t^{\lambda'-i+1}} \tag{52}$$

である。X の $\mathcal{F}^{(0,1)}$ への作用を $\mathrm{ad}^*(X, *)$ と書くと、上の定義式 (50) は

$$\mathrm{ad}^*\left(\psi^\pm(z), \Phi^*_\lambda(w)\right) := \left(\psi^\pm((q/t)^{\mp1/4}z)\right)^{-1}\Phi^*_\lambda(w)\psi^\pm((q/t)^{\mp1/4}z), \tag{53}$$

$$\mathrm{ad}^*\left(x^+(z), \Phi^*_\lambda(w)\right) := \left(\psi^-((q/t)^{1/4}z)\right)^{-1}\left[x^+((q/t)^{1/2}z), \Phi^*_\lambda(w)\right], \tag{54}$$

$$\mathrm{ad}^*\left(x^-(z), \Phi^*_\lambda(w)\right) := x^-(z)\mathrm{ad}^*\left(\psi^+(z), \Phi^*_\lambda(w)\right) - \Phi^*_\lambda(w)x^-(z) \tag{55}$$

となる。この場合は逆に、$x^+(z)$ で消える最高重み状態（$\lambda=\emptyset$ に対応する $\Phi^*_\emptyset(w)$）が比較的簡単にわかる。ただし $u'=-uz$ という条件がつく。規格化も定めると結果は

$$\Phi^*_\lambda(z)=\Phi\left[\begin{tikzcd} \overset{u}{N} & \overset{-uz}{N+1} \arrow[l] \arrow[d] \\ & z,\lambda \end{tikzcd}\right]=P_\lambda(-qt^{\rho-\frac{1}{2}})\,\mathbf{:}\left(\prod_{(i,j)\in\lambda}x^-(q^{j-1}t^{1-i}z)\right)\Phi^*_\emptyset(z)\,\mathbf{:}, \tag{56}$$

$$\Phi^*_\emptyset(z)=\exp\Bigl(\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n}\frac{1}{1-q^n}(t/q)^{n/2}a_{-n}z^n\Bigr)\exp\Bigl(\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n}\frac{q^n}{1-q^n}(t/q)^{n/2}a_nz^{-n}\Bigr) \tag{57}$$

となる。ここでも x^- のパラメータ u, N は左側の $\mathcal{F}_u^{(1,N)}$ に作用する時の値をとる。ボゾン部分は

$$\begin{aligned}\mathbf{:}\left(\prod_{(i,j)\in\lambda}x^-(q^{j-1}t^{1-i}z)\right)\Phi^*_\emptyset(z)\,\mathbf{:}&=\left(\prod_{(i,j)\in\lambda}(q^{j-\frac{1}{2}}t^{\frac{1}{2}-i}z)^Nu^{-1}\right) \\ \times\exp\left(-\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n}\frac{1-t^n}{1-q^n}a_{-n}(z/q^{\frac{1}{2}})^np_n(q^\lambda t^\rho)\right)&\exp\left(\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{n}\frac{1-t^n}{1-q^n}a_n(z/q^{\frac{1}{2}})^{-n}p_{-n}(q^\lambda t^\rho)\right)\end{aligned} \tag{58}$$

であるが、これは (28) の $C(p_-)$ と $C^\dagger(-p)$ で構成されている。又、このとき $\mathrm{ad}^*(X,*)$ の作用は

$$\mathrm{ad}^*\bigl(\psi^\pm(z),\Phi^*_\lambda(w)\bigr)=(q/t)^{\pm1/2}B^\pm_\lambda((w/z)^{\pm1})\Phi^*_\lambda, \tag{59}$$

$$\mathrm{ad}^*\bigl(x^+(z),\Phi^*_\lambda(w)\bigr)=q\sum_{i=1}^{\ell(\lambda)}A^-_{\lambda,i}\,\delta(q^{\lambda_i-1}t^{1-i}w/z)\Phi^*_{\lambda-\mathbf{1}_i}(w), \tag{60}$$

$$\mathrm{ad}^*\bigl(x^-(z),\Phi^*_\lambda(w)\bigr)=(q/t)^{1/2}q^{-1}\sum_{i=1}^{\ell(\lambda)+1}A^+_{\lambda,i}\,\delta(q^{\lambda_i}t^{1-i}w/z)\Phi^*_{\lambda+\mathbf{1}_i}(w) \tag{61}$$

となる。

4.4. 結合規則

より一般のインタートワイナーを構成するためにインタートワイナー同士の合成を定義する。横方向の合成の場合は、$\mathcal{F}^{(0,1)}$ の元（縦線）を順次挿入したり引き出したりするだけなので、そのままの積でよい。例えば

$$\Phi\left[\begin{tikzcd} & w,\mu \arrow[d] & & z,\lambda \arrow[d] & \\ \overset{uzw}{N+2} & \arrow[l] & \overset{-uz}{N+1} \arrow[l] & \arrow[l] & \overset{u}{N} \arrow[l] \end{tikzcd}\right]:=\Phi\left[\begin{tikzcd} & w,\mu \arrow[d] & \\ \overset{uzw}{N+2} & \arrow[l] & \overset{-uz}{N+1} \arrow[l] \end{tikzcd}\right]\Phi\left[\begin{tikzcd} & z,\lambda \arrow[d] & \\ \overset{-uz}{N+1} & \arrow[l] & \overset{u}{N} \arrow[l] \end{tikzcd}\right]=\Phi_\lambda(w)\Phi_\lambda(z) \tag{62}$$

の様にすればよい。縦方向の合成の場合は、2種類の $\mathcal{F}^{(1,N)}$ の元（横線）の合成なのでテンソル積で行なう。つまり2種類の独立なボゾンを用意してかけあわせ、(51) と (34) より

$$\Phi\left[\begin{tikzcd} \overset{-v/z}{M-1} & \arrow[l] \arrow[d, "z"] & \overset{v}{M} \arrow[l] \\ \overset{-uz}{N+1} & \arrow[l] & \overset{u}{N} \arrow[l] \end{tikzcd}\right]:=\sum_\lambda\frac{1}{\langle P_\lambda P_\lambda\rangle}\begin{matrix}\Phi\left[\begin{tikzcd} \overset{-v/z}{M-1} & \arrow[l] \arrow[d] & \overset{v}{M} \arrow[l] \\ & z,\lambda & \end{tikzcd}\right] \\ \otimes \\ \Phi\left[\begin{tikzcd} & z,\lambda \arrow[d] & \\ \overset{-uz}{N+1} & \arrow[l] & \overset{u}{N} \arrow[l] \end{tikzcd}\right]\end{matrix}=\sum_\lambda\frac{1}{\langle P_\lambda P_\lambda\rangle}\begin{pmatrix}\Phi^*_\lambda(z)\\ \otimes \\ \Phi_\lambda(z)\end{pmatrix} \tag{63}$$

の様に中間状態の表現 λ で和をとればよい。

4.5. 遮蔽演算子

縦方向の積をボゾンで書くと

$$\Phi\left[\begin{array}{ccc} \dfrac{-v/z}{M-1} & \longleftarrow & \dfrac{v}{M} \\ & \Big\downarrow z & \\ \dfrac{-uz}{N+1} & \longleftarrow & \dfrac{u}{N} \end{array}\right] \propto \,:\!\prod_{i\geq 1} S(q^{\lambda_i} t^{\rho_i} q^{-1/2} z)\!:, \tag{64}$$

$$S(x) := \exp\left\{-\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}\frac{1-t^n}{1-q^n}\left(1+\left(\frac{q}{t}\right)^n\right)x^n\tilde{\alpha}_{-n}\right\}\exp\left\{\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}\frac{1-t^n}{1-q^n}\left(1+\left(\frac{q}{t}\right)^n\right)x^{-n}\tilde{\alpha}_n\right\}, \tag{65}$$

$$\tilde{\alpha}_n = \frac{1}{1+(q/t)^{|n|}}(a_n^{(1)} - (q/t)^{|n|/2} a_n^{(2)}) \tag{66}$$

となる。ここで $a_n^{(1)} = a_n \otimes 1$、$a_n^{(2)} = 1 \otimes a_n$ である。$S(z)$ は q-ビラソロ代数の遮蔽演算子に対応し、実際、丁-庵原-三木代数の任意の元 $X \in \mathcal{U}$ と可換であること

$$\left[\Delta(X), \Phi\left[\begin{array}{ccc} \dfrac{-v/z}{M-1} & \longleftarrow & \dfrac{v}{M} \\ & \Big\downarrow z & \\ \dfrac{-uz}{N+1} & \longleftarrow & \dfrac{u}{N} \end{array}\right]\right] = 0 \tag{67}$$

はインタートワイナーの定義関係式から直接示す事もできる [15]。

5. AGT 対応

5.1. 変形位相的頂点

ι を巾和とボゾンの符合を反転する作用素 $\iota p_n = -p_n$, $\iota a_{-n} = -a_{-n}$ $(n > 0)$ とする。インタートワイナーのマクドナルド関数に関する行列要素は [10]

$$\langle \iota P_\mu| \;\Phi\left[\begin{array}{ccc} & z,\lambda & \\ & \Big\downarrow & \\ \dfrac{-uz}{N+1} & \longleftarrow & \dfrac{u}{N} \end{array}\right] |\iota P_\nu\rangle \propto C^{\mu\lambda}{}_\nu(q,t), \tag{68}$$

$$\langle \iota P_\nu| \,\Phi\left[\begin{array}{ccc} \dfrac{u}{N} & \longleftarrow & \dfrac{-uz}{N+1} \\ & \Big\downarrow & \\ & z,\lambda & \end{array}\right] |\iota P_\mu\rangle \propto C_{\mu\lambda}{}^\nu(q,t) \tag{69}$$

となる。ここで

$$C_{\mu\lambda}{}^\nu(q,t) = P_\lambda(t^\rho;q,t)\sum_\sigma \iota P_{\mu'/\sigma'}(-t^{\lambda'}q^\rho;t,q)P_{\nu/\sigma}(q^\lambda t^\rho;q,t)(q^{1/2}/t^{1/2})^{|\sigma|-|\nu|}f_\nu(q,t)^{-1}, \tag{70}$$

$$C^{\mu\lambda}{}_\nu(q,t) = (-1)^{|\lambda|+|\mu|+|\nu|}C_{\mu'\lambda'}{}^{\nu'}(t,q) \tag{71}$$

は変形位相的頂点 [16] で、$f_\lambda(q,t) := \prod_{(i,j)\in\lambda}(-1)q^{j-\frac{1}{2}}t^{\frac{1}{2}-i}$ である。これは、インタートワイナーが (28) のボゾンと巾和の同型写像を与える演算子 $C(p)$, $C(-p)$ 及びその双対で構成されている事と、(31) の様に歪マクドナルド関数がそれらの行列要素で書けているということから従う。又、Iqbal-Kozcaz-Vafa の変形位相的頂点 [17] もシューア関数に関する行列要素で与えられる。尚、位相的頂点と位相的場の理論や結び目理論との関係は [18] で解説しているので割愛する。

5.2. ネクラソフ分配関数

ネクラソフ分配関数は全て変形位相的頂点を用いて構成できるので、それらは又、丁-庵原-三木代数のインタートワイナーの行列要素を用いても構成できる。例えば、5次元 $SU(2)$ $N_f = 0$ の純ヤンミルズの分配関数は

$$\left\langle \begin{matrix}0\\ \otimes\\ 0\end{matrix}\right| \Phi \left[\begin{tikzcd} {} & {} \arrow[l, "v/z_1z_2", "M-2"'] \arrow[d, "z_2"] & {} \arrow[l, "-v/z_1", "M-1"'] \arrow[d, "z_1"] & {} \arrow[l, "v", "M"'] \\ {} & {} \arrow[l, "uz_1z_2", "N+2"'] & {} \arrow[l, "-uz_1", "N+1"'] & {} \arrow[l, "u", "N"'] \end{tikzcd}\right] \left|\begin{matrix}0\\ \otimes\\ 0\end{matrix}\right\rangle \tag{72}$$

と表される。両端の真空は2種類のボゾンに関する真空のテンソル積である。$N_f \neq 0$ の場合は上下に自明表現の足を生やせばよく、$SU(N)$, $N > 2$ の場合は横に梯子を伸ばせばよい。ネクラソフ分配関数と q-ビラソロ代数や q-W_N 代数の AGT関係は [19][20]、そのままだと複雑だが、$U(1)$ ボゾンを付け加えた方が簡単で本質的であり [21]、ネクラソフ分配関数は丁-庵原-三木代数の相関関数に一致することが証明された [10]。又最近はインタートワイナーのブレイド関係や qt-KZ 方程式なども分かってきている [22]。

参考文献

[1] J. Ding, K. Iohara, Lett. Math. Phys. **41** (1997), no. 2, 181–193.

[2] K. Miki, J. Math. Phys. **48** (2007) 123520.

[3] V. Kac and A. Radul, *Comm. Math. Phys.* **157** (1993) 429-457.

[4] H. Awata, M. Fukuma, Y. Matsuo and S. Odake, Prog.Theor.Phys.Suppl. **118** (1995) 343-374.

[5] V. Ginzburg, M. Kapranov and E. Vasserot, Mathem. Research Letters, **2** (1995) 147-160.

[6] J. Shiraishi, H. Kubo, H. Awata, S. Odake, Lett. Math. Phys. **38** (1996), 33–51.

[7] B. Feigin and E. Frenkel, *Comm. Math. Phys.* **178** (1996) 653–678.

[8] H. Awata, H. Kubo, S. Odake and J. Shiraishi, *Comm. Math. Phys.* **179** (1996) 401–416.

[9] N. Nekrasov, *Adv. Theor. Math. Phys.* **7** (2003) 831.

[10] H. Awata, B. Feigin and J. Shiraishi, JHEP 1203 (2012) 041.

[11] B. Feigin, K. Hashizume, A. Hoshino, J. Shiraishi, S. Yanagida, J. Math. Phys. **50** (2009) 095215.

[12] B. Feigin, A. Tsymbaliuk, Kyoto J. Math. **51** (2011) 831-854.

[13] B. Feigin, E. Feigin, M. Jimbo, T. Miwa, E. Mukhin, Kyoto J. Math. **51** (2011) 337–364.

[14] H. Awata, S. Odake and J. Shiraishi, Comm. Math. Phys. **179**, 647–666 (1996).

[15] H. Awata, H. Kanno, T. Matsumoto, A. Mironov, A. Morozov, An. Morozov, Y. Ohkubo and Y. Zenkevich, JHEP **07** (2016) 103.

[16] H. Awata, H. Kanno, JHEP **0505**, 039 (2005); Int. J. Mod. Phys. **A24** (2009) 2253–2306.

[17] A. Iqbal, C. Kozcaz and C. Vafa, J. High Energy Phys. (2009) no. 10, 069, 58pp.

[18] H. Awata, 2009年度日本数学会秋季総合分科会, 企画特別講演アブストラクト, 44–53.

[19] L.F. Alday, D. Gaiotto, Y. Tachikawa, Lett. Math. Phys. **91** (2010), 167–197.

[20] H. Awata, Y. Yamada, JHEP 1001:125 (2010); Prog. Theor. Phys. **124** (2010), 227–262.

[21] V.A. Alba, V.A. Fateev, A.V. Litvinov, G.M. Tarnopolsky, Lett. Math. Phys. **98** (2011) 33-64.

[22] H. Awata, H. Kanno, A. Mironov, A. Morozov, An. Morozov, Y. Ohkubo and Y. Zenkevich, Jour. High Energy Phys. 246 (10) 1–49; Nucl. Phys. B918 (2017) 358–385; Phys. Rev. **D96** 026021 (2017).